

Н. В. Минаева

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ МЕТОДОМ ВОЗМУЩЕНИЙ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Проведено исследование напряженно-деформированного состояния толстостенной конической трубы по теории малых деформаций при степенном упрочнении. Найдено решение, описывающее состояние трубы, методом малого параметра с точностью до величин второго порядка малости.

Ключевые слова: степенное упрочнение, коническая труба, малый параметр, сходимость.

УДК: 539.3

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.006

Рассмотрим коническую трубу, находящуюся под действием внутреннего давления p . Ее внешний и внутренний контуры поперечного сечения в цилиндрической системе координат характеризуются функциями $r = a + k_1 f_1(Z)$ и $r = b + k_2 f_2(Z)$.

Напряженно-деформированное состояние трубы из несжимаемого материала при степенном упрочнении описывается решением следующей системы уравнений [1-3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} &= 0 \\ \sigma_\rho - \sigma_\theta &= \frac{2}{3} A e_i^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho} \right) \\ \sigma_\rho - \sigma_z &= \frac{2}{3} A e_i^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{\rho z} &= \frac{1}{3} A e_i^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

где $\rho = \frac{r}{b}$, $z = \frac{Z}{b}$, $e_i = \sqrt{2/3}((e_z - e_\theta)^2 + (e_z - e_\rho)^2 + (e_\theta - e_\rho)^2 + \frac{3}{2}(e_{\rho z}^2 + e_{\rho\theta}^2 + e_{z\theta}^2))^{1/2}$.

Поступила 10.01.2019

© Минаева Н. В., 2019

Минаева Надежда Витальевна

e-mail: nminaeva@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия

Граничные условия будут такими:

$$\begin{aligned} \sigma_n|_{\rho=\Psi_1(z)} &= -p; & \tau_n|_{\rho=\Psi_1(z)} &= 0 \\ \sigma_n|_{\rho=\Psi_2(z)} &= 0; & \tau_n|_{\rho=\Psi_2(z)} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь функции $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ определяют контур поперечного сечения в деформированном состоянии. Если считать форму сечения близкой к круговому кольцу на всем протяжении трубы, т.е. $k_1 = k_2 = 0$, то задача (1),(2) допускает решение [1, 2]

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^0 &= \frac{\alpha^{2m}(1 - \rho^{2m})}{\rho^{2m}(1 - \alpha^{2m})}p; & \sigma_\theta^0 &= \frac{\alpha^{2m}((2m-1) + \rho^{2m})}{\rho^{2m}(1 - \alpha^{2m})}p; & \tau_{\rho z}^0 &= 0 \\ u^0 &= -\frac{c}{\rho}; & w^0 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha = \frac{a}{b}$, $c = \frac{3m}{2A} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^{m-1} p$.

Это решение можно использовать в качестве приближенного, если решение исходной задачи непрерывно зависит от функций $f_i(z)$ при $f_1(z) = f_2(z) = 0$. Для анализа подобной непрерывности, согласно [4-6], построим задачу относительно вспомогательных функций ζ_i . Она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\sigma_\rho^0 + \zeta_1)}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho^0 + \zeta_1 - \sigma_\theta^0 - \zeta_2}{\rho} + \frac{\partial(\tau_{\rho z}^0 + \zeta_3)}{\partial z} = 0 \\ & \frac{\partial(\sigma_z^0 + \zeta_4)}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}^0 + \zeta_3}{\rho} + \frac{\partial(\tau_{\rho z}^0 + \zeta_3)}{\partial \rho} = 0 \\ & \sigma_\rho^0 + \zeta_1 - \sigma_\theta^0 - \zeta_2 = \frac{2}{3} A e_i^{m-1} \left(\frac{\partial(u^0 + \zeta_5)}{\partial \rho} - \frac{u^0 + \zeta_5}{\rho} \right) \\ & \sigma_\rho^0 + \zeta_1 - \sigma_z^0 - \zeta_4 = \frac{2}{3} A e_i^{m-1} \left(\frac{\partial(u^0 + \zeta_5)}{\partial \rho} - \frac{\partial(w^0 + \zeta_6)}{\partial z} \right) \\ & \tau_{\rho z}^0 + \zeta_3 = \frac{1}{3} A e_i^{m-1} \left(\frac{\partial(u^0 + \zeta_5)}{\partial z} + \frac{\partial(w^0 + \zeta_6)}{\partial \rho} \right) \\ & \frac{\partial(u^0 + \zeta_5)}{\partial \rho} + \frac{u^0 + \zeta_5}{\rho} + \frac{\partial(w^0 + \zeta_6)}{\partial z} = 0 \\ & e_i = \sqrt{2/3} \left(2 \left(\frac{\partial w^0}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u^0}{\partial \rho} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial \rho} \right)^2 + 2 \left(\frac{u^0}{\rho} + \frac{\zeta_5}{\rho} \right)^2 - \right. \\ & \quad - 2 \left(\frac{\partial w^0}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial z} \right) \left(\frac{u^0}{\rho} + \frac{\zeta_5}{\rho} \right) - 2 \left(\frac{\partial w^0}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial u^0}{\partial \rho} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial \rho} \right) - \\ & \quad \left. - 2 \left(\frac{u^0}{\rho} + \frac{\zeta_5}{\rho} \right) \left(\frac{\partial u^0}{\partial \rho} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial \rho} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u^0}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial z} + \frac{\partial w^0}{\partial \rho} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial \rho} \right)^2 \right) \\ & (\sigma_n + \zeta_n)|_{\rho=\Psi_1(z)} = -p; & (\tau_n + \zeta_\tau)|_{\rho=\Psi_1(z)} &= 0 \\ & (\sigma_n + \zeta_n)|_{\rho=\Psi_2(z)} = 0; & (\tau_n + \zeta_\tau)|_{\rho=\Psi_2(z)} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Для того, чтобы решение исходной задачи (1), (2) непрерывно зависело от $f_i(z)$, необходимо, чтобы однородная линеаризованная задача, полученная из (4), имела только тривиальное решение.

После линеаризации по ζ_i , с учетом (3), (4) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \zeta_1}{\partial \rho} + \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\rho} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \zeta_4}{\partial z} + \frac{\zeta_3}{\rho} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial \rho} &= 0 \\
 \zeta_1 - \zeta_2 &= a_1 \rho^{-2(m-1)} \left(\frac{\partial \zeta_5}{\partial \rho} - \frac{\zeta_5}{\rho} \right) \\
 \zeta_1 - \zeta_4 &= a_2 \rho^{-2(m-1)} \left(\frac{c(m-1) + 2}{2} \frac{\partial \zeta_5}{\partial \rho} - \frac{c(m-1)}{2\rho} \zeta_5 - \frac{\partial \zeta_6}{\partial z} \right) \\
 \zeta_3 &= a_3 \rho^{-2(m-1)} \left(\frac{\partial \zeta_5}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial \rho} \right) \\
 \frac{\partial \zeta_5}{\partial \rho} + \frac{\zeta_5}{\rho} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial z} &= 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

при $\rho = 1$ и $\rho = \alpha$

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 - \frac{2m\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}} \rho^{-2m-1} p \zeta_5 &= 0 \\
 \zeta_3 - \frac{m\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}} \rho^{-2m} p \frac{\partial \zeta_5}{\partial z} &= 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $a_1 = a_2(c(m-1) + 1)$; $a_2 = 2a_3$; $a_3 = \frac{A}{3}(2c)^{\frac{m-1}{2}}$.

Следуя [1,2] решение задачи (5) ищем в виде:

$$\zeta_5 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z}; \quad \zeta_6 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \tag{7}$$

В результате подстановки (6) в (5) была найдена функция Ψ :

$$\Psi = C_1 \rho^2 z^2 + C_2 z^2 + C_3 \rho^{2m+2} + C_4 \rho^{2m} \tag{8}$$

Для того, чтобы решение исходной задачи (1), (2) непрерывно зависело от $f_i(z)$ при $f_i(z) = 0$, нужно, чтобы задача (5),(6) имела только тривиальное решение. В результате подстановки функций ζ_i , найденных через (8), было получено условие нетривиальности решения (5),(6) в виде:

$$\begin{aligned}
 2(a_{31} - \alpha^2 a_{42})(a_{12} - a_{22}) + 2a_{21}(\alpha^{2m} - 1)(a_{42}\alpha - a_{31}) + \\
 + (1 - \alpha^2)a_{21}(a_{22}\alpha^{2m} - a_{12}) = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

где $a_{12} = 2 \left(\frac{a_1}{m} + 2mp \frac{\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}} \right)$; $a_{12} = p \frac{4m}{1 - \alpha^{2m}}$; $a_{22} = 2a_1 \frac{\alpha^{-2m}}{m} + \frac{a_{21}}{2\alpha^2}$; $a_{31} = -2(a_3 + \frac{a_{21}}{4}\alpha^{2m})$; $a_{42} = -2a_3\alpha^{-2m+2} - \frac{a_{21}}{2}$.

Наименьший корень уравнения (9) обозначим через p^* . Таким образом, если внутреннее давление таково, что $p < p^*$, то решение задачи (1),(2) будет непрерывно зависеть от f_i при $f_i = 0$.

Пусть отклонение поперечного сечения от кругового кольца задано с точностью до малых параметров $\delta_1 = \frac{k_1}{b}$ и $\delta_2 = \frac{k_2}{b}$. В подобных задачах широко используется метод малого параметра [2, 7, 8]. В случае, если $p < p^*$ решение будет аналитическим по δ_1, δ_2 в окрестности точки $\delta_1 = \delta_2 = 0$, и его можно искать в виде сходящихся рядов:

$$\begin{aligned}
 \sigma_\rho = \sum_0^\infty \sigma_\rho^{ij} \delta_1^i \delta_2^j, \quad \sigma_\theta = \sum_0^\infty \sigma_\theta^{ij} \delta_1^i \delta_2^j, \quad \dots, \quad w = \sum_0^\infty w^{ij} \delta_1^i \delta_2^j, \\
 \sigma_\rho^{00} = \sigma_\rho^0; \quad \sigma_\theta^{00} = \sigma_\theta^0; \quad \dots, \quad w^{00} = w^0
 \end{aligned} \tag{10}$$

В результате подстановки (10) в (1),(2) были получены задачи для компонент приближений. Системы уравнений для первого приближения имеют вид аналогичный (5), где вместо ζ_i подставлены соответствующие напряжения и перемещения. Граничные условия будут такими:

для компонент с индексом "10"
при $\rho = 1$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{10} - \frac{2mp\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m-1}u^{10} &= 0; \\ \tau_{\rho z}^{10} - \frac{mp\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m}\frac{\partial u^{10}}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{11}$$

при $\rho = \alpha$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{10} - \frac{2mp\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m-1}(u^{10} + f_1(z)) &= 0; \\ \tau_{\rho z}^{10} - \frac{mp\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m}\left(\frac{\partial u^{10}}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) &= 0\end{aligned}$$

для компонент с индексом "01"
при $\rho = 1$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{01} - \frac{2mp\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m-1}(u^{01} + f_2(z)) &= 0; \\ \tau_{\rho z}^{01} - \frac{mp\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m}\left(\frac{\partial u^{01}}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) &= 0\end{aligned}\tag{12}$$

при $\rho = \alpha$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{01} - \frac{2mp\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m-1}u^{01} &= 0; \\ \tau_{\rho z}^{01} - \frac{mp\alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2m}}\rho^{-2m}\frac{\partial u^{01}}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

Поскольку с точностью до обозначений система уравнений совпадает с (5), то для определения приближений также воспользуемся функциями Ψ^{10} и Ψ^{01} . Их вид будет следующий

$$\begin{aligned}\Psi^{10} &= N_1\rho^2z^2 + N_2z^2 + N_3\rho^{2m+2} + N_4\rho^{2m} \\ \Psi^{01} &= M_1\rho^2z^2 + M_2z^2 + M_3\rho^{2m+2} + M_4\rho^{2m}\end{aligned}\tag{13}$$

В результате были найдены компоненты первого приближения

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{10} &= 2\frac{a_1}{m}N_1\rho^{-2m}z + 8a_3m(m+1)N_3z; \\ \sigma_\theta^{10} &= 2\frac{a_1}{m}N_1\rho^{-2m}z - 4a_1N_2\rho^{-2m-4}z + 8a_3m(m+3)N_3z; \\ \tau_{\rho z}^{10} &= 2a_3(-N_1\rho^{-2m+3} - N_2\rho^{-2m+1} + 2m(m+1)N_3\rho + 2m(m-1)N_4\rho^{-1}); \\ \sigma_z^{10} &= -4a_3((m-2)N_1\rho^{-2m+2} + (m-1)N_2\rho^{-2m} + 2m(m+1)N_3)z; \\ u^{10} &= -2N_1\rho z - 2N_2\rho^{-1}z; \\ w^{10} &= 2N_1z^2 + 2(m+1)N_3\rho^{2m} + 2mN_4\rho^{2m-2}\end{aligned}\tag{14}$$

Приближения "01" имеют вид аналогичный (14). Константы N_i , M_i находим, подставляя в граничные условия (11), (12). Для частного случая функций $f_1(z) = f_2(z) =$

= z системы для для определения констант будут следующими:

$$\begin{aligned} a_{11}N_1 + a_{12}N_2 + a_{13}N_3 + a_{14}N_4 &= 0 \\ a_{21}N_1 + a_{22}N_2 + a_{23}N_3 + a_{24}N_4 &= -\frac{m}{1-\alpha^{2m}}p \\ a_{31}N_1 + a_{32}N_2 + a_{33}N_3 + a_{34}N_4 &= 0 \\ a_{41}N_1 + a_{42}N_2 + a_{43}N_3 + a_{44}N_4 &= \frac{2m}{(1-\alpha^{2m})\alpha}p \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a_{11}M_1 + a_{12}M_2 + a_{13}M_3 + a_{14}M_4 &= -\frac{m\alpha^{2m}}{1-\alpha^{2m}}p \\ a_{21}M_1 + a_{22}M_2 + a_{23}M_3 + a_{24}M_4 &= 0 \\ a_{31}M_1 + a_{32}M_2 + a_{33}M_3 + a_{34}M_4 &= \frac{2m\alpha^{2m}}{1-\alpha^{2m}}p \\ a_{41}M_1 + a_{42}M_2 + a_{43}M_3 + a_{44}M_4 &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

где $a_{11} = \alpha^{2m}a_{21}$, $a_{13} = 2a_{33}$, $a_{14} = 0$, $a_{23} = 2a_{13}$, $a_{24} = 0$, $a_{32} = a_{31}$, $a_{33} = a_{34} = 4a_3m(m-1)$, $a_{41} = \alpha a_{42}$, $a_{43} = \alpha a_{33}$, $a_{44} = \alpha^{-1}a_{34}$.

Вид постоянных не приводится из-за их громоздкости.

Таким образом, найдено решение задачи (1),(2) с точностью до величин второго порядка малости:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma_\rho^0 + \sigma_\rho^{10}\delta_1 + \sigma_\rho^{01}\delta_2, \\ \sigma_\theta &= \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^{10}\delta_1 + \sigma_\theta^{01}\delta_2, \\ \tau_{\rho z} &= \tau_{\rho z}^{10}\delta_1 + \tau_{\rho z}^{01}\delta_2, \\ \sigma_z &= \sigma_z^0 + \sigma_z^{10}\delta_1 + \sigma_z^{01}\delta_2, \\ u &= u^0 + u^{10}\delta_1 + u^{01}\delta_2, \\ w &= w^{10}\delta_1 + w^{01}\delta_2 \end{aligned}$$

В качестве оценки погрешности найденного результата можно использовать какую-либо из оценок ряда Тейлора.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д. Упругопластическое состояние конической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник МГУ. 1958. №2. С. 47–56.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
- [3] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластических деформаций. М. : Наука, 1978. 208 с.
- [4] Зачепа В. Р., Сапронов Ю. И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений. Воронеж: Изд-во Воронежск. госунивер., 2002. 185 с.
- [5] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
- [6] Минаева Н. В. Метод возмущений в механике деформируемых тел. М.: Научная книга, 2002. 156 с.
- [7] Артемов М. А., Ковалев А. В., Спорыхин А. Н. Метод возмущений в одном классе упругопластических задач с произвольным упрочнением // ВГУ. Воронеж, 1995. 30 с. – Деп в ВИНТИ 14.03.96 №685–695.
- [8] Ибрагимов В. А., Нафагин В. А. Метод разложения по параметру нагружения в упругопластических задачах для упрочняющихся тел // Теор. и прикл. механика. 1986. №13. С. 3–7

N. V. Minaeva

THE INVESTIGATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A CONICAL TUBE BY PERTURBATION METHOD

Voronezh State University, Russia

Abstract. We conducted a study of the stress-strain state of a thick-walled conical tube on the theory of small deformations under power hardening. We found a solution describing the state of the pipe by a small parameter method up to the second order of magnitude of smallness.

Keywords: power-law hardening, conical tube, small parameter, convergence

REFERENCES

- [1] Ivlev D. D. Elastic-plastic state of the conical tube under the action of internal pressure // Vestnik MSU. 1958. №2 P. 47–56.
- [2] Ivlev D. D. Theory of hardening of the plastic body. M.: Nauka, 1971. 232p.
- [3] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. M.: Nauka, 1978. 208 p.
- [4] Zacapa R. V, Saprionov Yu. I. The local analysis fredholmian equations. Voronezh: publishing house of VSU, 2002. 185 p.
- [5] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the theory of functions and functional analysis. M.: Nauka, 1976. 542 p.
- [6] Minaeva N. V. The perturbation Method in mechanics of deformable bodies. M. : Nauchnaya kniga, 2002. 156 p.
- [7] Artyomov M. A., Kovalev A. V., Sporykhin A. N. The perturbation method in the same class of elastic-plastic tasks with arbitrary hardening / M.A.Artyomov, // VSU. Voronezh, 1995. 30 p. Dep. VINITI 14.03.96 №685–695.
- [8] Ibragimov V. A., Nefagin V. A. The decomposition method according to the loading parameter in elasto-plastic problems for hardening bodies // Th. and appl. mechanics. 1986. №13. P. 3–7

Minaeva Nadezhda Vitalevna

e-mail: minaeva@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia.