

С. О. Фоминых¹

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В УПРУГОЙ ОБЛАСТИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ И АНИЗОТРОПИИ ПО МИЗЕСУ–ХИЛЛУ

¹ Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Рассматривается двуслойная анизотропная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления. Предполагается, что материал, обладающий свойствами анизотропии по Мизесу–Хиллу, примыкает к внутренней части трубы (первый слой), второй слой обладает свойствами трансляционной анизотропии. Определены напряженное состояние трубы в упругой области, граница упругопластической зоны.

Ключевые слова: анизотропия, трансляционная анизотропия, анизотропия по Хиллу, труба, напряжение, упругая область.

УДК: 539.374

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.007

Рассмотрим двуслойную толстостенную трубу, обозначим a , b — внутренний и внешний радиусы трубы, величина c определяет границу слоев трубы (рис. 1). Предпола-

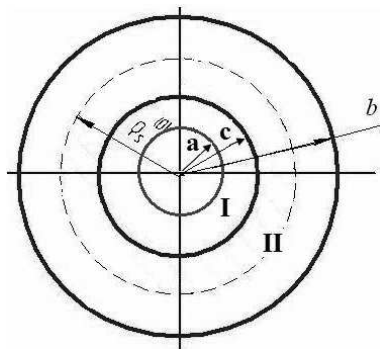


Рис. 1.

© Фоминых С. О., 2019

Фоминых Светлана Олеговна

e-mail: ermakovaso@gambler.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.01.2019

гается, что материал, обладающий свойствами анизотропии по Мизесу–Хиллу, при-
мыкает к внутренней части трубы (первый слой), второй слой обладает свойствами
трансляционной анизотропии.

Согласно [1] условия пластичности в полярных координатах имеют вид:

– в первой, внутренней области I ($a < \rho < c$, см. рис. 1):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right)^2 \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + (\tau_{\rho\theta}^p)^2 \left[\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + \\ & + \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right) \tau_{\rho\theta}^p [A-B] \sin 4\theta - K_1^2 = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

– во внешней области II ($c < \rho < b$):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \right)^2 + \tau_{\rho\theta}^2 - 2R \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \right) \cos(2\theta + \mu) - \\ & - 2\tau_{\rho\theta}^{(p)} R \sin(2\theta + \mu) + R^2 - 1 = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $A, B, K_1, K_2, k_1, k_2, k_3 = \text{const}$,

$$R = \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + k_3^2}, \quad \frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos \mu, \quad \frac{k_3}{R} = \sin \mu.$$

Величины, имеющие размерность длины, отнесены к некоторой характерной длине.
В качестве характерной длины выберем радиус упругопластической зоны ρ_s^0 в исход-
ном нулевом приближении. Обозначим $a/\rho_s^0 = \alpha$, $b/\rho_s^0 = \beta$, ρ – текущий радиус.

Напряженное состояние в пластической области полностью определено [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)p} &= -R' \left[\frac{c}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu) + \\ & + K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \cos 4\theta, \\ \sigma_\theta^{(1)p} &= -R' \left[\frac{c}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) + 1 \right] \cos(2\theta + \mu) + \\ & + K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \frac{1}{8} \right] \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)p} &= R' \left[\frac{c}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) - 1 \right] \sin(2\theta + \mu) + \\ & + K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left(\sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - \frac{1}{4} \right] \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

На границе пластической зоны при $\rho = 1$ из (3) следует

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)p} &= R' \cos \mu \left[-c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) + 1 \right] \cos 2\theta + \\ & + R' \sin \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \sin 2\theta + \\ & + K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)p} &= R' \cos \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \sin 2\theta + \end{aligned} \quad (4)$$

$$+R' \sin \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \cos 2\theta + \\ +K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left(\sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - \frac{1}{4} \right] \sin 4\theta.$$

В дальнейшем запишем соотношения (4) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(1)p} &= a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta + a_4'' \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)p} &= a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta + b_4''' \sin 4\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} a_2'' &= R' \cos \mu \left[-c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) + 1 \right], \\ b_2'' &= R' \sin \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\ a_4'' &= K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right], \\ a_2''' &= R' \sin \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\ b_2''' &= R' \cos \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\ b_4''' &= K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left(\sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - \frac{1}{4} \right]. \end{aligned}$$

Внешняя часть трубы свободна от усилий:

$$\sigma_{\rho}^{(1)e} = \tau_{\rho\theta}^{(1)e} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \beta. \quad (6)$$

Компоненты напряжения $\sigma_{\rho}^{(1)}$, $\tau_{\rho\theta}^{(1)}$ на границе пластической зоны равны между собой:

$$\sigma_{\rho}^{(1)p} = \sigma_{\rho}^{(1)e}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(1)p} = \tau_{\rho\theta}^{(1)e} \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (7)$$

Из условий (6), (7), согласно (4) определяются компоненты напряжения в упругой области.

Согласно формулам (VI) и (VIII), приведенным в [1], возможны различные случаи соотношения коэффициентов:

1) положим, что на границе упругопластической области имеет место (5) при

$$\begin{aligned} a_2'' &= -R' \cos \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\ b_2'' &= R' \sin \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\ b_2''' &= a_4''' = a_2''' = b_4''' = 0, \end{aligned}$$

тогда напряжения будут определяться

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(1)e} &= \left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) R' \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu), \\ \sigma_{\theta}^{(1)e} &= -\frac{1}{\rho^4} R' \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu), \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= \left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) R' \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \sin(2\theta + \mu); \end{aligned} \quad (8)$$

2) положим, что на границе упругопластической области имеет место (5) при

$$\begin{aligned} a_2''' &= R' \sin \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\ b_2''' &= R' \cos \mu \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\ a_2'' &= b_2'' = a_4'' = b_4'' = 0, \end{aligned}$$

тогда напряжения будут определяться

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)e} &= \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) R' \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu), \\ \sigma_\theta^{(1)e} &= -\frac{2}{\rho^4} R' \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu), \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) R' \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \sin(2\theta + \mu); \end{aligned} \quad (9)$$

3) положим, что на границе упругопластической области имеет место (5) при

$$\begin{aligned} a_4'' &= K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right], \\ b_4''' &= K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left(\sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - \frac{1}{4} \right], \\ a_2'' &= b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0, \end{aligned}$$

тогда напряжения будут определяться

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)e} &= \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) \left(K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \right) \cos 4\theta, \\ \sigma_\theta^{(1)e} &= \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left(K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \right) \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left\{ -K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left(\sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - \frac{1}{4} \right] \right\} \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Результирующие напряжения в упругой области определяются как сумма напряжений (8)–(10):

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)e} &= R' \left\{ \left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{4}{\rho^2} \right) (c \cos(\sqrt{3} \ln c) - 1) + \frac{\sqrt{3}}{\rho^4} c \sin(\sqrt{3} \ln c) \right\} \cos(2\theta + \mu) + \\ &\quad + \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) \left\{ K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \right\} \cos 4\theta, \\ \sigma_\theta^{(1)e} &= -R' \left[\frac{\sqrt{3}c}{\rho^4} (\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln c) + \sin(\sqrt{3} \ln c)) - \frac{3}{\rho^4} \right] \cos(2\theta + \mu) + \\ &\quad + \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left\{ K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \right\} \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= R' \left[c \left(\left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) (\cos(\sqrt{3} \ln c) - 1) + \frac{\sqrt{3}}{\rho^4} \sin(\sqrt{3} \ln c) \right) \right] \sin(2\theta + \mu) + \\ &\quad + \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left\{ -K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left\{ \sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right\} - \frac{1}{4} \right] \right\} \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Из [2] получим

$$\left. \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = 2K_2c, \quad \left. \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = -2K_2,$$

тогда для определения границы раздела упругопластической области в первом приближении будем иметь

$$\rho_s^{(I)} = \frac{\sigma_{\theta}^{(I)p} - \sigma_{\theta}^{(I)e}}{\frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho}} = \frac{1}{2K_2(1+c)} (\sigma_{\theta}^{(I)e} - \sigma_{\theta}^{(I)p}),$$

откуда

$$\rho_s^{(I)} = \frac{1}{K_2(1+c)} \times \left\{ -R' \left[c(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 2 \right] \cos(2\theta + \mu) + K_1 \cos 4\theta \right\}. \quad (12)$$

Таким образом, напряженное состояние в упругой (11) области полностью определено, изменение границы раздела упругой и пластической областей определяется из соотношения (12).

На рис. 2,а изображена упругопластическая граница в нулевом $\rho_s^{(0)}$ и в первом ρ_s' приближениях при $d_1 = 0,1$; $\delta = 0,1$; $K_1 = 1,2$; $K_2 = 1,3$; $(k_1 - k_2)/2 = 0,3$; $k_3 = 0$; $c = 0,7$, а на рис. 2,б — при $d_1 = 0,1$; $\delta = 0,1$; $K_1 = 1,2$; $K_2 = 1,3$; $(k_1 - k_2)/2 = 0$; $k_3 = 0,25$; $c = 0,7$.

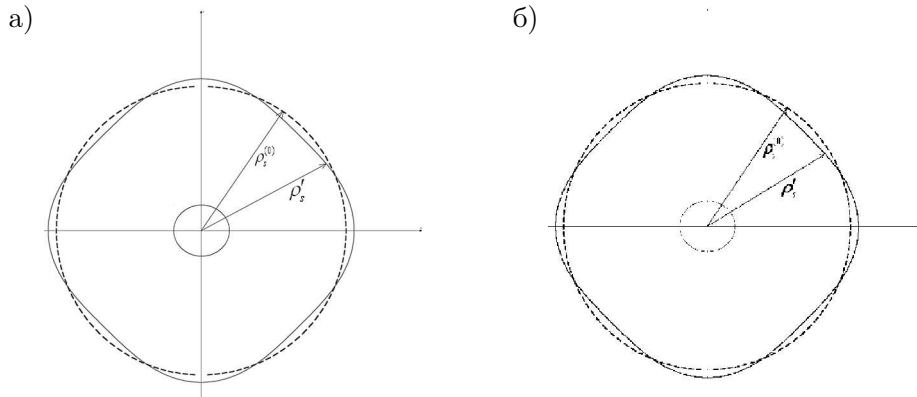


Рис. 2. Упругопластическая граница в нулевом $\rho_s^{(0)}$ и в первом ρ_s' приближениях: а) при $\mu = 0^\circ$, $k_1 = k_2 + 2R$; б) при $\mu = 90^\circ$, $k_1 = k_2$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
 [2] Фоминых С. О. Определение напряженного состояния в пластической области толстостенной трубы при условии пластичности трансляционной анизотропии и анизотропии по Мизесу–Хиллу // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 4(38). С. 90–95.

S. O. Fominykh¹

TENSION DETERMINATION IN THE ELASTIC AREA OF A THICKWALLED PIPE ON CONDITION OF TRANSMITTING ANISOTROPY AND MISES–HILL ANISOTROPY PLASTICITY

¹*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.*

Abstract. The bilayer anisotropic thick-walled pipe under the action of internal pressure is considered in the article. It is assumed that a material with Mises–Hill anisotropy properties is adjacent to the inside of the pipe (first layer), the second layer has translational anisotropy properties. The stress state of the pipe in the elastic region, the boundary of the elastoplastic zone are determined here.

Keywords: anisotropy, translational anisotropy, Hill anisotropy, pipe, stress, elastic region.

REFERENCES

- [1] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of an elastoplastic body. M.: Nauka, 1978. 208 p. (in Russia)
- [2] Fominykh S. O. Determination of the stress state in the plastic region of a thick-walled tube under the condition of translational anisotropy and Mises–Hill anisotropy plasticity // Bulletin of ChGPU them. I. Ya. Yakovlev. Series: Limit state mechanics. 2018. № 4(38). P. 90–95. (in Russia)

Fominykh Svetlana Olegovna

e-mail: ermakovaso@rambler.ru, Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Russia