

А. В. Ткачева

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СФЕРЕ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Работа посвящена решению задачи температурного деформирования сферы, материал которой в результате образования необратимых деформаций, упрочняется. Условие наступления пластического течения – условие Терска-Сен-Венана, в котором предел текучести зависит от температуры. Приводится сравнение картин напряжений, полученных в условиях упрочнения материала и без его упрочнения.

Ключевые слова: упрочнение, упругость, пластичность, условие Терска-Сен-Венана, сфера, температурные напряжения.

УДК: 539.374+539.224

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.009

Введение. В результате неравномерных температурных воздействий большинство металлов могут упрочняться. Это особенно заметно, когда воздействие оказывается циклическим, и обретенные на первом цикле необратимые деформации препятствуют дальнейшему росту напряжений на последующих циклах нагружения. Теория пластического течения широко изучена и распространена [1,2], но остается не учтенным влияние упрочнения на численное решение простой задачи теории температурных напряжений [3,4].

В этой работе рассмотрим самую простейшую задачу о нагреве сферы, изготовленной из упрочняющегося упругопластического материала. Подобные работы проводились ранее [5], но в них упрочнение материала отсутствовало. Gamer U. [6] удалось решить задачу в условиях постоянства предела текучести от температуры, но сравнений решений температурной задачи с упрочнением и без упрочнения проведено не было. Поэтому в данной работе сравним решения температурной задачи, в которой учитывались и не учитывались упрочняющие свойства металла.

Постановка задачи. В сферической системе координат r, φ, ϕ при комнатной температуре T_0 находится сфера, изготовленная из упругопластического материала

Поступила 10.02.2019

© Ткачева А. В., 2019

Ткачева Анастасия Валерьевна

e-mail: 4nansi4@mail.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск – на – Амуре, Россия.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ "Модели и методы теории термоупруго-пластичности в условиях неустановившейся температуры"17-01-00507 А

радиуса R , к поверхности ее подводится источник тепла такой, что температура на поверхности растет по закону

$$T|_{r=R} = T_* (1 - e^{-at}), \quad (1)$$

где T_* – заданная температура, a – температуропроводность, t – время. В центре сферы тепловой поток отсутствует

$$T_{,r} = 0, \quad (2)$$

где запятая обозначает производную по соответствующей координате, стоящей после запятой.

Температура по всему материалу сферы распространяется по закону

$$T_{,t} = ar^{-2} (r^2 T_{,r})_{,r} \quad (3)$$

Полагая, что задача о распространении температуры (1), (2), (3) решена, перейдем к механической задаче.

Считаем, что деформации $d_{ij}i, j = (r, \varphi, z)$ в материале малыми и состоящими из обратимой e_{ij}^e и необратимой e_{ij}^p составляющих

$$\begin{aligned} d_r &= e_r^e + e_r^p, & d_\varphi &= e_\varphi^e + e_\varphi^p, & d_\phi &= e_\phi^e + e_\phi^p, \\ d_r &= u_{,r}, & d_\varphi &= d_\phi = u_r r^{-1}, \end{aligned}$$

где u_r – перемещения.

Предположим, что в начальный момент времени необратимых деформаций в материале сферы нет, а обратимые деформации связаны с напряжениями и температурой законом Дюамеля – Неймана.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= w u_{,r} + 2\lambda r^{-1} u_r - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= (w + \lambda) r^{-1} u_r + \lambda u_{,r} - K\theta, \\ \sigma_\theta &= \sigma_\varphi, \quad w = \lambda + 2\mu, \end{aligned} \quad (4)$$

где σ – напряжения, λ и μ – параметры Ламе, K – модуль всестороннего сжатия, $\theta = \alpha(T - T_0)$, α – коэффициент теплового расширения.

Подставляя (4) в единственное нетривиальное уравнение равновесия, записанное в сферических координатах

$$\sigma_{r,r} + 2r^{-1} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (5)$$

получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$u_{r,rr} + 2(u_r)_{,r} = Kw^{-1}\theta_{,r} \quad (6)$$

Из (6) находим перемещения

$$\begin{aligned} u_r &= w^{-1}K\Theta(-2, 0, r) + rC_1^{(1)} + r^{-1}C_2^{(1)}, \\ \Theta(d, l, r) &= r^d \int_l^r \rho^{-d} \theta(\rho, t) d\rho, \end{aligned} \quad (7)$$

где $C_1^{(1)}$ и $C_2^{(1)}$ – коэффициенты интегрирования (функции времени), определяются из граничных условий

$$u_r|_{r=0} = 0, \quad \sigma_r|_{r=R} = 0 \quad (8)$$

В (4) подставим (7) получим напряжения, действующие до момента пластического течения

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -4K(rw)^{-1}\Theta(-2, 0, r) + 3KC_1^{(1)}(t), \\ \sigma_\varphi &= 2K\mu(rw)^{-1}\Theta(-2, 0, r) - 2K\mu w^{-1}\theta(r, t) + 3KC_1^{(1)}(t).\end{aligned}\quad (9)$$

Пластическое течение. Рост напряжений в упругопластическом материале не бесконечен и ограничен поверхностью нагружения, при достижении которой наступит пластическое течение и образуются растущие необратимые деформации. В качестве поверхности нагружения примем призму Треска, записанную в виде:

$$(\sigma_r - \eta_0 e_r^p) - (\sigma_\varphi - \eta_0 e_\varphi^p) = 2k, \sigma_\phi = \sigma_\varphi \quad (10)$$

где η_0 – коэффициент упрочнения материала.

В самом начале наступления пластического течения условие Треска $\sigma_r - \sigma_\varphi = 2k$ начинает выполняться на свободной поверхности $r = R$. Здесь зарождается продвигающаяся упругопластическая граница $m(t)$, которая разделит материал на две области. В области $0 \leq r \leq m(t)$ материал упруго деформируется и напряжения находятся по соотношениям (7) и (9).

Используя следствие из ассоциированного закона пластического течения $e_\varphi^p = e_\phi^p$ и условия пластической несжимаемости $e_r^p + e_\varphi^p + e_\phi^p = 0$, запишем

$$e_\varphi^p = -0.5e_r^p \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10) получим

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = 2k(1 + \eta e_r^p), \eta = \eta_0/k. \quad (12)$$

Запишем закон Дюамеля-Неймана для области пластического течения

$$\begin{aligned}\sigma_r &= w(u_{r,r} - e_r^p) + 2\lambda(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= (w + \lambda)(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) + \lambda(u_{r,r} - e_r^p) - K\theta.\end{aligned}\quad (13)$$

Уравнение равновесия (5) с учетом (13) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_r}{r}\right) = \frac{K}{w}\frac{\partial \theta}{\partial r} - 2\frac{\mu}{w}\left(\frac{\partial e_r^p}{\partial r} + 3\frac{e_r^p}{r}\right) \quad (14)$$

Интегрируя (14), находим соотношения для перемещений. Из (12) непосредственно определяем необратимую деформацию e_r^p .

$$\begin{aligned}u_r &= rC_1^{(2)} + C_2^{(2)}\left(2\mu r w^{-1}\int_{m_1}^r \rho^{-1}f_2(\rho)d\rho + r^{-2}\right) + \\ &+ w^{-1}\left(K\Theta(-2, m_1, r) + 2\mu r\int_{m_1}^r \rho^{-1}f_2(\rho)d\rho\right), \\ \sigma_r &= 3KrC_1^{(2)} + (6K\mu w^{-1}f_1(r) - 4\mu r^{-3})C_2^{(2)} \\ &+ 2K\mu w^{-1}\left(-2r^{-1}\Theta(-2, m_1, r) + 3\int_{m_1}^r \rho^{-1}f_2(\rho)d\rho\right), \\ e_r^p &= C_2^{(2)}f_1(r) + f_2(r), \\ f_1(r) &= -6\mu r^{-3}(2\eta k + 3K\mu w^{-1}), \\ f_1(r) &= (2\eta k + 3K\mu w^{-1})(2K\mu w^{-1}(\theta - 3r^{-1}\Theta(-2, m_1, r)) - 2k)\end{aligned}\quad (15)$$

Распределения напряжений в материале сферы с учетом упрочнения и без учета упрочнения изображены на рис. 1.

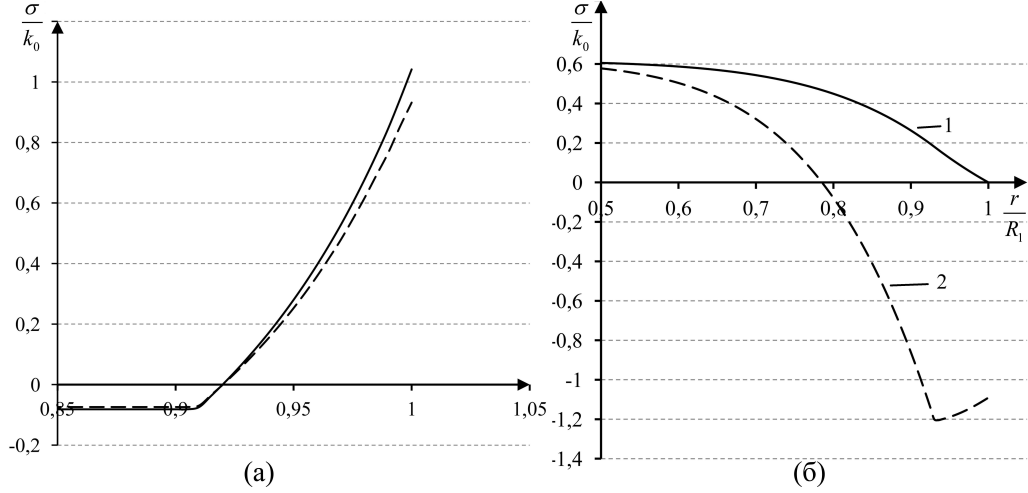


Рис. 1. Распределения напряжений в материале сферы до начала разгрузки а) с упрочнением, б) без упрочнения, прямая линия σ_r , штриховая – σ_φ .

Разгрузка. При отводе источника тепла на поверхности сферы пластическая деформация перестает расти, что означает начало разгрузки. Образуется разгружающая упругопластическая граница $n(t)$. В области разгрузки $n(t) \leq r \leq R$ необратимые деформации e_r^p, e_φ^p перейдут в остаточные p_r, p_φ , а закон Дюамеля-Неймана примет вид

$$\begin{aligned}\sigma_r &= w(u_{r,r} - p_r) + 2\lambda(r^{-1}u_r - p_\varphi) - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= (w + \lambda)(r^{-1}u_r - p_\varphi) + \lambda(u_{r,r} - p_r) - K\theta.\end{aligned}$$

Уравнения равновесия так же переписется

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_r}{r}\right) = \frac{K}{w}\frac{\partial \theta}{\partial r} - 2\frac{\mu}{w}\left(\frac{\partial p_r}{\partial r} + 3\frac{p_r}{r}\right) \quad (16)$$

Интегрируя (16), находим напряжения и перемещения в области разгрузки.

$$\begin{aligned}u_r &= K(w)^{-1}\Theta(-2, n, r) - 2\mu w^{-1}\Psi(1, m, r) + C_1^{(3)}r^3 + r^{-2}C_2^{(3)}, \\ \sigma_r &= -4\mu K(wr)^{-1}\Theta(-2, n, r) + 2\mu K(rw)^{-1}\Psi(1, m, r) + C_1^{(3)}K - 4\mu r^{-3}C_2^{(3)}, \\ \sigma_\varphi &= 2\mu K(wr^3)^{-1}\Theta(-2, n, r) - 2\mu K\theta w^{-1} + 6\mu K(rw)^{-1}\Psi(1, m, r) + \\ &\quad + \mu(2\mu - \lambda)w^{-1}p_r + KC_1^{(3)} + 2\mu r^{-3}C_2^{(3)} \\ \Psi(1, m, r) &= r \int_m^r \rho^{-1}p_r(\rho) d\rho.\end{aligned} \quad (17)$$

Начиная с момента образования границы $n(t)$, материал сферы условно поделен на три области $0 \leq r \leq m(t)$, $m(t) \leq r \leq n(t)$ и $n(t) \leq r \leq R$, где напряжения и перемещения находятся из соотношений (7), (9), (15), (17). В этих соотношениях существуют коэффициенты интегрирования $C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2, C_1^3, C_2^3$, которые находятся из граничных условий, моделирующих непрерывность радиального напряжения и перемещения на упругопластических границах $n(t), B(t)$ и условий (8).

Повторное пластическое течение. При достаточно большой температуре нагрева и полной разгрузке возможно повторное пластическое течение. Это связано с

выполнением на свободной поверхности сферы $r = R$ условия $\sigma_r - \sigma_\varphi = 2k$, что приводит к образованию новой упругопластической границы $n_2(t)$. Соотношения для напряжений определяются по ранее описанному принципу, только следует учесть, что перепишется закон Дюамеля-Неймана

$$\begin{aligned}\sigma_r &= w(u_{r,r} - e_r^p - p_r) + 2\lambda(r^{-1}u_r - e_\varphi^p - p_\varphi) - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= (w + \lambda)(r^{-1}u_r - e_\varphi^p - p_\varphi) + \lambda(u_{r,r} - e_r^p - p_r) - K\theta,\end{aligned}$$

и уравнение равновесия

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_r}{r}\right) = \frac{K}{w}\frac{\partial \theta}{\partial r} - 2\frac{\mu}{w}\left(\frac{\partial e_r^p}{\partial r} + 3\frac{e_r^p}{r}\right) - 2\frac{\mu}{w}\left(\frac{\partial p_r}{\partial r} + 3\frac{p_r}{r}\right).$$

Перемещения, напряжения и пластическая деформация в области повторного пластического течения $n_2(t) \leq r \leq R$ с учетом упрочнения материала вычисляются из соотношений.

$$\begin{aligned}e_r^p &= C_2^{(4)}f_3 + f_4, \\ u_r &= w^{-1}\left(K\Theta(-2, n_2, r) + 2\mu\left(\int_{n_2}^r \rho^{-1}f_4(\rho) d\rho + \Psi(1, n_2, r)\right)\right) + \\ &\quad + C_1^{(4)}r + C_2^{(4)}r^{-2}, \\ \sigma_r &= 2K\mu w^{-1}\left(-2r^{-1}\Theta(-2, n_2, r) + 3\left(\int_{n_2}^r \rho^{-1}f_4(\rho) d\rho + r^{-1}\Psi(1, n_2, r)\right)\right) + \\ &\quad + 3KrC_1^{(4)} + \mu(6Kw^{-1}f_3 - 4r^{-3})C_2^{(4)}, \\ f_3 &= -6\mu r^{-3}(-2\eta k + 3K\mu w^{-1})^{-1}, \\ f_4 &= (-2\eta k + 3K\mu w^{-1})^{-1}(K\mu w^{-1}(2\theta - 6r^{-1}\Theta(-2, n_2, r) - 3p_r) + 2k).\end{aligned}\tag{18}$$

С момента времени, обусловленного зарождением границы $n_2(t)$, материал сферы условно разделен на три области: две области упругого деформирования $0 \leq r \leq m$, $m \leq r \leq n_2(t)$ и область повторного пластического течения $n_2(t) \leq r \leq R$. Напряжения и перемещения определяются соотношениями (7), (9), (18), (17), в которых коэффициенты интегрирования $C_1^1, C_2^1, C_1^3, C_2^3, C_1^4, C_2^4$ находятся из граничных условий, моделирующих непрерывность радиальных напряжений и перемещений на границах m и $n_2(t)$ и условий (8).

Остаточные напряжения. В результате полного остывания материала сферы рост необратимых деформаций падает. К необратимым деформациям p_r прибавятся деформации, образованные на втором пластическом течении. Остаточные перемещения и напряжения находятся из соотношений (7) и (9) и (17), в которых температурные функции равны нулю. Коэффициенты интегрирования $C_1^1, C_2^1, C_1^3, C_2^3$, как и ранее, определяются из граничных условий. Результат решения задачи приведен на рис. 2 и рис. 3. Сравним решения задачи, полученные при учете упрочняющих свойств упругопластического материала и без его учета. Без повторного пластического течения остаточные напряжения мало различимы и на рисунке 2 это хорошо видно. В случае прохождения повторного пластического течения остаточные напряжения достаточно отличаются (рис. 3), причем во всем материале, а не в конкретной области. Остаточные напряжения меньше в расчетах с упрочнением, что подтверждается теорией упрочнения.

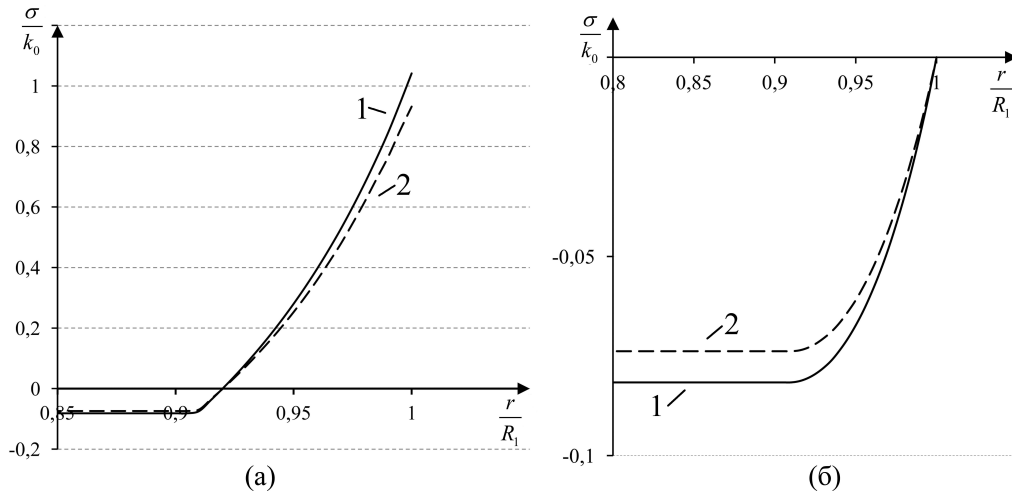


Рис. 2. Распределения остаточных напряжений в материале сферы, в котором повторного пластического течения не было а – σ_φ , б – σ_r ; (1– без упрочнения, 2 – с упрочнением упрочнения)

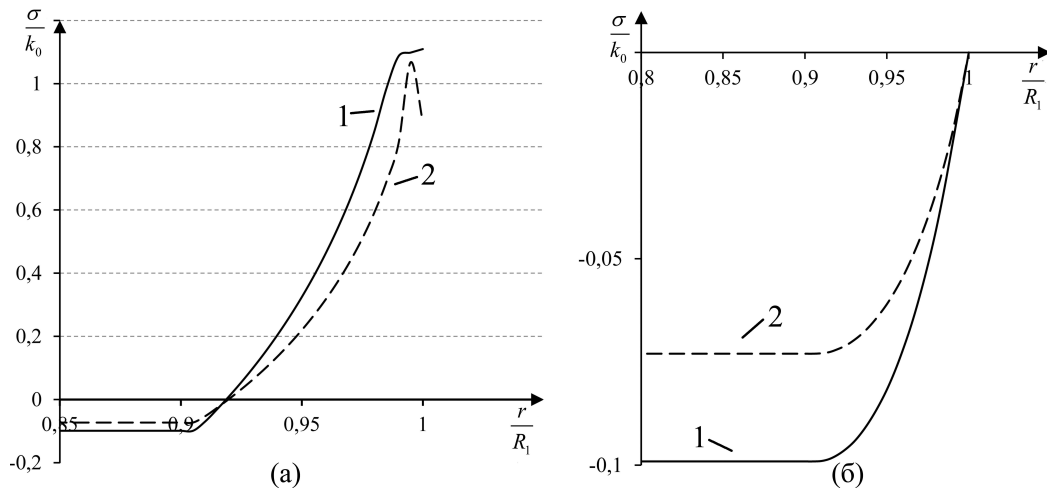


Рис. 3. Распределения остаточных напряжений в материале сферы а – σ_φ , б – σ_r ; (1– без упрочнения, 2 – с упрочнением упрочнения)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М: Мир. Т.2. 1969. 864 с. [2] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с. [3] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматлит, 1963. 252 с.
 [4] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 512 с.

[5] Буренин А. А., Дац Е. П., Мурашкин Е. В. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // Изв. РАН МТТ. 2014. P. 124–131.

[6] Gamer U. Elastic-Plastic deformation of centrally heated disk // Journal of Thermal Stresses. Copyright 1985 P. 41–51.

A. V. Tkacheva

TEMPERATURE STRESSES IN A SPHERE MADE OF A HARDENING MATERIAL

Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS

Abstract. The work is devoted to solving the problem of temperature deformation of a sphere, the material of which is strengthened as a result of the formation of irreversible deformations. The condition for the onset of plastic flow is the Tersk-Saint-Venant condition, in which the yield strength depends on temperature. A comparison of stress patterns obtained in the condition of material hardening and without hardening it is given.

Keywords: hardening, elasticity, plasticity, Tersk-Saint-Venant condition, sphere, thermal stresses.

REFERENCES

- [1] Nadai A. Plasticity and destruction are observed bodies. M: Peace. V.2. 1969. 864 p. [2] Rabotnov Yu. N. Mechanics of a deformable solid. Moscow: Science, 1979. 744 p. [3] Parkus G. Unsteady thermal stresses. Moscow: Fizmatlit, 1963. 252 p. [4] Boli B. , Weiner J. Theory of thermal stresses. Moscow: Mir, 1964. 512 p. [5] Burenin A. A. , Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of polar residual stresses under local thermal conditions // Izv. RAS MTT. 2014. P. 124–131. [6] Gamer U. Elastic-Plastic deformation of centrally heated disk // Journal of Thermal Stresses. Copyright 1985 P. 41–51.

Tkacheva Anastasia

e-mail: 4nansi4@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Research Assistant, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia.