

А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ, ДЕФОРМАЦИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток, Россия

Аннотация. Изучается деформирование вращающегося диска с изменяющейся скоростью в условиях ползучести. В рамках теории течения получены дифференциальные уравнения, позволяющие рассчитать поля напряжений, деформаций, перемещений и скоростей. Для решения данных уравнений использован конечно-разностный метод. В качестве потенциала ползучести используется потенциал Мизеса.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, вращающийся диск, теория течения

УДК: 539.374

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.011

Вращающиеся диски являются важнейшими деталями многих машин и устройств, которые применяются в машиностроении, авиастроении, турбиностроении. Поэтому расчеты вращающихся дисков на прочность проводятся неоднократно и являются предметом многих публикаций, данной проблеме посвящено множество статей [1-9] и монографий [11-14]. В большинстве случаев диски работают в условиях, приводящих к накоплению необратимых деформаций, в том числе и деформаций ползучести. Наиболее распространенным методом учета деформаций пластичности и ползучести является использование деформационных теорий и итерационных процессов последовательных приближений упругих задач [9, 13, 14]. Однако это не позволяет исследовать напряженное состояние вращающихся дисков, работающих при изменяющихся

© Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., 2019

Бегун Александра Сергеевна

e-mail: asustinova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Ковтанюк Лариса Валентиновна

e-mail: lk@iasp.dvo.ru, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00038-А „Учет теплофизических и реологических эффектов при интенсивном формоизменении материалов и упругом последствии“).

Поступила 10.01.2019

режимах эксплуатации. В работе [1] выполнен расчет вращающегося диска с использованием степенного закона ползучести и соответствующего закона течения для различных потенциалов ползучести. Ползучесть вращающихся дисков из функционально-градиентных материалов исследуется в работах [4-6]. Расчеты в указанных работах проводятся при фиксированной скорости вращения диска.

В настоящей работе изучается напряженно-деформированное состояние вращающегося диска в условиях ползучести при изменяющейся скорости вращения.

Модельные соотношения. Решение задачи будем искать в рамках малых деформаций. Когда в среде есть необратимые деформации, компоненты полных деформаций d_{ij} определяются как суммы обратимых e_{ij} и необратимых (в данном случае деформаций ползучести) p_{ij} составляющих

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (1)$$

где u_i — компоненты вектора перемещений, x_j — координаты точки среды.

Напряжения в среде определяются обратимыми деформациями и связаны с ними законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (2)$$

В соотношениях (2) λ, μ — коэффициенты Ламе.

Диссипативный механизм деформирования связан с накоплением необратимых деформаций. Для конкретизации этого механизма воспользуемся теорией течения. Скорость необратимых деформаций ε_{ij}^v определим в виде

$$\varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}, \quad V(\sigma_{ij}) = B \Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (3)$$

Здесь $V(\sigma_{ij})$ — потенциал ползучести, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений, B и n являются параметрами ползучести. Σ зададим следующим образом

$$\Sigma = \sqrt{3/2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2}, \quad (4)$$

где $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$.

Постановка задачи. Деформирование до начала пластического течения. Рассмотрим кольцевой диск с внутренним радиусом $r = r_0$ и внешним радиусом $r = R$, который вращается с угловой скоростью $\omega(t)$ (Рис. 1). Считаем, что реализуется плоское напряженное состояние, в случае осевой симметрии отличными от нуля остаются компоненты напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$ и $\sigma_{r\varphi}$. Для диска со свободными внешней и внутренней поверхностью граничные условия запишутся в виде:

$$\sigma_{rr}|_{r=r_0} = \sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0. \quad (5)$$

для диска с жестким включением

$$u_r|_{r=r_0} = 0, \quad \sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0. \quad (6)$$

В начальный момент времени считаем, что напряжения и деформации в материале отсутствуют.

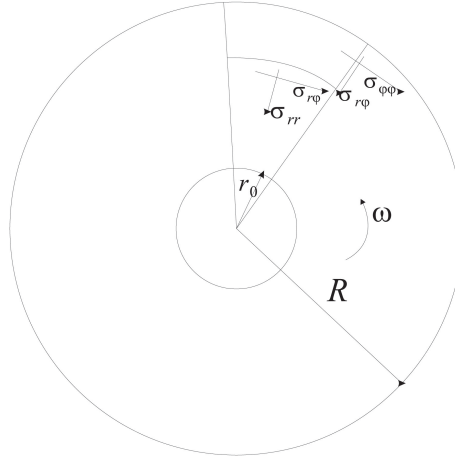


Рис. 1. Вращающийся диск

Отличными от нуля компонентами полных деформаций остаются следующие:

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad d_{r\varphi} = e_{r\varphi} + p_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad (7)$$

$$d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}.$$

Напряжения связаны с обратимыми деформациями законом Гука (2), для отличных от нуля компонент получим

$$\sigma_{rr} = \frac{2\lambda\mu(e_{rr} + e_{\varphi\varphi})}{\lambda + 2\mu} + 2\mu e_{rr}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2\lambda\mu(e_{rr} + e_{\varphi\varphi})}{\lambda + 2\mu} + 2\mu e_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}. \quad (8)$$

Компоненты тензора скоростей обратимых деформаций определяются по формулам

$$\varepsilon_{rr}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{rr} - \lambda\dot{\sigma}_{\varphi\varphi}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{\varphi\varphi} - \lambda\dot{\sigma}_{rr}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^e = \frac{\dot{\sigma}_{r\varphi}}{2\mu}. \quad (9)$$

Здесь и далее $(\dot{})$ обозначена производная по времени.

Для определения скоростей необратимых деформаций воспользуемся законом ползучести (3). В случае выбора Σ в виде (4) имеем

$$\varepsilon_{rr}^\nu = \frac{1}{2} B n (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^\nu = \frac{1}{2} B n (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) Q^{\frac{n}{2}-1},$$

$$\varepsilon_{zz}^\nu = -\frac{1}{2} B n (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^\nu = \frac{3}{2} B n \sigma_{r\varphi} Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad (10)$$

$$Q = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2.$$

При вращении диска с изменяющейся скоростью на каждую точку диска помимо центробежного ускорения $r\omega^2$ будет действовать вращательное ускорение $r\frac{d\omega}{dt}$. Тогда на диск будут действовать две системы инерционных сил, связанные с наличием центробежного и вращательного ускорений. Следовательно, уравнения

равновесия в рассматриваемом случае запишутся в виде

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho r \omega^2, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = \rho r \frac{d\omega}{dt}. \quad (11)$$

Интегрируя второе уравнение (11) при граничном условии (5) найдем

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{\rho}{4} \frac{d\omega}{dt} \left(r^2 - \frac{R^4}{r^2} \right). \quad (12)$$

Используя зависимости для деформаций (7), найдем

$$r \frac{\partial d_{\varphi\varphi}}{\partial r} + d_{\varphi\varphi} - d_{rr} = 0. \quad (13)$$

Для скоростей деформаций в этом случае следует соотношение

$$r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^e}{\partial r} + r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^p}{\partial r} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \varepsilon_{rr}^e - \varepsilon_{rr}^p = 0. \quad (14)$$

Введение функции напряжений $\varphi(r, t)$ в виде

$$\sigma_{rr} = \frac{\varphi}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \rho \omega^2 r^2. \quad (15)$$

позволяет удовлетворить первому уравнению равновесия.

Подставляя последние зависимости, соотношения для скоростей обратимых и необратимых деформаций (9) и (10) соответственно в уравнение (14), получим дифференциальное уравнение для определения функции напряжений $\varphi(r, t)$

$$\begin{aligned} & \frac{r^3(7\lambda + 6\mu)\rho\omega^2 + 2(\lambda + \mu) \left(r \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + r \frac{\partial^3 \varphi}{\partial^2 r \partial t} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}{2r\mu(3\lambda + 2\mu)} + \\ & + \frac{Bn \left(7r^2\rho\omega^2 - \frac{2\varphi}{r} + 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) \right)}{2} \left[Q(\varphi(r, t), r, t) \right]^{\frac{n}{2}-1} + \\ & + r \frac{Bn}{2} \left(2 \left(r^2\rho\omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{\varphi}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(Q(\varphi(r, t), r, t) \right)^{\frac{n}{2}-1} \right], \\ Q(\varphi(r, t), r, t) & = \frac{\varphi^2}{r^2} - \frac{\varphi}{r} \left(r^2\rho\omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \left(r^2\rho\omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + 3 \left(\frac{\rho}{4} \frac{\partial \omega}{\partial t} \left(r^2 - \frac{R^2}{r^2} \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Данное уравнение может быть проинтегрировано численно с использованием конечно-разностной схемы при граничных и начальных условиях для диска со свободными внешней и внутренней поверхностью:

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad \varphi(r_0, t) = 0, \quad \varphi(R, t) = 0; \quad (17)$$

для диска с жестким включением:

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad \varphi(R, t) = 0, \quad (18)$$

на внутренней поверхности $r = r_0$

$$\begin{aligned} & 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \Big|_{r=r_0} + 2\rho r_0^2 \omega(t) \omega'(t) \right) - \frac{\lambda}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{r=r_0} + \\ & + \mu(3\lambda + 2\mu) Bn \left(2 \left(r_0^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right) - \frac{\varphi(r_0)}{r_0} \right) \left[Q(\varphi(r_0, t), r_0, t) \right]^{\frac{n}{2}-1} = 0. \end{aligned}$$

По найденной функции $\varphi(r, t)$ находятся напряжения $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$, обратимые $e_{rr}, e_{\varphi\varphi}$ и необратимые $p_{rr}, p_{\varphi\varphi}$ деформации. Компонента перемещений u_r находится из известных деформаций: $u_r = r(e_{rr} + p_{rr})$. Для определения компоненты перемещений u_φ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = 2(e_{r\varphi} + p_{r\varphi}), \quad e_{r\varphi} = \frac{\rho}{8\mu} \frac{d\omega}{dt} \left(r^2 - \frac{R^4}{r^2} \right), \quad p_{r\varphi} = \int_0^t \varepsilon_{r\varphi}^p dt$$

при граничном условии

$$u_\varphi \Big|_{r=r_0} = r_0 \sin \theta(t), \quad \theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt.$$

Изменение угловой скорости зададим в виде: в промежутке времени $0 \leq t \leq t_1$ возрастает, затем при $t_1 \leq t \leq t_2$ поддерживается постоянной, и далее уменьшается до нуля $t_2 \leq t \leq t_3$. Для примера, выберем линейные законы возрастания и уменьшения угловой скорости

$$\omega(t) = \begin{cases} \alpha t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \alpha t_1, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ \alpha t_1 - \beta(t - t_2), & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases} \quad (19)$$

Расчеты проводились в безразмерных переменных

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad \tau = t\sqrt{\alpha}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu}, \quad \tilde{u}_i = \frac{u_i}{R}$$

при значении постоянных

$$\lambda = 79.61 \text{ ГПа}, \quad \mu = 119.42 \text{ ГПа}, \quad B = 3.5 \cdot 10^{-25} c^{-1} \text{ Па}^{n-1}, \quad n = 3, \quad \rho = 8000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$\frac{r_0}{R} = 0.2, \quad \alpha = 400 c^{-2}, \quad \beta = 200 c^{-2}.$$

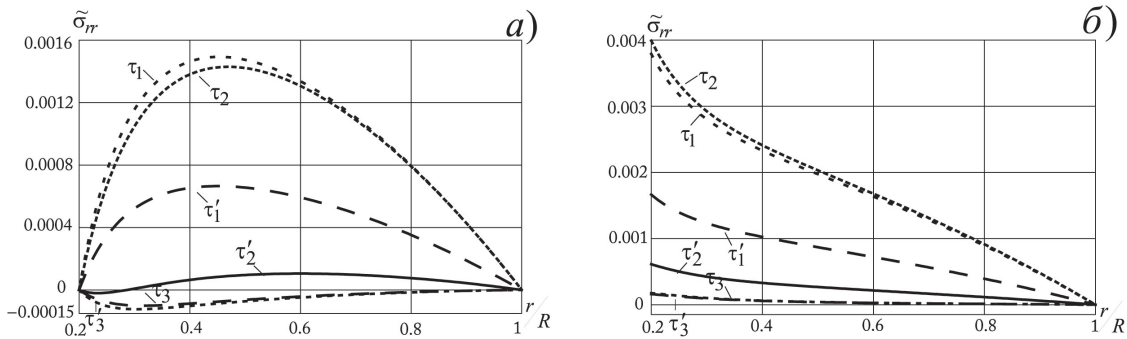


Рис. 2. Распределение напряжений σ_{rr} в зависимости от радиуса

На рис.2-4 показано распределение напряжений в зависимости от радиуса в различные моменты времени ($0 < t'_1 < t_1$, t_1 , t_2 , $t_2 < t'_2 < t_3$, t_3 , $t'_3 > t_3$), на рис.5 — распределение перемещения u_r . Изменение необратимых деформаций с течением

времени приведено на рис.6 и рис.7. На всех рисунках а) — диск со свободными поверхностями, б) — диск с включением.

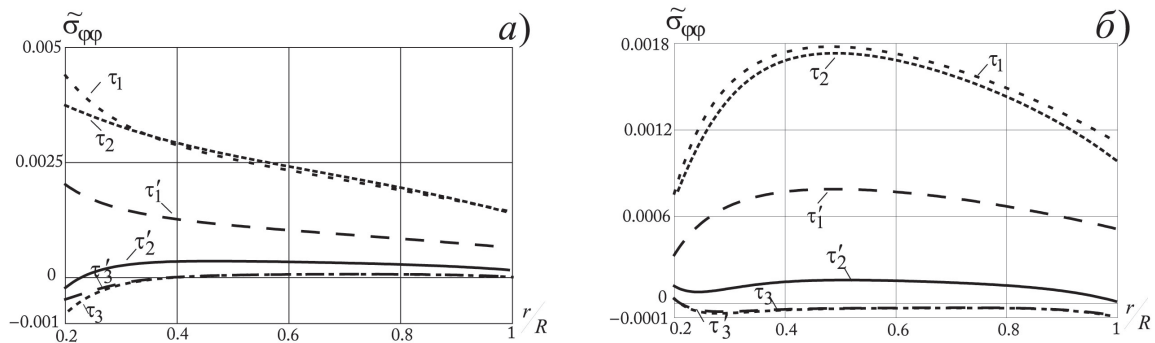


Рис. 3. Распределение напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ в зависимости от радиуса

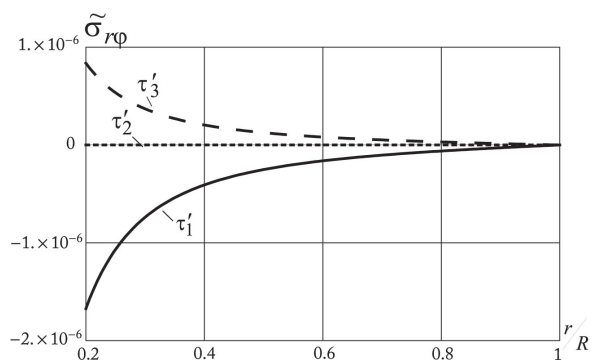


Рис. 4. Распределение напряжений $\sigma_{r\varphi}$ в зависимости от радиуса

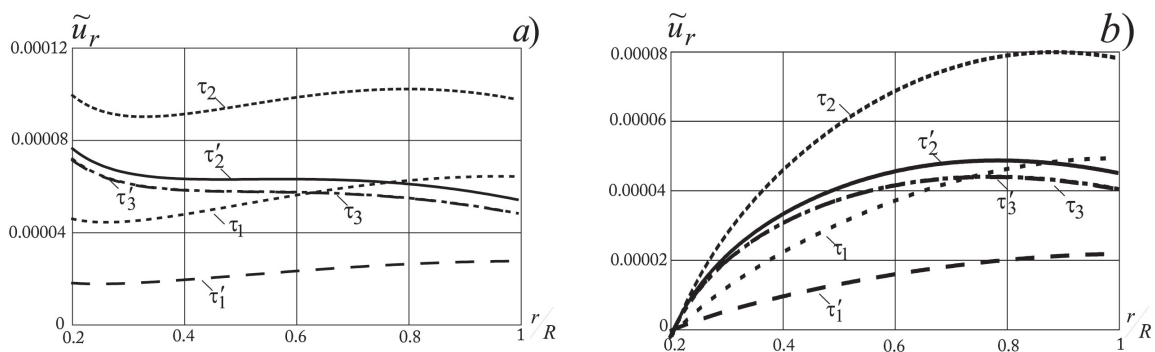
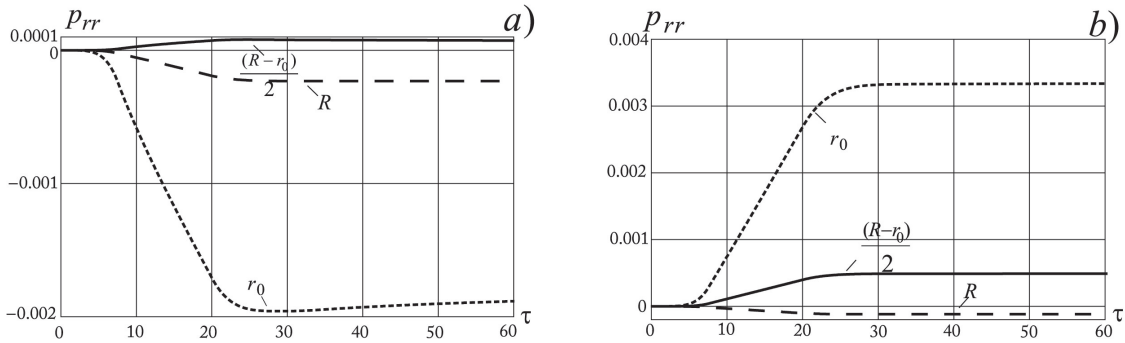
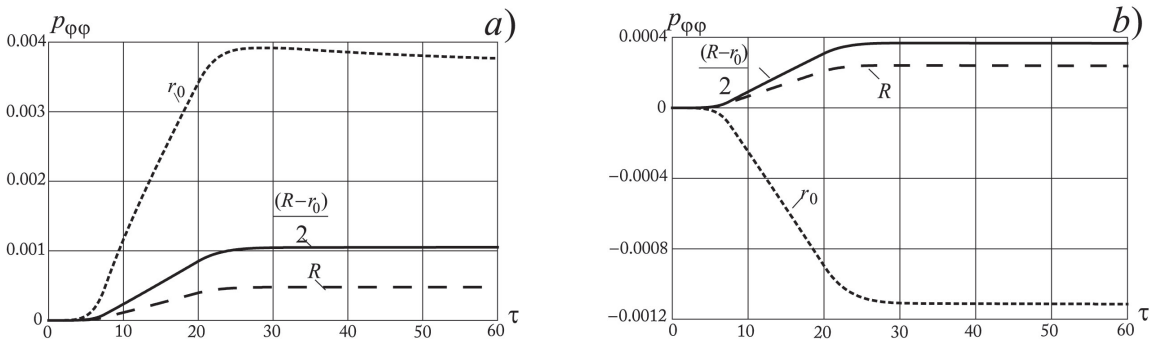


Рис. 5. Распределение перемещений u_r

Рис. 6. Изменение необратимых деформаций p_{rr} с течением времениРис. 7. Изменение необратимых деформаций $p_{\varphi\varphi}$ с течением времени

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wahl A. M. A Comparison of Flow Criteria Applied to Elevated Temperature Creep of Rotating Disks with Consideration of the Transient Condition / In: Hoff N.J. (eds) Creep in Structures. IUTAM Symposia (International Union of Theoretical and Applied Mechanics). Springer, Berlin, Heidelberg. 1962. P. 195–214.
- [2] Gupta S. K., Pankaj T. Creep transition in a thin rotating disc with rigid inclusion / Defence Science Journal. 2007. 57(2). P. 185–195.
- [3] Gupta S. K., Sonia T. P. Creep Transition in a thin Rotating Disc of variable density / Defence Sci. Journal. 2000. Vol. 50. P. 147–153.
- [4] Tania Bose, Minto Rattan Modeling Creep Behavior of Thermally Graded Rotating Disc / Differential Equations and Dynamical Systems. 2017. P. 1–14.
- [5] Gupta V. K., Singh S. B., Chandrawat H. N., Ray S. Creep behavior of a rotating functionally graded composite disc operating under thermal gradient / Metallurg. Mater. Trans. 2004. 35A. P. 1381–1391.
- [6] Rattan M., Chamoli N., Singh S. B. Creep analysis of an isotropic functionally graded rotating disc / Int. J. Contemp. Math. Sci. 2010. 5(9). P. 419–431.
- [7] Rattan M., Singh S. B., Ray S. Effect of stress exponent on steady state creep in an isotropic rotating disc / Bull. Calcutta Math. Soc. 2009. 101(6). P.559–570.

- [8] Nyashin Y., Shishlyaev V. Analytic Creep Durability of Rotating Uniform Disks / International Journal of Rotating Machinery. 1998. Vol. 4. No. 4. P. 249–256.
- [9] Bayat M., Sahari B. B., Saleem M., Aidy Ali, Wong S. V. Bending analysis of a functionally graded rotating disk based on the first order shear deformation theory // Applied Mathematical Modeling. 2009. 33. P. 4215–4230
- [10] Немировский Ю. В., Янковский А. П. Оценка предельной скорости вращения искривленных металлокомпозитных дисков в условиях ползучести // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. №2. С. 102–111
- [11] Костюк А. Г. Динамика и прочность турбомашин. М.: Издательский дом МЭИ, 2007. 476 с.
- [12] Левин А. В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин. М.: Госэнергоиздат, 1963. 624 с.
- [13] Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
- [14] Демьянушко И. В., Биргер И. А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.

A. S. Begun, L. V. Kovtanuk

CALCULATION OF STRESSES, STRAINS AND DISPLACEMENTS IN A ROTATING DISK UNDER CREEP CONDITIONS

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Abstract. Deforming of a rotating disk with a changing velocity under creep are studied. In the context of the flow theory, differential equations are obtained to calculate the fields of stresses, strains, displacements and velocities. To solve these equations, a finite difference method was used. The Mises potential is used as the creep potential.

Keywords: elasticity, creep, rotating disk, flow theory

REFERENCES

- [1] Wahl A. M. A Comparison of Flow Criteria Applied to Elevated Temperature Creep of Rotating Disks with Consideration of the Transient Condition / In: Hoff N.J. (eds) Creep in Structures. IUTAM Symposia (International Union of Theoretical and Applied Mechanics). Springer, Berlin, Heidelberg. 1962. P.195–214.
- [2] Gupta S. K., Pankaj T. Creep transition in a thin rotating disc with rigid inclusion / Defence Science Journal. 2007. 57(2). P. 185-195.
- [3] Gupta S. K., Sonia T. P. Creep Transition in a thin Rotating Disc of variable density / Defence Sci. Journal. 2000. Vol. 50. P.147–153.
- [4] Tania Bose, Minto Rattan Modeling Creep Behavior of Thermally Graded Rotating / Differential Equations and Dynamical Systems. 2017. P. 1–14.
- [5] Gupta V. K., Singh S. B., Chandrawat H. N., Ray S. Creep behavior of a rotating functionally graded composite disc operating under thermal gradient / Metallurg. Mater. Trans. 2004. 35A. P. 1381–1391.
- [6] Rattan M., Chamoli N., Singh S. B. Creep analysis of an isotropic functionally graded rotating disc / Int. J. Contemp. Math. Sci. 2010. 5(9). P. 419–431.
- [7] Rattan M., Singh S. B., Ray S. Effect of stress exponent on steady state creep in an isotropic rotating disc / Bull. Calcutta Math. Soc. 2009. 101(6). P. 559–570.
- [8] Nyashin Y., Shishlyaev V. Analytic Creep Durability of Rotating Uniform Disks / International Journal of Rotating Machinery. 1998. Vol. 4. No. 4. P. 249–256.
- [9] Bayat M., Sahari B. B., Saleem M., Aidy Ali, Wong S. V. Bending analysis of a functionally graded rotating disk based on the first order shear deformation theory / Applied Mathematical Modeling. 2009. 33. P. 4215–4230

Begun Aleksandra Sergeevna

e-mail: asustinova@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Junior Researcher of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Kovtanuk Larisa Valentinovna

e-mail: lk@iacp.dvo.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

- [10] Nemirovskiy Yu. V., Yankovskii A. P. The estimation of the maximum rotation speed of deformed metal-composite disks in creep conditions / Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. №2. P. 102–111 (in Russian)
- [11] Kostyuk A. G. Dynamics and strength of turbomachines. M.: Publishing House MEI, 2007. 476 p. (in Russian)
- [12] Levin A. V. Working blades and wheels of steam turbines. M.: Gosenergoizdat, 1963. 624 p. (in Russian)
- [13] Malinin N. N. Applied theory of plasticity and creep. M.: Mashinostroenie, 1975. 400 p. (in Russian)
- [14] Demianushko I. V., Birger I. A. Calculation of the strength of rotating disks. M.: Mashinostroenie, 1978. 247 p. (in Russian)