Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 1 (39). С. 94–101

С. В. Матвеев, А. Н. Матвеева, С. В. Тихонов

РАВНОМЕРНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ, ПРИ УСЛОВИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТРЫВУ

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе рассматривается упругопластическое состояние многослойной тонкой пластины с эллиптическим отверстием. Пластина подвергается равномерному растяжению. Материал слоев пластины различен и имеет разные свойства анизотропии и сопротивления отрыву. В работе определено наряженное состояние пластины и найдена граница между упругой и пластической областями.

Ключевые слова: пластичность, упругость, линеаризация, напряжение, отрыв, анизотропия

УДК: 539.374

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.012

Рассмотрим многослойную бесконечную кольцевую пластину с эллиптическим отверстием. В качестве границ перехода между слоями материала примем окружности радиуса r_i (рис. 1), оси которых совпадают с осями эллипса. Материал всех слоев примем анизотропным, идеальнопластическим. Константу отрыва для i-го слоя пластины обозначим p_i. Пластина находится в состоянии равномерного растяжения.

Следуя идеям Хилла [1], учитывая [2] условие пластичности для материала i-го слоя пластины примем в виде

$$(A_i\sigma_x - p_i)(B_i\sigma_y - p_i) - C_i\tau_{xy}^2 = 0, \tag{1}$$

Матвеев Сергей Владимирович
e-mail: sergio2100@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.
Матвеева Алена Николаевна
e-mail: roshtova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.
Тихонов Сергей Владимирович
e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 15.01.2019

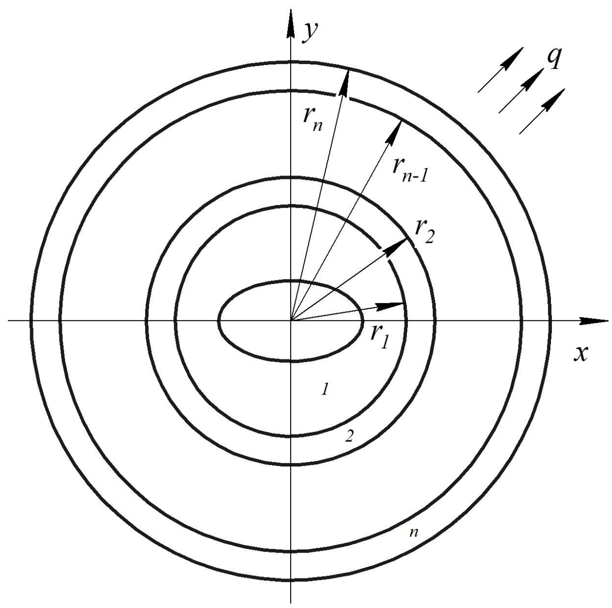

Рис. 1.

где A_i, B_i, C_i – константы определяющие анизотропию материала слоя i, p_i – константа сопротивления отрыву области i.

Запишем уравнение контура эллиптического отверстия

$$\frac{x^2}{a^2(1+\varepsilon)^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon)^2} = 1. \tag{2}$$

Перейдем к полярной системе координат, при этом уравнение эллипса примет вид

$$\begin{gathered}\rho = \frac{\alpha(1-\delta^2 d_1^2)}{\sqrt{1-2\delta d_1\cos 2\theta+\delta^2 d_1^2}} = \alpha\left[-1 + \delta d_1 \cos 2\theta - \tfrac{3}{4}\delta^2 d_1^2(1-\cos 4\theta) + \right.\\ \left. + \tfrac{5}{8}\delta^3 d_1^3(\cos 2\theta + \cos 6\theta)\right] + ...,\ \rho = \tfrac{1}{\rho_s^0},\ \alpha = \tfrac{a}{\rho_s^0}.\end{gathered} \tag{3}$$

Для записи выражения (1) в полярной системе координат $\rho\theta$ воспользуемся соотношениями (4).

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \tfrac{\sigma_\rho+\sigma_\theta}{2} + \tfrac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}\cos 2\theta + \tau_{\rho\theta}\sin 2\theta,\\ \sigma_y &= \tfrac{\sigma_\rho+\sigma_\theta}{2} - \tfrac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}\cos 2\theta - \tau_{\rho\theta}\sin 2\theta,\\ \tau_{xy} &= \tfrac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}\sin 2\theta + \tau_{\rho\theta}\cos 2\theta.\end{aligned} \tag{4}$$

Из (1) и (4) получим

$$\begin{gathered}A_iB_i\left(\sigma_\rho+\sigma_\theta\right)^2 - \left(\sigma_\rho-\sigma_\theta\right)^2\left(\tfrac{A_iB_i+C_i}{2} + \tfrac{A_iB_i-C_i}{2}\cos 4\theta\right) - \\ -2\tau_{\rho\theta}^2\left(A_iB_i + C_i + (C_i - A_iB_i)\cos 4\theta\right) - 2\tau_{\rho\theta}\left(\sigma_\rho-\sigma_\theta\right)\times \\ \times\left(A_iB_i - C_i\right)\sin 4\theta - 2\left(\sigma_\rho-\sigma_\theta\right)\left(A_i - B_i\right)p_i\cos 2\theta - \\ -4\tau_{\rho\theta}\left(A_i-B_i\right)p_i\sin 2\theta - 2\left(\sigma_\rho+\sigma_\theta\right)\left(A_i+B_i\right)p_i = -4p_i^2.\end{gathered} \tag{5}$$

Решение будем искать с помощью метода возмущения по малому параметру, для этого перейдем к безразмерным величинам. Все компоненты напряжения отнесем к пределу текучести k_0,величины определяющие геометрические размеры пластины отнесем некоторой линейной величине ρ_s^0.

$$A_i = 1 + \delta a_i,\ B_i = 1 + \delta b_i,\ C_i = 1 + \delta c_i,\ \ \alpha_i = \frac{r_i}{\rho_s^0}, \tag{6}$$

где a_i, b_i, c_i – константы анизотропии, r_i – радиусы границ слоев, δ – малый безразмерный параметр.

В исходном нулевом приближении при $\delta = 0$, $\ A_i = B_i = C_i = 1$ соотношение (5) имеет вид

$$\left(\sigma_{\rho i} - p_i\right)\left(\sigma_{\theta i} - p_i\right) - \tau_{\rho\theta i}^2 = 0,\ p_i = const. \tag{7}$$

Решение будем искать аналогично работам [3-8], пологая

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(I)} + \delta^2\sigma_{ij}^{(II)} + ... \ . \tag{8}$$

Примем

$$\tau_{\rho\theta i}^{(0)} = 0. \tag{9}$$

Припишем компонентам напряжения в пластической зоне индекс "p" наверху, а упругой – индекс "e" наверху.

В нулевом приближении из (5 – 9) получим

$$\sigma_{\theta i}^{(0)p} = p_i. \tag{10}$$

Уравнения равновесия запишем в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial\sigma_\rho^{(i)}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}^{(i)}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_\rho^{(i)} - \sigma_\theta^{(i)}}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial\tau_{\rho\theta}^{(i)}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta^{(i)}}{\partial\theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}^{(i)}}{\rho} = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

В исходном нулевом приближении выражения (11) с учетом (8 – 10), примут вид

$$\frac{d\sigma_{\rho i}^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho i}^{(0)} - \sigma_{\theta i}^{(0)}}{\rho} = 0. \tag{12}$$

Из соотношений (10), (12)определим компоненты напряжения $\sigma_\rho^{(0)p}$ для i-го слоя

$$\sigma_{\rho i}^{(0)p} = p_i - \frac{C_{1i}}{\rho}. \tag{13}$$

Учитывая, что контур отверстия свободен от усилий, $\sigma_{\rho 1} = 0$ при $\rho = \alpha_0$, определим константу C_1.

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = p_1\left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right). \tag{14}$$

Компоненты напряжения для первой области в пластической области в нулевом приближении имеют вид

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = p_1\left(1 - \frac{\alpha_0}{\rho}\right),\ \ \sigma_{\theta 1}^{(0)p} = p_1, \quad \tau_{\rho\theta 1}^{(0)p} = 0. \tag{15}$$

Условия сопряжения на границах областей в нулевом приближении имеет вид

$$\sigma_{\rho i-1}^{(0)p} = \sigma_{\rho i}^{(0)p}, \text{ при } \rho = \alpha_i - 1. \tag{16}$$

Из (9), (10), (14) получим компоненты напряжений для i-го слоя в нулевом приближении

$$\sigma_{\rho i}^{(0)p} = p_i \left(1 - \frac{\alpha_{i-1}}{\rho}\right) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{p_j(\alpha_j - \alpha_{j-1})}{\rho}. \tag{17}$$

Линеаризуя выражение (5) с учетом (6) (8), с учетом (9), (15), (17) имеем

$$\begin{gathered}\sigma'^{p}_{\theta i} = \tfrac{a_i+b_i-c_i}{8}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\tfrac{p_j(\alpha_j-\alpha_{j-1})}{\rho} - p_i\tfrac{\alpha_{i-1}}{\rho}\right)\cos 4\theta + \tfrac{1}{2}\left(a_i-b_i\right)p_i\cos 2\theta\\ -\tfrac{a_i+b_i-c_i}{8}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\tfrac{p_j(\alpha_j-\alpha_{j-1})}{\rho} - p_i\tfrac{\alpha_{i-1}}{\rho}\right) - \tfrac{1}{2}\left(a_i-b_i\right)p_i.\end{gathered} \tag{18}$$

Уравнениям равновесия (11) удовлетворим, полагая

$$\sigma'_{\rho n} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi'_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi'_i}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi'_i}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta n} = -\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi'_i}{\partial \theta}\right). \tag{19}$$

Подставляя в (18) выражения (19), получим

$$\frac{\partial^2 \Phi'_i}{\partial \rho^2} = \frac{a_i+b_i-c_i}{8\rho}\cos 4\theta + \frac{1}{2}(a_i-b_i)p_i\cos 2\theta\Omega - \frac{a_i+b_i-c_i}{8\rho}\Omega - \frac{1}{2}(a_i+b_i)p_i, \tag{20}$$

где $\Omega = \sum\limits_{j=1}^{i-1} p_j(\alpha_j - \alpha_{j-1}) - p_i\alpha_{i-1}$.

Решение уравнения (20) будет иметь вид

$$\begin{gathered}\Phi'_i = \tfrac{a_i+b_i-c_i}{8}\rho\left(\ln\rho - 1 + C_1\rho + C_2\right)\Omega\cos 4\theta+\\ +\left(\tfrac{1}{4}\left(a_i-b_i\right)p_i\rho^2 + C_3\rho + C_4\right)\cos 2\theta-\\ -\tfrac{a_i+b_i-c_i}{8}\Omega\rho\ln\rho + \left(\tfrac{a_i+b_i-c_i}{8}\Omega + C_5\right)\rho - \tfrac{1}{4}\left(a_i-b_i\right)p_i\rho^2 + C_6.\end{gathered} \tag{21}$$

Подставляя (21) в уравнения (11) определим выражения для компонент напряжения в пластической области для первого приближения

$$\begin{gathered}\sigma'_{\rho n} = \left[\tfrac{a_i+b_i-c_i}{8}\Omega\tfrac{16-15\ln\rho}{\rho} - \tfrac{15C_1}{\rho} - \tfrac{16C_2}{\rho^2}\right]\cos 4\theta-\\ -\left[\tfrac{1}{2}\left(a_i-b_i\right)p_i + \tfrac{3C_3}{\rho} + \tfrac{4C_4}{\rho^2}\right]\cos 2\theta-\\ -\tfrac{a_i+b_i-c_i}{8}\tfrac{\ln\rho}{\rho}\Omega - \tfrac{1}{2}\left(a_i+b_i\right)p_i + \tfrac{C_5}{\rho}\\ \tau'_{\rho\theta} = \left[\tfrac{a_i+b_i-c_i}{8}\Omega\tfrac{1}{\rho} - \tfrac{4C_2}{\rho^2}\right]\sin 4\theta + \left[\tfrac{1}{2}\left(a_i-b_i\right)p_i - \tfrac{2C_4}{\rho^2}\right]\sin 2\theta.\end{gathered} \tag{22}$$

Контур отверстия свободен от усилий, с учётом выражения (3) на нём будут справедливы соотношения

$$\sigma'^{p}_{\rho 1} = -p_1 d_1 \cos 2\theta, \quad \tau'^{p}_{\rho\theta 1} = -p_1 d_1 \sin 2\theta \quad \text{при} \quad \rho = \alpha_0. \tag{23}$$

Из (22), (23) определим константы для первого слоя

$$
\begin{gathered}
C_1=\tfrac{p_0\alpha\ln\alpha}{8}\left(a+b-c\right),\qquad C_2=-\tfrac{p_0\alpha^2}{8}\left(a+b-c\right),\\
C_3=-\tfrac{p_0\alpha}{2}\left(a-b\right)+\tfrac{p_0d_1}{3}\left(1-4\alpha\right),\qquad C_4=\tfrac{\alpha^2p_0}{4}\left(a-b\right)+\alpha^2p_0d_1.\\
C_5=\tfrac{p_0\alpha}{2}\left(a-b\right)-\tfrac{p_0\alpha\ln\alpha}{8}\left(a+b-c\right).
\end{gathered}
\tag{24}
$$

Выражения для компанент напряжения в пластической зоне для первого слоя в первом приближении согласно (22), (24) примут вид

$$
\begin{aligned}
&{\sigma'}^p_{\rho1}=\alpha_0p_1\left(a+b-c\right)\left[\tfrac{15\ln\rho}{8\rho}-\tfrac{16+15\ln\alpha_0}{8\rho}+\tfrac{2\alpha_0}{\rho^2}\right]\cos4\theta-\\
&\quad-\left[\tfrac{p_1(a-b)}{2}\left(1-\tfrac{3\alpha_0}{\rho}+\tfrac{2\alpha_0^2}{\rho^2}\right)+p_1d_1\left(\tfrac{1-4\alpha_0}{\rho}+\tfrac{4\alpha_0^2}{\rho^2}\right)\right]\cos2\theta+\\
&\quad+\tfrac{p_1\alpha_0\ln\alpha_0}{8\rho}c-p_1\left(a+b\right)\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{\alpha_0}{2\rho}\right]+\tfrac{\alpha_0p_1}{8\rho}\left(a+b-c\right)\ln\tfrac{\rho}{\alpha_0},\\
&{\sigma'}^p_{\theta1}=-\tfrac{\alpha_0p_1}{8\rho}\left(a+b-c\right)\cos4\theta+\tfrac{p_1(a-b)}{2}\cos2\theta--\tfrac{p_1(a+b)}{2}+\tfrac{\alpha_0p_1}{8\rho}\left(a+b-c\right),\\
&{\tau'}^p_{\rho\theta1}=-\tfrac{\alpha_0p_1}{2\rho}\left(a+b-c\right)\left(1-\alpha_0^2\right)\sin4\theta+\left[\tfrac{p_1(a-b)}{2}\times\left(1-\tfrac{\alpha_0^2}{\rho^2}\right)-\tfrac{2p_1d_1\alpha_0^2}{\rho^2}\right]\sin2\theta.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Условия сопряжения на границе областей имеет вид

$$
{\sigma'}^p_{\rho i}={\sigma'}^p_{\rho i-1}\quad {\tau'}^p_{\rho\theta i}={\tau'}^p_{\rho\theta i-1}\quad\text{при}\quad\rho=\alpha_{i-1}. \tag{26}
$$

Зная компоненты напряжения в первой области (25), из выражений (22) и условий сопряжения (26) можно определить значения коэффициентов $C_1^{(n)}\ C_2^{(n)}\ C_3^{(n)}\ C_4^{(n)}\ C_5^{(n)}$.

$$
\begin{aligned}
&C_1^{(i)}=-\tfrac{a_1+b_1-c_1}{15}\alpha_0p_1\left[16\left(2-\alpha_0^2\right)+\tfrac{15}{8}\ln\left(\alpha_0\alpha_1\right)+2\tfrac{\alpha_0}{\alpha_1}\right]-\\
&\quad-\sum_{i=2}^{n-1}\left(\tfrac{a_i+b_i-c_i}{8}\ln\left(\tfrac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right)\Omega\right)-\tfrac{a_i+b_i-c_i}{8}\Omega\ln\alpha_{i-1},\\
&C_2^{(i)}=\tfrac{p_1\alpha_0\alpha_1}{8}\left(a_1+b_1-c\right)\left(1-\alpha_0^2\right)+\sum_{i=2}^{n-1}\left(\tfrac{a_i+b_i-c_i}{8}\left(\alpha_{i-1}-\alpha_i\right)\Omega\right)+\tfrac{a_i+b_i-c_i}{8}\alpha_{i-1}\Omega,\\
&C_3^{(i)}=\tfrac{p_1d_1}{3}\left(1-4\alpha_0\right)+\left(a_1-b_1\right)p_1\alpha_1\left(1-\tfrac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)\left(2-\tfrac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)-\\
&\quad-\tfrac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1}\left(a_i-b_i\right)p_i\left(\alpha_{i-1}-\alpha_i\right)-\tfrac{a_i-b_i}{2}p_i\alpha_{i-1},\\
&C_4^{(i)}=-\tfrac{p_1(a_1-b_1)}{4}(\alpha_1^2-\alpha_0^2)+p_1d_1\alpha_0^2+\sum_{i=2}^{n-1}\left(\tfrac{(a_i-b_i)p_i}{4}(\alpha_{i-1}^2-\alpha_i^2)\right)+\tfrac{(a_i-b_i)p_i}{4}\alpha_{i-1}^2,\\
&C_5^{(i)}=\tfrac{p_1\alpha_0\ln\alpha_0}{8}c_1+\tfrac{\alpha_0p_1(a_1+b_1-c_1)}{8}\ln\left(\tfrac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)+\tfrac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1}\left(p_i\left(a_i+b_i\right)\left(\alpha_{i-1}-\alpha_i\right)\right)+\\
&\quad+\sum_{i=2}^{n-1}\left(\tfrac{(a_i+b_i+c_i)}{8}\ln\left(\tfrac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right)\Omega\right)+\tfrac{a_i+b_i+c_i}{8}\ln\alpha_{i-1}+\tfrac{1}{2}\left(a_i+b_i\right)p_i\alpha_{i-1}.
\end{aligned}
$$

Упругое решение в первом приближении можно определить согласно [8]. Ввиду громоздкости расчетов в данной работе это решение опустим.

Полученное решение соответствует результатам работ [9–11], при изменении количества слоев и формы отверстия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956, 408 с.

[2] Matveeva A. N., Matveev S. V., Tikhonov S. V., Mishin P. V., Alatirev S. S., Akimov A. P. On limit statically determinated detachment conditions for compressible anisotropic material// Journal of Physics: Conference Series 1. Сер. "1st International Conference on Physics, Mathematics and Statistics, ICPMS 2018"2018. 012037.

[3] Роштова А. Н. О плоском напряженном состоянии анизотропного идеальнопластического материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2007. Т.1. № 3. С. 19-22.

[4] Роштова А. Н. Об общих предельных условиях при отрыве для сжимаемых анизотропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 2. С. 131.

[5] Матвеев С. В. Матвеева А. Н., Тихонов С. В. Деформированное состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двуосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. №1(27). С. 105-114.

[6] Кержаев А. П. Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 71–81.

[7] Кузнецов П. Н. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями, при двуосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1 (6). С. 134-141.

[8] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела – М. : Наука, 1978. 208 с.

[9] Роштова А. Н. Растяжение упругопластической анизотропной тонкой пластины, ослабленной круговым отверстием // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2007. № 3(55). С. 22–27.

[10] Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Рыбакова Т. И. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4 (34). С. 59–65.

[11] Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Тихонов С. В. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины с круговым отверстием, подкрепленной включением, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4 (34). С. 95–103.

S. V. Matveev, A. N. Matveeva, S. V. Tikhonov

UNIFORM STRETCHING OF A THIN ANISOTROPIC PLATE WITH A CIRCULAR APERTURE BACKED UP BY INCLUSION, UNDER THE CONDITION OF RESISTANCE TO SEPARATION

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. The paper deals with the elastoplastic state of a multilayer thin plate with an elliptical hole. The plate is subjected to uniform stretching. Material The plate layers are different and have different anisotropy properties and resistance to tearing. In the work determined the dressed state of the plate and The boundary between the elastic and plastic regions is found.

Keywords: plasticity, elasticity, linearization, stress, separation, anisotropy

REFERENCES

[1] Hill R. Mathematical theory of plasticity. M .: Gostekhizdat, 1956, 408 p.

[2] Matveeva A. N., Matveev S. V., Tikhonov S. V., Mishin P. V., Alatirev S. S., Akimov A. P. On limit statically determinated detachment conditions for compressible anisotropic material // Journal of Physics: Conference Series 1. Ser. "1st International Conference on Physics, Mathematics and Statistics, ICPMS 2018"2018. 012037.

[3] Roshtova A. N. On the plane stress state of anisotropic idealoplastic material //Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2007. V. 1. Number 3. P. 19–22.

[4] Roshtova A. N. On general limiting conditions for separation for compressible anisotropic media // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2007. No. 2. P. 131.

[5] Matveev S.V. Matveeva A.N., Tikhonov S.V. Deformed state an anisotropic plane weakened by a hole, supported by the inclusion, bounded by an eccentric circle, with biaxial stretching // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2016. №1 (27). P. 105–114.

[6] Kerzhayev A. P. The elastoplastic state of a two-layer thick-walled pipe, under the influence of internal pressure during translational anisotropy // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2013. № 2 (16). P. 71–81.

Matveev Sergey Vladimirovich

`e-mail:` sergio2100@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary.

Matveeva Alena Nikolaevna

`e-mail:` roshtova@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary.

Tikhonov Sergey Vladimirovich

`e-mail:` strangcheb@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary.

[7] Kuznetsov P. N. The elastoplastic state of an inhomogeneous plane, weakened by a circular hole, supported by inclusions, limited eccentric circles, with biaxial stretching // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2009. № 1 (6). P. 134–141.

[8] Ivlev D. D., Ershov L. V. The perturbation method in the theory of an elastoplastic body - M.: Science, 1978. 208 p.

[9] Roshtova A. N. Stretching of an elastoplastic anisotropic thin plate weakened by a circular hole // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2007. № 3 (55). P. 22–27.

[10] Matveev S. V., Matveeva A. N., Rybakova T. I. Uniform stretching of a thin anisotropic plate, weakened by an elliptical hole, under the condition of resistance to separation // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2017. № 4 (34). P. 59–65.

[11] Matveev S. V., Matveeva A. N., Tikhonov S. V. Uniform stretching of a thin anisotropic plate with a circular hole, supported by the inclusion, provided resistance to tearing. Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2017. № 4 (34). P. 95–103.