Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 1 (39). С. 102–106

А. В. Никитин[1]

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СОСТАВНОЙ ПОЛОСЫ

[1] *Чебоксарский институт (ф) Московского Политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.*

Аннотация. В работе [2] рассмотрена краевая задача для полуполосы длинные стороны которой защемлены, т.е. перемещения равны нулю, а на торце заданы напряжения. Решение было построено в виде разложений по функциям Фадля–Папковича. В данной статье рассматривается бесконечная полоса, склеенная из полос с различными модулями упругости. Вдоль линии склеивания выполняются равенства напряжений и перемещений внешней и внутренних полос. Для решения задачи применяется метод начальных функций [1]. Несобственные интегралы, приведённые в конце статьи, являются формулами для определений напряжений и перемещений.

Ключевые слова: метод начальных функций, интегральное преобразование Фурье, составная полоса.

УДК: 539.3

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.013

Рассматривается бесконечная полоса (рис. 1) в случае симметричной деформации $\{\mathrm{P}\colon |y| \le 1, |x| < \infty\}$. С помощью индекса «$a$» обозначим параметры внутренней полосы $\{\mathrm{P}^a\colon |y| \le a, |x| < \infty\}$. Положим, что модули упругости полос различны: G^a и G. Полосы непрерывно склеены так, что вдоль линий склеивания $y = \pm a$ выполняются равенства

$$u^a(x) = u(x), \quad v^a(x) = v(x), \quad \sigma_y^a(x) = \sigma_y(x), \quad \tau_{xy}^a(x) = \tau_{xy}(x), \tag{1}$$

где u, v — соответственно продольное (вдоль полосы) и поперечное перемещения.

Перейдем к обозначениям, принятым в методе начальных функций [1]:

$$\begin{gathered} U(x,y) = Gu(x,y), \quad V(x,y) = Gv(x,y), \\ Y(x,y) = \sigma_y(x,y), \quad X(x,y) = \tau_{xy}(x,y), \\ U^a(x,y) = G^a u^a(x,y), \quad V^a(x,y) = G^a v^a(x,y), \\ Y^a(x,y) = \sigma_y^a(x,y), \quad X^a(x,y) = \tau_{xy}^a(x,y). \end{gathered} \tag{2}$$

Никитин Андрей Витальевич
`e-mail:` ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чебоксарский институт (ф) Московского Политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 15.01.2019

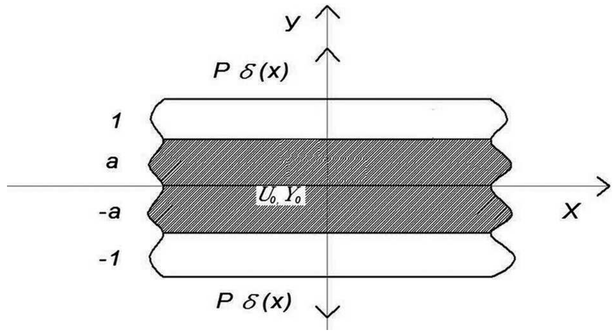

Рис. 1. Бесконечная составная полоса

Обозначим $K = G^a/G$ и запишем равенства (1) в виде

$$U^a(x) = KU(x), \quad V^a(x) = KV(x), \quad Y^a(x) = Y(x), \quad X^a(x) = X(x). \tag{3}$$

Положим, что граничные условия на сторонах $y = \pm 1$ имеют вид

$$Y(x, \pm 1) = P\delta(x), \quad X(x, \pm 1) = 0. \tag{4}$$

Удовлетворим граничным условиям (4) с помощью зависимостей метода начальных функций и, учитывая, что в силу симметрии задачи начальные функции $V_0(x) = X_0(x) = 0$, получим

$$\begin{aligned} U(x,a) &= L_{UU}(\alpha,a)U_0(x) + L_{UY}(\alpha,a)Y_0(x), \\ V(x,a) &= L_{VU}(\alpha,a)U_0(x) + L_{VY}(\alpha,a)Y_0(x), \\ Y(x,a) &= L_{YU}(\alpha,a)U_0(x) + L_{YY}(\alpha,a)Y_0(x), \\ X(x,a) &= L_{XU}(\alpha,a)U_0(x) + L_{XY}(\alpha,a)Y_0(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $L_{UU}(\alpha, a)$ и т.д. — дифференциальные операторы метода начальных функций, в которых $\alpha = d/dx$ — операция дифференцирования.

Используя формулы (5) как начальные для внешней полосы, удовлетворим с помощью метода начальных функций граничным условиям (4). В итоге получим систему из двух дифференциальных уравнений бесконечного порядка относительно начальных функций $Y_0(x)$ и $U_0(x)$:

$$L^1_{YU}(\alpha)U_0(x) + L^1_{YY}(\alpha)Y_0(x) = P\delta(x), \quad L^1_{XY}(\alpha)U_0(x) + L^1_{XY}(\alpha)Y_0(x) = 0. \tag{6}$$

В формулах (6)

$$\begin{aligned} L^1_{YU}(\alpha) &= K\left[L_{YU}(\alpha,1-a)L_{UU}(\alpha,a) + L_{YV}(\alpha,1-a)L_{VU}(\alpha,a)\right] + \\ &+ L_{YY}(\alpha,1-a)L_{YU}(\alpha,a) + L_{YX}(\alpha,1-a)L_{XU}(\alpha,a), \\ L^1_{YY}(\alpha) &= K\left[L_{YU}(\alpha,1-a)L_{UY}(\alpha,a) + L_{YV}(\alpha,1-a)L_{VY}(\alpha,a)\right] + \\ &+ L_{YY}(\alpha,1-a)L_{YY}(\alpha,a) + L_{YX}(\alpha,1-a)L_{XY}(\alpha,a), \\ L^1_{XU}(\alpha) &= K\left[L_{XU}(\alpha,1-a)L_{UU}(\alpha,a) + L_{XV}(\alpha,1-a)L_{VU}(\alpha,a)\right] + \\ &+ L_{XY}(\alpha,1-a)L_{YU}(\alpha,a) + L_{XX}(\alpha,1-a)L_{XU}(\alpha,a), \\ L^1_{XY}(\alpha) &= K\left[L_{XU}(\alpha,1-a)L_{UY}(\alpha,a) + L_{XV}(\alpha,1-a)L_{VY}(\alpha,a)\right] + \\ &+ L_{XY}(\alpha,1-a)L_{YY}(\alpha,a) + L_{XX}(\alpha,1-a)L_{XY}(\alpha,a). \end{aligned} \tag{7}$$

Искомые выражения для напряжений и перемещений имеют вид:

$$U^a(x,y) = -\frac{i}{\pi}\int\limits_0^\infty [L_{UU}(-i\lambda,y)U_0(-i\lambda) + L_{UY}(-i\lambda,y)Y_0(-i\lambda)]\sin(\lambda x)\,d\lambda,$$

$$U(x,y) = -\frac{i}{\pi}\int\limits_0^\infty [L^*_{UU}(-i\lambda,y)U_0(-i\lambda) + L^*_{UY}(-i\lambda,y)Y_0(-i\lambda)]\sin(\lambda x)\,d\lambda,$$

$$V^a(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty [L_{VU}(-i\lambda,y)U_0(-i\lambda) + L_{VY}(-i\lambda,y)Y_0(-i\lambda)]\cos(\lambda x)\,d\lambda,$$

$$V(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty [L^*_{VU}(-i\lambda,y)U_0(-i\lambda) + L^*_{VY}(-i\lambda,y)Y_0(-i\lambda)]\cos(\lambda x)\,d\lambda,$$

$$\sigma^a_x(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty [A_U(-i\lambda,y)U_0(-i\lambda) + A_Y(-i\lambda,y)Y_0(-i\lambda)]\cos(\lambda x)\,d\lambda,$$

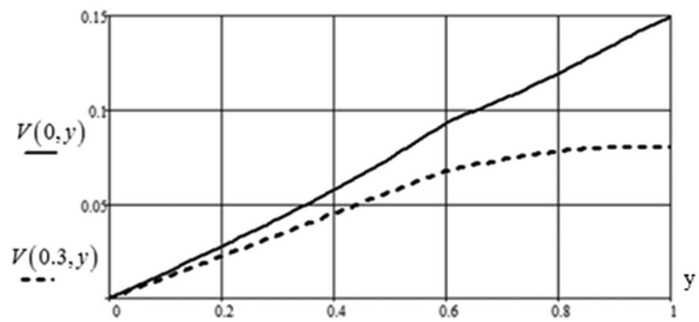

Рис. 2. Распределения поперечных перемещений $V(x,y)$ в сечениях $x = 0$ и $x = 0{,}3$

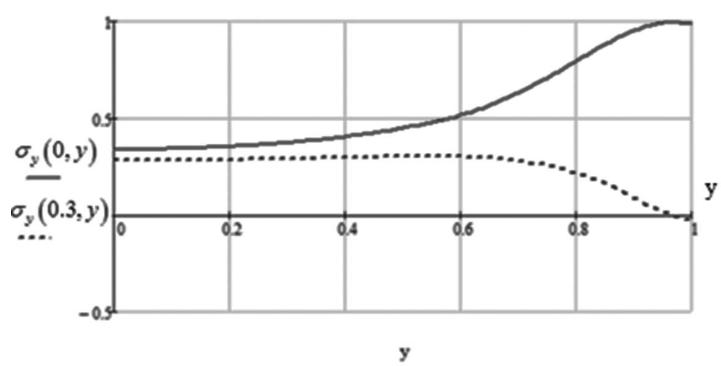

Рис. 3. Распределения напряжений $\sigma_y(x,y)$ в сечениях $x = 0$ и $x = 0{,}3$

$$\sigma_x(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty [A_U^*(-i\lambda,y)U_0(-i\lambda) + A_Y^*(-i\lambda,y)Y_0(-i\lambda)]\cos(\lambda x)\,d\lambda,$$

$$Y^a(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty [L_{YU}(-i\lambda,y)U_0(-i\lambda) + L_{YY}(-i\lambda,y)Y_0(-i\lambda)]\cos(\lambda x)\,d\lambda,$$

$$Y(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty [L_{YU}^*(-i\lambda,y)U_0(-i\lambda) + L_{YY}^*(-i\lambda,y)Y_0(-i\lambda)]\cos(\lambda x)\,d\lambda,$$

$$X^a(x,y) = -\frac{i}{\pi}\int\limits_0^\infty [L_{XU}(-i\lambda,y)U_0(-i\lambda) + L_{XY}(-i\lambda,y)Y_0(-i\lambda)]\sin(\lambda x)\,d\lambda,$$

$$X(x,y) = -\frac{i}{\pi}\int\limits_0^\infty [L_{XU}^*(-i\lambda,y)U_0(-i\lambda) + L_{XY}^*(-i\lambda,y)Y_0(-i\lambda)]\sin(\lambda x)\,d\lambda.$$

Рис. 4. Распределения поперечных перемещений $V(x,a)$, $V^a(x,a)$ на стыке полос

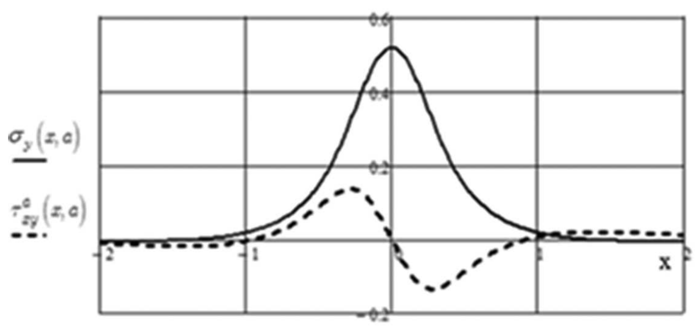

Рис. 5. Распределения нормальных $\sigma_y(x,a)$ и касательных $\tau_{xy}^a(x,a)$ напряжений на стыке полос

На рис. 2–5 приведены результаты распределений перемещений и напряжений в разных сечениях. Считалось, что $a = 0{,}6$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М.: Стройиздат, 1975. 224 с.

[2] Никитин А. В., Коваленко М. Д. Полуполоса, защемленная по продольным сторонам. Точное аналитическое решение // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. №4(22). С. 193–203.

A. V. Nikitin[1]

ON THE DETERMINATION OF THE STRESS-DEFORMED STATE OF THE COMPOSITE STRIP

[1] *Cheboksary Institute (f) of Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia.*

Abstract. In work [2] the boundary value problem for the half-strip whose long sides are clamped, i.e. the displacements are equal to zero, and the stresses are set at the end. The solution was constructed in the form of decompositions by Fadl–Papkovich functions. In this paper, we consider an infinite strip glued together from strips with different elastic modules. Along the bonding line are equal stresses and displacements of the outer and inner bands. The method of initial functions [1] is used to solve the problem. Improper integrals given at the end of the article are formulas for determining stresses and displacements.

Keywords: initial function method, Fourier integral transform, composite strip.

REFERENCES

[1] Vlasov V. V. The method of initial functions in the problems of the theory of elasticity and structural mechanics. M.: Stroizdat, 1975. 224 p. (in Russia)

[2] Nikitin A. V., Kovalenko M. D. Polomolok, clamped on the longitudinal sides. Exact analytical solution // Bulletin of Chuvash state pedagogical University named I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2014. №4(22). P. 193–203. (in Russia)

Nikitin Andrej Vitaljevich

`e-mail:` ligalas5@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Associate Professor, Cheboksary Institute (f) of Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia.