*Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева*
*Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 75–84*

*С. И. Сенашов, О. В. Гомонова*

# ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ, МЕНЯЮЩЕГОСЯ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ

*Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск*

***Аннотация.*** Решена задача о кручении прямого цилиндрического стержня, находящегося под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей; поперечное сечение стержня ограничено выпуклым контуром. Предполагается, что пластическая область охватывает всю внешнюю границу. Для решения задачи используются законы сохранения. Для кусочно-гладких границ решение найдено квадратурой.

***Ключевые слова***: законы сохранения, точные решения, неизвестная граница, задача кручения прямого стержня, давление.

*УДК*: 539.374

**Введение.** В настоящей работе рассматривается задача о кручении прямого цилиндрического стержня, находящегося под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей.

На сегодняшний день существует много исследований, посвященных кручению стержней с боковой поверхностью, свободной от напряжений. И лишь в некоторых работах учитывается действие давления вдоль образующей стержня при кручении [1], [2]. Но и в них рассмотрена только пластическая задача.

Решению задачи о напряженном состоянии упругопластического стержня также посвящено много работ, но большинство из них основываются на некоторых предположениях о форме границы $L$, которая, вообще говоря, заранее не известна. Оригинальный метод по определению неизвестной границы предложен Б. Д. Анниным [3]. Этот метод основан на контактных преобразованиях и позволяет определить границу раздела между упругой и пластической областью в стержнях овального поперечного сечения. Постановку задачи и подробный обзор результатов можно найти в [3] и цитируемой там литературе.

В данной работе впервые рассмотрена упругопластическая задача о кручении стержня, находящегося под действием давления, меняющегося вдоль образующей, и предложено её решение с помощью законов сохранения.

---

Поступила 10.03.2015

Работа выполнена в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы», проект № 14.574.21.0082.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ, код проекта Б-180-14.

Рассмотрим упругопластическое кручение прямого стержня (рис. 1), поперечное сечение которого ограничено выпуклым контуром Г. Предположим, что давление меняется линейно вдоль образующей [1].

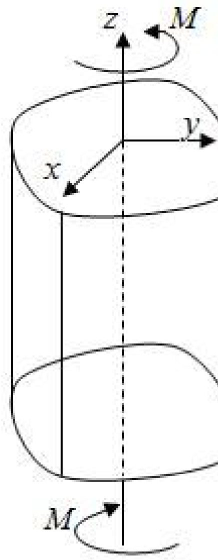


Рис. 1. Прямой цилиндрический стержень

При достаточно большом значении крутящего момента в стержне появляется пластическая область $P$, которая начинает образовываться на внешнем контуре Г. Предположим, что пластическая область полностью охватила контур. Тогда в поперечном сечении возникают две области – пластическая $P$ и упругая $F$; $L$ — граница раздела областей (рис. 2).

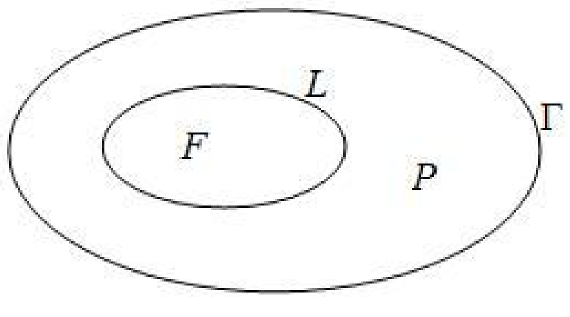


Рис. 2. Пластическая и упругая области в поперечном сечении стержня

В предлагаемой работе с помощью законов сохранения определяется упругопластическая граница и предлагаются формулы для ее вычисления в случае кусочно гладкой ориентированной границы поперечного сечения. Законы сохранения уже давно и плодотворно используются для решения многих задач математики и механики. Краткий обзор результатов и решенных задач из разных областей механики можно найти в [4], [5], [6].

**Постановка задачи.** Предположим, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + c, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y),$$

где $\lambda = \text{const}$, $c = \text{const}$.

Пусть $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$ — единственные ненулевые компоненты тензора напряжений. В упругой зоне они удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda \tag{1}$$

и уравнениям

$$\tau_{xz} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \tag{2}$$

Здесь функция $\theta\psi(x, y)$ определяет депланацию поперечного сечения, $\theta$ — постоянная, $G$ — модуль упругости при сдвиге.

Введем функцию напряжения $\varphi$ по формуле

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2} x\lambda, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} y\lambda, \tag{3}$$

тогда для определения $\varphi$ в упругой области получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\theta. \tag{4}$$

В пластической области компоненты $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$, помимо уравнения равновесия, удовлетворяют условию пластичности

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = 1. \tag{5}$$

Здесь, для простоты дальнейших вычислений, постоянную пластичности считаем равной единице.

Вводя в это уравнение функцию напряжения, получаем

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2} x\lambda \right)^2 + \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} y\lambda \right)^2 = 1. \tag{6}$$

**Граничные условия.** Предположим, что боковая поверхность стержня свободна от касательных усилий. Следовательно, вектор напряжения во всех точках контура $\Gamma$ направлен по нормали к его боковой поверхности. Это означает, что $\tau_{xz} n_1 + \tau_{yz} n_2 = 0$ на контуре $\Gamma$. Здесь $\vec{n} = (n_1, n_2)$ — нормальный вектор к контуру $\Gamma$.

Окончательно получаем следующую задачу.

В области, ограниченной кривой $L$, необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = a, \tag{7}$$

где $a = -2G\theta$.

В области, ограниченной кривыми $L$ и $\Gamma$ (т. е. в области пластичности $P$), функция $\varphi$ удовлетворяет уравнению (6).

На $\Gamma$ для функции $\varphi$ выполняются условия

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{1}{2}x\lambda\right)n_1+\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{2}y\lambda\right)n_2=0. \tag{8}$$

На границе раздела $L$ функция $\varphi$ непрерывна.

Требуется найти $\varphi$ в упругой и пластической областях, а также найти границу раздела $L$.

Введем обозначения $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=u$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=v$. Тогда уравнения (6)–(7) примут вид

$$F_1=u_x+v_y-a=0. \tag{9}$$

$$\left(u+\frac{1}{2}x\lambda\right)^2+\left(-v+\frac{1}{2}y\lambda\right)^2=1. \tag{10}$$

Здесь индекс внизу означает дифференцирование по соответствующей переменной.

В силу введенных обозначений будет выполняться равенство

$$F_2=u_y+v_x=0. \tag{11}$$

Назовем вектор $(A,B)$ сохраняющимся током для системы уравнений (9), (11), если выполнено соотношение

$$\partial_x A+\partial_y B=\Delta_1 F_1+\Delta_2 F_2=0. \tag{12}$$

Здесь $\Delta_1$, $\Delta_2$ — некоторые линейные дифференциальные операторы, одновременно не являющиеся тривиальными.

Это означает, что для функций $A$ и $B$ справедлив закон сохранения на всех решениях системы (9), (11):

$$\partial_x A+\partial_y B=0. \tag{13}$$

Закон сохранения (13) для уравнений (9), (11) имеет вид

$$A_x+A_u u_x+A_v v_x+B_y+B_u u_y+B_v v_y=0,$$

или, учитывая, что $u_x=a-v_y$ и $u_y=v_x$,

$$A_x+A_u a-A_u v_y+A_v v_x+B_y+B_u v_x+B_v v_y=0.$$

Из последнего равенства следует, что функции $A$ и $B$ удовлетворяют уравнениям Коши–Римана:

$$A_x+A_u a+B_y=0, \tag{14}$$

$$B_v-A_u=0, \quad A_v+B_u=0. \tag{15}$$

Рассмотрим область $D$ с границей $\Gamma$ при условии, что область пластичности $P$ полностью охватывает упругую зону $F$. Пусть $\Gamma$ гладкая ориентированная кривая, т. е. непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек. Из закона сохранения (13) следует, что

$$\iint\limits_D(\partial_x A+\partial_y B)\,dxdy=0. \tag{16}$$

Из (16), используя формулу Грина, получаем

$$\oint\limits_{\Gamma} Ady - Bdx = 0. \tag{17}$$

Наша задача – найти такую область $F$, принадлежащую вместе с ее границей $L$ области $D$, в которой выполняется неравенство $\left(u + \frac{1}{2}x\lambda\right)^2 + \left(-v + \frac{1}{2}y\lambda\right)^2 < 1$.

Пусть $A = \alpha u + \beta v$, $B = \alpha v - \beta u + \gamma$, где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – некоторые функции от $x, y$. Тогда

$$A_x = \alpha_x u + \alpha u_x + \beta_x v + \beta v_x, \tag{18}$$

$$B_y = \alpha_y v + \alpha v_y - \beta_y u - \beta u_y + \gamma_y. \tag{19}$$

Согласно закону сохранения (13) получаем равенство

$$A_x + B_y = \alpha_x u + \alpha u_x + \beta_x v + \beta v_x + \alpha_y v + \alpha v_y - \beta_y u - \beta u_y + \gamma_y = 0,$$

из которого следуют условия на функции $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$

$$\begin{cases} \alpha_x - \beta_y = 0; \\ \beta_x + \alpha_y = 0; \\ a\alpha + \gamma_y = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Рассмотрим два решения системы уравнений (20). Первое имеет вид

$$\begin{gathered} \alpha_1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta_1 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma_{1y} = -a\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \end{gathered} \tag{21}$$

тогда

$$\gamma_1 = -a \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}, \tag{22}$$

где точка $(x_0, y_0)$ произвольная точка сечения, ограниченного контуром Г. Соответственно, второе решение запишем в виде

$$\begin{gathered} \alpha_2 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta_2 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma_{2y} = -a\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \end{gathered} \tag{23}$$

тогда

$$\gamma_2 = -\frac{a}{2} \ln\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right).$$

Найдем значения $u$ и $v$ на контуре Г.

Из условия (10) и соотношения $\left(u + \dfrac{1}{2}x\lambda\right) n_1 + \left(-v + \dfrac{1}{2}y\lambda\right) n_2 = 0$ получаем

$$u = -\frac{1}{2}x\lambda \ - n_2,\ v = \frac{1}{2}y\lambda \ - n_1.$$

Здесь $n_1 > 0$ в связи с выбором крутящего момента.

Перепишем уравнение (17) для функций $A$ и $B$:

$$\begin{aligned}
&\oint\limits_\Gamma Ady - Bdx = \oint\limits_\Gamma \left(\alpha\left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right) + \beta\left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right)\right)dy - \\
&- \left(\alpha\left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) - \beta\left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right) + \gamma\right)dx = \\
&= \oint\limits_\Gamma \left(-\alpha\frac{n_2}{n_1} + \beta\right)\left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right)dy - \left(\alpha\frac{n_1}{n_2} - \beta\right)\left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right)dx - \oint\limits_\Gamma \gamma dx = \\
&= \oint\limits_\Gamma \left(-\alpha\frac{n_2}{n_1} + \beta\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy - \left(\alpha\frac{n_1}{n_2} - \beta\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx - \oint\limits_\Gamma \gamma dx = \\
&= \oint\limits_\Gamma -\alpha\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right)dy - \alpha\frac{n_1}{n_2}dx - \oint\limits_\Gamma \gamma dx + \oint\limits_\Gamma \beta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx\right) = \\
&= \oint\limits_\Gamma \alpha\left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right)dy - \left(\alpha\left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) + \gamma\right)dx = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Разобьем границу $\Gamma$ на части: $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, где $\Gamma_3$ – окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ (рис.3).

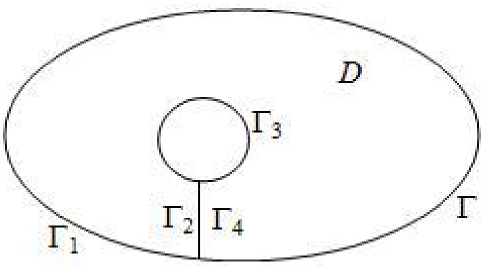


Рис. 3. Область $D$ с границей $\Gamma$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\oint_{\Gamma} Ady - Bdx = \oint_{\Gamma} \alpha\left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right)dy - \left(\alpha\left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) + \gamma\right)dx+ \\
&+\oint_{\Gamma_1} \alpha\left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right)dy - \left(\alpha\left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) + \gamma\right)dx+ \\
&+\oint_{\Gamma_2} \alpha\left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right)dy - \left(\alpha\left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) + \gamma\right)dx+ \\
&+\oint_{\Gamma_3} \alpha\left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right)dy - \left(\alpha\left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) + \gamma\right)dx+ \\
&+\oint_{\Gamma_4} \alpha\left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right)dy - \left(\alpha\left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) + \gamma\right)dx = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
&\oint_{\Gamma_2} \alpha\left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right)dy - \left(\alpha\left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) + \gamma\right)dx+ \\
&+\oint_{\Gamma_4} \alpha\left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right)dy + \left(\alpha\left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) + \gamma\right)dx = 0.
\end{aligned}$$

С учетом этого условия уравнение (25) примет вид

$$\begin{aligned}
&\oint_{\Gamma_3} \alpha\left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right)dy - \left(\alpha\left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) + \gamma\right)dx = \\
&= -\oint_{\Gamma_1} \alpha\left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right)dy + \left(\alpha\left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) + \gamma\right)dx.
\end{aligned} \tag{26}$$

Вычислим интеграл $\oint_{\Gamma_3}$, где $\Gamma_3$ — окружность радиуса $R$.

Пусть

$$\begin{gathered}
\alpha = \alpha_1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \beta_1 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\
\gamma = \gamma_1 = -a \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}.
\end{gathered} \tag{27}$$

Введем полярную систему координат

$$\begin{cases} x - x_0 = R\cos\varphi, \\ y - y_0 = R\sin\varphi. \end{cases} \tag{28}$$

Тогда

$$\begin{cases} dx = -R\sin\varphi d\varphi, \\ dy = R\cos\varphi d\varphi, \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\cos\varphi}{R}, \quad \beta = \frac{\sin\varphi}{R}. \tag{29}$$

В результате вычислений при $R \to 0$ получим

$$\oint\limits_{\Gamma_3} \alpha_1 \left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right) dy - \left(\alpha_1 \left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) + \gamma_1\right) dx = \pi u(x_0,\, y_0). \tag{30}$$

Аналогично при $\alpha = \alpha_2,\, \beta = \beta_2,\, \gamma = \gamma_2$:

$$\oint\limits_{\Gamma_3} \alpha_2 \left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right) dy - \left(\alpha_2 \left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) + \gamma_2\right) dx = \pi v(x_0,\, y_0). \tag{31}$$

В результате из (26) и (30)–(31) имеем

$$\oint\limits_{\Gamma_1} \alpha_1 \left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right) dy - \left(\alpha_1 \left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) + \gamma_1\right) dx = -\pi u(x_0,\, y_0), \tag{32}$$

$$\oint\limits_{\Gamma_1} \alpha_2 \left(-\frac{1}{2}x\lambda - n_2\right) dy - \left(\alpha_2 \left(\frac{1}{2}y\lambda - n_1\right) + \gamma_2\right) dx = -\pi v(x_0,\, y_0). \tag{33}$$

Зададим кривую $\Gamma_1$ в параметрическом виде:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{34}$$

Тогда функции $u(x_0,\, y_0)$, $v(x_0,\, y_0)$ из (32), (33) будут вычисляться по следующим формулам

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{(f(t) - x_0)\sqrt{(f'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (\varphi(t) - y_0)^2}} + af'(t)\,\mathrm{arctg}\,\frac{\varphi(t) - y_0}{f(t) - x_0}\right) dt,$$

$$v(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \frac{(\varphi(t) - y_0)\sqrt{(f'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (\varphi(t) - y_0)^2}} dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \frac{a}{2} f'(t) \ln\left((f(t) - x_0)^2 + (\varphi(t) - y_0)^2\right) dt,$$

$f'(t)$, $\varphi'(t)$ — соответственно, производные функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ .

Теперь вычисляем значение выражения

$$\left(u + \frac{1}{2}x\lambda\right)^2 + \left(-v + \frac{1}{2}y\lambda\right)^2$$

в точке $(x_0, y_0)$. Те точки, в которых выражение (36) больше или равно нулю, принадлежат пластической области, а те, в которых выражение (36) меньше нуля, – упругой.

**Заключение.** В статье построена упругопластическая граница для скручиваемого стержня в случае, когда давление линейно изменяется вдоль боковой поверхности. При решении данной задачи использованы законы сохранения. Отметим, что ни упругая, ни пластическая задача о кручении таким способом решена быть не может. В этом специфика упругопластических задач, они гораздо сложнее задач упругости и пластичности. Однако структура краевой задачи для уравнений упругопластичности такова, что её удобнее решать с использованием методики законов сохранения.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Предельное состояние* деформируемых тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин и др. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 832 с.

[2] *Козлова, Л. С.* К вопросу о кручении стержней, находящихся под действием давления, меняющегося вдоль образующей / Л. С. Козлова, Б. Г. Миронов, М. В. Михайлова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. -– № 1 (19). – С. 121–131.

[3] *Аннин, Б. Д.* Упругопластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. – Новосибирск : Наука. – 1983. – 239 с.

[4] *Киряков, П. П.* Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск : Издательство СО РАН, 2001. – 192 с.

[5] *Senashov, S. I.* Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity / S. I. Senashov, A. N. Yachno // SIGMA 8 (2012), 071 – 16 p.

[6] *Сенашов, С. И.* Законы сохранения в задаче о продольной плоской волне нагрузки в упругопластическом стержне / С. И. Сенашов // Вестник СибГАУ. – 2011. – Вып. 3(36). – С. 82–85.

[7] *Сенашов, С. И.* Нахождение упруго-пластической границы для областей конечных размеров / С. И. Сенашов, О. В. Гомонова // Материалы XVIII Международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. – Красноярск, 2014. – Ч. 2. – С. 155–156.

[8] *Сенашов, С. И.* Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности / С. И. Сенашов, О. В. Гомонова, А. Н. Яхно. – Красноярск : Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – 2012. – 139 с.

*Сенашов Сергей Иванович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск*

e-mail: sen@sibsau.ru

*Гомонова Ольга Валерьевна,*

*кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск*

e-mail: gomonova@sibsau.ru

*S. I. Senashov, O. V. Gomonova*

## ON ELASTOPLASTIC TORSION OF ROD UNDER THE ACTION OF A PRESSURE CHANGING ALONG THE GENERATRIX

*Siberian State Aerospace University named after Academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk*

***Abstract.*** The classical problem of torsion of a straight rod which cross-section is limited by a convex contour is solved. It is assumed that the plastic domain covers entirely the external boundary. The conservation laws are used to solve the problem. For a piecewise smooth boundary a solution in quadrature is found. Programs which permit construction of plastic and elastic regions in a twisted rod to any precision are written. Their testing for the known solutions indicates the coincidence of results.
***Keywords***: conservation law, exact solution, unknown boundary, the problem of torsion of a straight rod.

### REFERENCES

[1] *Limiting State* of Deformable Solids and Rocks / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, R. I. Nepershin et al. M. : PHYSMATHLIT, 2008. 832 p. (in Russian)

[2] *Kozlova, L. S.* On the Torsion Bars under the Pressure, Changing Along the Generatrix / L. S. Kozlova, B. G. Mironov, M. V. Mihailova // Vestik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a Limit State. – 2014. – № 1 (19). – P. 121–131. (in Russian)

[3] *Annin, B. D.* Elastoplastic Problem / B. D. Annin, G. P. Cherepanov. – Novosibirsk : Nauka. – 1983. – 239 p. (in Russian)

[4] *Kiryakov, P. P.* Application of Symmetries and Conservation Laws to Solving the Differential Equations / P. P. Kyryakov, S. I. senashov, A. N. Yakhno. – Novosibirsk: Edition of SB of RAS, 2001. – 192 p. (in Russian)

[5] *Senashov, S. I.* Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity / S. I. Senashov, A. N. Yachno // SIGMA 8 (2012), 071 – 16 p.

[6] *Senashov, S. I.* Conservation Laws of a Problem of a Longitudinal Plane Wave of Loading in a Elastoplastic Rod / S. I. Senashov // Vestnik SibSAU. – 2011. – Vol. 3(36). – P. 82–85. (in Russian)

[7] *Senashov, S. I.* Determination of a Elastoplastic Boundary for Limited Domains / S. I. Senashov, O. V. Gomonova // Proc. of the XVIII Inernational conference "Reshetnev's Readings". – Krasnoyarsk, 2014. – Part 2. – P. 155-156. (in Russian)

[8] *Senashov, S. I.* Mathematical Problems of 2-dimesional Ideal Plasticity Equations / S. I. Senashov, O. V. Gomonova, A. N. Yakhno. Krasnoyarsk : SibSAU. 2012. 139 p. (in Russian)

*Senashov Sergey Ivanovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Siberian State Aerospace University named after Academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk*

*Gomonova Olga Valeryevna*

*PhD, Assoc. Professor, Siberian State Aerospace University named after Academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk*