

Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ТОРОИДАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса,
Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия*

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. Представленная статья посвящена проблеме термоупругопластического деформирования полого тора. Основные уравнения теории температурных напряжений представлены в тороидальной системе координат. Рассчитаны и графически проанализированы остаточные напряжения в полом упругопластическом торе, подверженном неравномерному радиальному нагреву. Приближенное аналитическое решение указанной задачи получено в рамках подхода обобщенного плоского напряженного состояния. Поля напряжений и смещений вычислены в областях термоупругого деформирования и пластического течения. Обсуждаются корректность и применимость полученных решений для тора произвольного размера в условиях осесимметричного теплового воздействия.

Ключевые слова: термоупругость, термопластичность, температурное напряжение, предел текучести, остаточное напряжение, остаточная деформация, тор, тороидальные координаты

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.006

УДК: 539.374

Введение

Расчет полей температурных напряжений в процессах изготовления и эксплуатации изделий является одной из важных задач современной технологической практики. Процессы формирования объектов аддитивного производства зачастую протекают

Поступила 10.04.2019

© Дац Е.П., Мурашкин Е.В., 2019

Дац Евгений Павлович

e-mail: dats@dvo.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия,

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания министерства науки и высшего образования РФ (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №17-01-00712, 19-51-60001, 18-51-05012).

при сильно меняющихся температурных полях. К таким процессам относятся: лазерная стереолитография [1], селективное лазерное спекание [2], электронно-лучевая плавка [3], моделирование методом наплавления [4], метод многоструйного моделирования [5], изготовление объектов с использованием ламинирования [6], 3D-печать [7], компьютерная осевая литография, экструзия материала. Изменение градиентов температурного поля приводит к образованию концентраторов остаточных напряжений и развитию зон необратимого деформирования. Моделирование подобных технологических процессов логично проводить в рамках теории температурных напряжений. Наиболее полное изложение этой теории проделано в монографии [8]. В условиях температурного воздействия, проявляющего свойства осевой симметрии, были получены аналитические решения ряда краевых задач термоупругопластического деформирования. Так, в работах [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21] рассматривались решения краевых задач расчета полей остаточных деформаций и напряжений в условиях центральной (сферической) симметрии для упругопластического материала, определены особенности решения при нестационарном тепловом градиенте. Работы [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49] посвящены проблемам построения решений для напряжений и перемещений в упругопластическом материале в условиях осевой симметрии в цилиндрических координатах. Были выявлены особенности расчета напряженного состояния в случае плоского напряженного и плоского деформированного состояния материала с учетом зависимости предела текучести от температуры.

Настоящее исследование посвящено расчету параметров напряженно-деформированного состояния материала в условиях тороидальной симметрии. Расчеты удобно будет проводить в тороидальных координатах. Тороидальная система координат находит широкое применение в моделировании процессов в объектах, геометрия которых может быть описана в данной системе наиболее простым образом. Тороидальная форма конструкций часто используется при проектировании объектов в областях магнитогидродинамики, управляемом термоядерном синтезе, магнитостатике и др. Учет температурного поля в таких конструкциях может оказаться существенным при оценке прочностных характеристик при учете температурных деформаций.

1. Дифференциальные уравнения теории температурных напряжений в условиях тороидальной симметрии

Переход от декартовых координат (X, Y, Z) к тороидальным (r, θ, ϕ) (Рис.) можно провести согласно преобразованию:

$$\begin{aligned} X &= (R_0 + r \sin \theta) \cos \phi, \\ Y &= (R_0 + r \sin \theta) \sin \phi, \\ Z &= R_0 \cos \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где R_0 – главный тороидальный радиус, $r \in [r_1, r_2]$, r_1 и r_2 внутренний и внешний радиусы полого тора.

Примем, что центр тора совпадает с началом системы координат. При этом уравнение образующей оси тора определяется равенством $r = 0$.

Воспользуемся моделью малых упругопластических деформаций Прандля–Рейса, обобщенной на случай учета температурных эффектов. Тензор полных деформаций

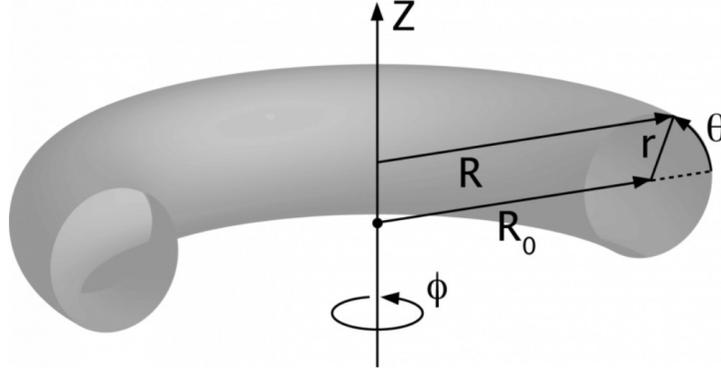


Рис. 1. Тороидальные координаты (r, θ, ϕ) , $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

полагается состоящим из термоупругой e_{ij} и пластической p_{ij} частей аддитивной зависимости

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij}. \quad (2)$$

Компоненты тензора малых деформаций в тороидальных координатах определяются через компоненты u_i вектора перемещений в виде:

$$\begin{aligned} d_{rr} &= u_{r,r}, \quad d_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{r,\theta}}{r} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \\ d_{\theta\theta} &= \frac{u_{\theta,\theta}}{r} + \frac{u_r}{r}, \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta}{\Omega} + \frac{u_{\varphi,\varphi}}{\Omega}, \\ d_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{r,\varphi}}{\Omega} + u_{\varphi,r} - \frac{u_\varphi \sin \theta}{\Omega} \right), \quad d_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{\theta,\varphi}}{\Omega} + u_{\varphi,\theta} - \frac{u_\varphi \cos \theta}{\Omega} \right), \\ \Omega &= R_0 + r \sin \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее индексом после запятой обозначается частное дифференцирование по соответствующей пространственной координате.

Уравнения равновесия в условиях тороидальной симметрии можно записать в форме:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{r\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\sin \theta}{\Omega} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} + \operatorname{ctg} \theta (\sigma_{r\theta})) &= 0 \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\sin \theta}{\Omega} (\sigma_{r\theta} + \operatorname{ctg} \theta (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})) &= 0 \\ \sigma_{r\varphi,r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{2 \sin \theta}{\Omega} (\sigma_{r\varphi} + \operatorname{ctg} \theta (\sigma_{\theta\varphi})) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

В областях термоупругого деформирования исследуемого материала деформации и напряжения связаны законом Дюамеля–Неймана [8]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} (e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{\phi\phi}) - \alpha \delta_{ij} (3\lambda + 2\mu) (T - T_0) + 2\mu e_{ij}, \quad (5)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, λ , μ — параметры Ламе (константы материала), α — коэффициент линейного теплового расширения, $(T - T_0)$ — разница между текущей и начальной температурой материала.

Расчет напряженно-деформированного состояния материала при медленном изменении теплового воздействия осуществляется в рамках квазистатической теории температурных напряжений, когда выражения для полей напряжений и перемещений зависят от известного температурного распределения. Для определения поля температуры воспользуемся уравнением теплопроводности, записанным в тороидальных координатах:

$$T_{,rr} + \frac{(R_0 + 2r \sin \theta)T_{,r}}{r(R_0 + r \sin \theta)} + \frac{T_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{\cos \theta T_{,\theta}}{r(R_0 + r \sin \theta)} + \frac{T_{,\phi\phi}}{(R_0 + r \sin \theta)^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (6)$$

При известных значениях функций p_{ij} и заданных граничных условиях система соотношений (3)–(6) полностью определяет напряженно-деформированное состояние материала.

2. Постановка краевой задачи. Рассмотрим полый тор с размерами R_0 и $r_1 < r < r_2$. Будем полагать, что материал подвержен влиянию симметричного относительно декартовой оси Z теплового воздействия. В таком случае напряженно-деформированное состояние не зависит от окружной координаты ϕ и справедливы соотношения:

$$u_\phi = 0, \quad d_{r\phi} = d_{\theta\phi} = 0, \quad \sigma_{r\phi} = \sigma_{\theta\phi} = 0 \quad (7)$$

Пусть изменение температурного поля от начального значения T_0 (при котором отсутствуют деформации и напряжения) до некоторого T_k является равномерным $T_{,r} = 0$, а на поверхностях тора выполняются условия свободного теплового расширения

$$\sigma_{rr}(r_1, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_1, \theta) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_2, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_2, \theta) = 0. \quad (8)$$

В этом случае в изотропном термоупругом материале сохраняются начальные значения тензора напряжений, вместе с тем диагональные компоненты тензора деформаций имеют равномерное распределение

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = 0, \quad \sigma_{\phi\phi}(r, \theta) = 0, \quad d_{r\theta}(r, \theta) = 0, \\ d_{rr}(r, \theta) = \alpha(T_k - T_0), \quad d_{\theta\theta}(r, \theta) = \alpha(T_k - T_0), \quad d_{\phi\phi}(r, \theta) = \alpha(T_k - T_0). \end{aligned} \quad (9)$$

Из уравнений равновесия (4) с учетом соотношений (9), можно вычислить компоненты вектора перемещений:

$$u_r(r, \theta) = \alpha(T_k - T_0)(r + R_0 \sin \theta), \quad u_\theta(r, \theta) = \alpha(T_k - T_0)R_0 \cos \theta. \quad (10)$$

Из (10) следует, что даже в простейшей постановке, задача об определении перемещений в торе является двумерной. При неравномерном температурном воздействии двумерные численные решения для деформаций и напряжений удастся описать приближенными одномерными зависимостями, используя общепринятые гипотезы о плоских напряженно-деформированных состояниях материала.

3. Термоупругое равновесие полого тора. Исследуем условия формирования напряжений при термоупругом равновесии материала ($d_{ij} = e_{ij}$). Рассмотрим решение стационарного уравнения теплопроводности (6) с граничными условиями:

$$T(r_1, \theta) = T_k, \quad T(r_2, \theta) = T_0. \quad (11)$$

Численный анализ показывает, что получаемое распределение температурного поля существенно зависит от геометрии тора и при малых значениях параметра $\epsilon = r_2/R_0$ может быть описано функцией, зависящей только от радиальной координаты. При стремлении $\epsilon = r_2/R_0$ к нулю, тороидальная симметрия переходит в цилиндрическую,

что позволяет получать одномерные аналитические решения. При таком подходе важным является определение допустимых конечных значений параметра ϵ , при которых цилиндрические решения будут удовлетворительно описывать двумерные численные тороидальные решения при заданной геометрии. Стационарное уравнение теплопроводности при $\epsilon = 0$ имеет простой вид: $T_{,r} + rT_{,rr} = 0$. Максимальное отклонение аналитического решения данного уравнения от численного решения уравнения (6) составляет менее 2% при $\epsilon = 0.1$ и $r_1/r_2 = 0.4$. Следовательно с достаточно высокой степенью точности температурное распределение при $\epsilon < 0.1$ можно считать одномерным.

Определим напряженно-деформированное состояние материала в условиях термоупругого равновесия при $\epsilon = 0$. Система уравнений равновесия (4) примет вид:

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0. \quad (12)$$

Компоненты вектора перемещений представим в следующей форме:

$$u_r(r, \theta) = F(r) + R_0 C \sin \theta, \quad u_\theta(r, \theta) = R_0 C \cos \theta. \quad (13)$$

где $F(r)$ — неизвестная функция радиуса, C — неизвестная константа. Используя (13), запишем соотношения для деформаций при $\epsilon = 0$:

$$d_{rr} = F_{,r} \quad d_{\phi\phi} = C \quad d_{\theta\theta} = \frac{F}{r} \quad d_{r\theta} = 0 \quad (14)$$

Далее, подставив выражения (14) в систему уравнений равновесия (12), получим уравнение для определения функции $F(r)$:

$$F_{,rr} + (r^{-1}F)_{,r} = \alpha\gamma T_{,r} \quad \gamma = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)}. \quad (15)$$

Решением (15) является функция

$$F(r) = \frac{\gamma}{r} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho d\rho + Ar + \frac{B}{r}, \quad \Delta(r) = \alpha(T(r) - T_0). \quad (16)$$

где A, B — константы интегрирования. Функция (17) соответствует общему решению для перемещений в цилиндре в условиях плоского деформированного состояния. Решения для напряжений (5) с учетом (17) примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda C + 2A(\lambda + \mu) - \frac{2\mu B}{r^2} - \frac{2\mu\gamma}{r^2} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho d\rho, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda C + 2A(\lambda + \mu) - \frac{2\mu B}{r^2} - \frac{2\mu\gamma}{r^2} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho d\rho, \\ \sigma_{\phi\phi} &= 2\lambda A + (\lambda + 2\mu)C - 2\mu\gamma\Delta(r). \end{aligned} \quad (17)$$

Константы A, B находятся из условий свободного теплового расширения (8):

$$A = \frac{1}{(\lambda + \mu)} \left(\frac{\mu\gamma}{(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho d\rho - \frac{\lambda C}{2} \right), \quad B = \frac{\gamma r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho d\rho. \quad (18)$$

Константа C , определяется из условия:

$$\int_{r_1}^{r_2} 2\pi\sigma_{\phi\phi}(\rho) \rho d\rho = 0 \quad (19)$$

Уравнение (19) встречается в задачах расчета напряжений в цилиндрах в условиях обобщенного плоского деформированного состояния, при этом вместо напряжения $\sigma_{\phi\phi}$ используется напряжение σ_{zz} . Из (19) получим:

$$C = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \Delta(\rho) \rho d\rho \quad (20)$$

При термоупругом деформировании выражение (20) соответствует величине среднего теплового расширения, распределенной по объему тора. Подстановка найденных значений (18), (20) в выражения 17 приводит к совпадению окружных напряжений на поверхностях, что согласуется с численным моделированием напряженно-деформированного состояния тора при малых значениях параметра $\epsilon < 0.1$.

$$\sigma_{\phi\phi}(r_1) = \sigma_{\theta\theta}(r_1), \quad \sigma_{\phi\phi}(r_2) = \sigma_{\theta\theta}(r_2). \quad (21)$$

На графике представлено распределение напряжений при термоупругом деформировании материала тора.

4. Необратимое деформирование тора. Процесс расчета термоупругого деформирования при увеличении значения температуры T_k ограничен возможностью выхода напряженного состояния на поверхность текучести (призма Треска), заданную условием:

$$\max |\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|, |\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}|, |\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta}| - 2k(T) = 0 \quad (22)$$

где $k = k_0(1 - \beta\Delta)$ — предел текучести материала, β — константа материала, задающая степень падения предела текучести при росте температуры.

Пластическое течение возникает на внутренней поверхности тора при выполнении условия (22) в форме:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k, \quad \sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} = 2k. \quad (23)$$

По мере роста параметра T_k граница зоны пластичности b движется в направлении внешней поверхности. Формулы для перемещений и напряжений в области упругого деформирования $b < r < r_2$ остаются справедливыми с точностью до новых констант интегрирования A, B, C .

Зона пластичности состоит из двух частей: область полной пластичности $r_1 < r < a$ (ребро призмы Треска), в которой выполняется условие (23), и область пластичности $a < r < b$ (грань призмы Треска), в которой выполняется условие пластичности:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} = 2k. \quad (24)$$

В области $r_1 < r < a$ задача является статически определимой, и напряжения являются решениями системы уравнений равновесия (4) с учетом условий (8), (23):

$$\sigma_{rr}^* = -\frac{2}{r} \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho, \quad \sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\phi\phi}^* - \frac{2}{r} \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - 2k. \quad (25)$$

Перемещения в данной области вновь представим в виде суммы функций (13):

$$u_r(r, \theta) = F^*(r) + R_0 C \sin \theta, \quad u_\theta(r, \theta) = R_0 C \cos \theta. \quad (26)$$

Отметим, что константа C требует своего определения и при пластическом течении.

Так как напряжения в пластической зоне являются функциями радиуса, то границы пластических течений распространяются в радиальном направлении и их положение не зависит от угловой координаты. Следовательно, представления перемещений

в виде (26) обеспечивают их непрерывность при определенном выборе констант интегрирования, входящих в функцию $F^*(r)$. Уравнение для поиска данной функции найдем из условия пластической несжимаемости

$$p_{rr} + p_{\theta\theta} + p_{\phi\phi} = 0 \quad (27)$$

Выразив упругие деформации через напряжения (25), и просуммировав полученный результат с использованием условия (27), получим:

$$C + F_{,r}^* + \frac{F^*}{r} + \frac{2}{(3\lambda + 2\mu)} \left(3 \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + 2k(r) \right) - 3\Delta(r) = 0. \quad (28)$$

Проинтегрировав уравнение (28) найдем:

$$F^*(r) = \frac{3}{r} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho d\rho - \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)} \left(r \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{1}{r} \int_{r_1}^r k(\rho) \rho d\rho \right) + Cr + \frac{D}{r}, \quad (29)$$

где D – константа интегрирования.

Далее рассмотрим решения в области $a < r < b$. Согласно ассоциированному закону пластического течения, выполнение условия (24) приводит к следующим соотношениям для компонент пластических деформаций:

$$p_{rr} + p_{\phi\phi} = 0, \quad p_{\theta\theta} = 0. \quad (30)$$

Перемещения в данной области представим в виде

$$u_r^{**}(r, \theta) = F^{**}(r) + R_0 C \sin \theta, \quad u_\theta^{**}(r, \theta) = R_0 C \cos \theta. \quad (31)$$

Подстановка функций (31) в уравнения равновесия с учетом равенств (24) и (30) приводит к дифференциальному уравнению:

$$F_{,rr}^{**} + \frac{F_{,r}^{**}}{r} - \frac{\eta^2 F^{**}}{r^2} - \psi \Delta_{,r} + \frac{\mu C + k + r k_{,r}}{(\lambda + \mu)r} = 0, \quad \eta = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}}, \quad \psi = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}. \quad (32)$$

Проинтегрировав уравнение (32), получим:

$$F^{**}(r) = \frac{\psi}{2\eta} \left(\frac{(\eta + 1)}{r^\eta} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho^\eta d\rho + (\eta - 1) r^\eta \int_{r_1}^r \frac{\Delta(\rho)}{\rho^\eta} d\rho \right) + rC - \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \left(\frac{1}{r^\eta} \int_{r_1}^r k(\rho) \rho^\eta d\rho + r^\eta \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho^\eta} d\rho \right) + Mr^\eta + \frac{N}{r^\eta}, \quad (33)$$

где M, N – константы интегрирования.

Из условия пластичности (24) с учетом функции (33) следует решение для радиальной пластической деформации:

$$p_{rr}^{**} = \frac{1}{2} \left(F_{,r}^{**} - C - \frac{k}{\mu} \right). \quad (34)$$

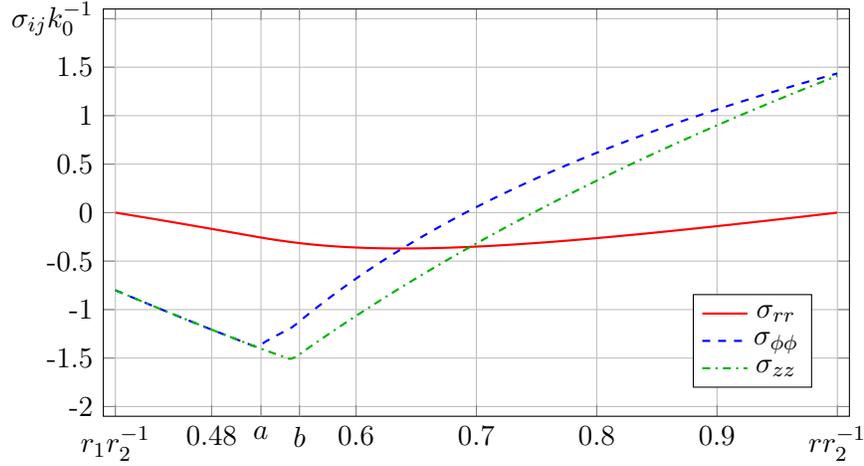


Рис. 2. Температурные напряжения при развитии пластического течения на внутренней поверхности, $r_1 r_2^{-1} = 0.4$, $\epsilon = 0.1$, $a r_2^{-1} = 0.521$, $b r_2^{-1} = 0.553$.

Функции напряжений в области ($a < r < b$) имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{**} &= \frac{\psi}{2\eta} \left((\eta - 1) \nu_1 r^{(\eta-1)} \int_{r_1}^r \frac{\Delta(\rho)}{\rho^\eta} d\rho - \frac{(\eta + 1) \nu_2}{r^{(\eta+1)}} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho^\eta d\rho \right) + \nu_1 r^{(\eta-1)} M - \\ &- \frac{1}{(\lambda + \mu)} \left(\nu_1 r^{\eta-1} \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho^\eta} d\rho - \frac{\nu_2}{r^{\eta+1}} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho^\eta d\rho \right) - \frac{\nu_2 N}{r^{(\eta+1)}} + (3\lambda + 2\mu) C, \\ \sigma_{\theta\theta}^{**} &= \frac{\psi}{2\eta} \left((\eta - 1) \nu_1 r^{(\eta-1)} \int_{r_1}^r \frac{\Delta(\rho)}{\rho^\eta} d\rho + \frac{(\eta + 1) \nu_2}{r^{(\eta+1)}} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho^\eta d\rho \right) - \mu \psi \Delta(r) - \\ &- \frac{\lambda k(r)}{(\lambda + \mu)} - \frac{1}{(\lambda + \mu)} \left(\nu_1 r^{\eta-1} \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho^\eta} d\rho + \frac{\nu_2}{r^{\eta+1}} \int_{r_1}^r \Delta(\rho) \rho^\eta d\rho \right) + \\ &+ (3\lambda + 2\mu) C + \nu_1 r^{(\eta-1)} M + \frac{\nu_2 N}{r^{(\eta+1)}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Система уравнений для поиска констант A , B , C , D , M , N состоит из условий (8), (19) и условий непрерывности радиальных напряжений и перемещений на границах a , b .

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^a \sigma_{\phi\phi}^*(\rho) \rho d\rho + \int_a^b \sigma_{\phi\phi}^{**}(\rho) \rho d\rho + \int_b^{r_2} \sigma_{\phi\phi}(\rho) \rho d\rho &= 0, \quad \sigma_{rr}(r_2) = 0, \\ u_r^*(a) = u_r^{**}(a), \quad \sigma_{rr}^*(a) = \sigma_{rr}^{**}(a), \quad u_r^*(b) = u_r(b), \quad \sigma_{rr}^{**}(b) &= \sigma_{rr}(b). \end{aligned} \quad (36)$$

Выражения для констант не приводятся в силу их громоздкости.

Вычисление границ пластического течения с учетом известных констант интегрирования осуществляется при помощи численного решения системы уравнений, задающих непрерывность окружных напряжений на границах [24, 25]:

$$\sigma_{\theta\theta}^*(a) = \sigma_{\theta\theta}^{**}(a), \quad \sigma_{\theta\theta}^{**}(b) = \sigma_{\theta\theta}(b). \quad (37)$$

На рис. 2 представлен пример распределения напряжений в случае развития пластического течения на внутренней поверхности тора.

Отметим, что по мере увеличения температуры внутренней поверхности T_k на внешней поверхности так же возможно появление и развитие второй зоны пластического течения. Общие решения в данной зоне совпадают с полученными ранее с точностью до противоположного знака перед функцией предела текучести.

5. Заключение

Решения для напряжений и перемещений, полученные в условиях термоупругого равновесия сравнивались с численными результатами для различных значений параметра ϵ . Было установлено, что при значениях $\epsilon < 0.1$ максимальное отклонение аналитических решений для напряжений составляет менее 4% от численных расчетов. При этом решения для перемещений отличаются менее чем на 1% от численных аналогов. Таким образом, можно сделать вывод о том, полученные аналитические зависимости с высокой степенью точности можно использовать для расчета напряженно-деформированного состояния термоупругого материала при конечных значениях параметра ϵ . Очевидно, что данные решения являются полезными при моделировании процесса пластического течения, так как позволяют получать наиболее простым способом распределения напряжений и перемещений в зонах течения и обеспечивают непрерывность исследуемых функций на упругопластических границах. Дальнейшее исследование напряженно-деформированного состояния в условиях тороидальной симметрии связано с построением приближенных решений, учитывающих нестационарность температурного градиента и возможность возникновения повторного пластического течения при разгрузке.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Production of materials with spatially-controlled cross-link density via vat photopolymerization / Gregory I Peterson, Johanna J Schwartz, Di Zhang [и др.] // ACS applied materials & interfaces. 2016. Т. 8, № 42. С. 29037–29043.
- [2] Liu Weiping, DuPont JN. Fabrication of functionally graded TiC/Ti composites by laser engineered net shaping // Scripta Materialia. 2003. Т. 48, № 9. С. 1337–1342.
- [3] Metal fabrication by additive manufacturing using laser and electron beam melting technologies / Lawrence E Murr, Sara M Gaytan, Diana A Ramirez [и др.] // Journal of Materials Science & Technology. 2012. Т. 28, № 1. С. 1–14.
- [4] Anisotropic material properties of fused deposition modeling ABS / Sung-Hoon Ahn, Michael Montero, Dan Odell [и др.] // Rapid prototyping journal. 2002. Т. 8, № 4. С. 248–257.
- [5] Material jetting additive manufacturing: An experimental study using designed metrological benchmarks / Yee Ling Yap, Chengcheng Wang, Swee Leong Sing [и др.] // Precision engineering. 2017. Т. 50. С. 275–285.
- [6] Mueller Bernhard, Kochan Detlef. Laminated object manufacturing for rapid tooling and patternmaking in foundry industry // Computers in Industry. 1999. Т. 39, № 1. С. 47–53.
- [7] Lipson Hod, Kurman Melba. Fabricated: The new world of 3D printing. John Wiley & Sons, 2013.
- [8] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. Москва: Мир, 1964.
- [9] Lippmann H. The Effect of a Temperature Cycle on the Stress Distribution in a Shrink Fit // International Journal of Plasticity. 1992. Vol. 8. P. 567–582.
- [10] Ломакин В. А. Одномерная задача о температурных напряжениях в упругопластической среде // Инженерный сборник. 1959. Т. 25. С. 9–11.
- [11] Raniecki B. Stresses in an Elastic-Plastic Hollow Sphere Subjected to a Variable Temperature Field // Rozpr. Inz. 1966. Vol. 14. p. 479.

- [12] Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Велмуруган Р. Вычисление необратимых деформаций в полом упруго-пластическом шаре в условиях нестационарного температурного воздействия // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3. С. 168–175.
- [13] Дац Е. П., Мокрин С. Н., Мурашкин Е. В. Расчет накопленной остаточной деформации в процессе «нагрева-охлаждения» упруго-пластического шара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4. С. 250–264.
- [14] Дац Е. П., Мокрин С. Н. О повторном нагреве сплошного упруго-пластического шара // Сборник тезисов докладов XXXVI Дальневосточной математической школы-семинара имени академика Е. В. Золотова. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2012. С. 106–109.
- [15] Бурени А. А., Дац Е. П., Мокрин С. Н. Формирование поля остаточных напряжений в упруго-пластических телах за счет локального теплового воздействия // Международная конференция «Современные проблемы механики», посвященная 100-летию А. А. Галина. Тезисы докладов. Москва: ИПМех РАН, 2012. с. 20.
- [16] Дац Е. П. Возникновение и развитие зон необратимого деформирования в процессе нагревания и охлаждения // Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении. Сборник статей. №4. Комсомольск-на-Амуре: ИМиМ ДВО РАН, 2013. С. 16–26.
- [17] Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in AM fabricated ball during a heating process // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. p. 070008.
- [18] Murashkin E., Dats E. Thermal Residual Stresses Computing in Elastic-Plastic Ball with Rigid Inclusion under Heat Treatments // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2018. Vol. 2235. P. 811–814.
- [19] Murashkin E., Dats E. Applications of Multi-Physics Modelling for Simulations of Thermo-Elastic-Plastic Materials // Fourth International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. Corfu Island, Greece, 24 - 27 Aug, 2017: Conference Publishing Services of IEEE, 2018. P. 76–80.
- [20] Murashkin E., Dats E. Thermoelastoplastic Deformation of a Multilayer Ball // Mechanics of Solids. 2017. Vol. 52, no. 5. P. 30–36.
- [21] Murashkin E., Dats E., Klindukhov V. Numerical Analysis of the Elastic-Plastic Boundaries in the Thermal Stresses Theory Frameworks // Journal of Physics: Conf. Series. 2017. Vol. 937. p. 012060.
- [22] Bland D. Elasto-plastic thick-walled tubes of work-hardening subject to internal and external pressures and to temperature gradients // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1956. Vol. 4. P. 209–229.
- [23] Dats E., Mokrin S., Murashkin E. Calculation of the Residual Stress Field of the Thin Circular Plate under Unsteady Thermal Action // Key Engineering Materials. 2016. Vol. 685. P. 37–41.
- [24] Dats E., Mokrin S., Murashkin E. Calculation of the Residual Stresses of Hollow Cylinder under Unsteady Thermal Action // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2015. Vol. 2218. P. 1043–1046.
- [25] Dats E., Murashkin E. On Unsteady Heat Effect in Center of the Elastic-Plastic Disk // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2016. Vol. 2223. P. 69–72.
- [26] Буренин А. А., Дац Е. П., Мурашкин Е. В. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // Известия РАН. Механика твердого тела. 2014. № 2. С. 124–131.
- [27] Пластическое течение и разгрузка полого цилиндра в процессе «нагрева-охлаждения» / А. А. Буренин, Е. П. Дац, С.Н. Мокрин [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2. С. 22–28.
- [28] Дац Е. П., Ткачева А. В. Численное исследование температурных напряжений, вызванных процессом горячей посадки цилиндрических деталей // Успехи механики сплошных сред. Международная конференция, приуроченная к 75-летию академика В.А. Левина. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2014. С. 481–484.
- [29] Дац Е. П., Мокрин С. Н., Мурашкин Е. В. Расчет остаточных напряжений полого цилиндра из термоупруго-пластического материала // Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам. Алушта: МАИ, 2013. С. 18–22.

- [30] Dats E. P., Murashkin E. V., Gupta N. K. On Yield Criterion Choice in Thermoelastoplastic Problems // *Procedia IUTAM*. 2017. Vol. 23. P. 187–200.
- [31] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On a Multi-Physics Modelling Framework for Thermo-elastic-plastic Materials Processing // *Procedia Manufacturing*. 2017. Vol. 7. P. 427–434.
- [32] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On Heating of Thin Circular Elastic-plastic Plate with the Yield Stress Depending on Temperature // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 173. P. 891–896.
- [33] Murashkin E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2018. Vol. 991. p. 012060.
- [34] Odeno H. Transient Thermal Stresses in Elasto-Plastic Discs // *Journal Mechanical Engineering Science*. 1969. Vol. 2. P. 384–391.
- [35] Orcan Y. Residual Stresses And Secondary Plastic Flow in a Heat Generating Elastic-Plastic Cylinder With Free Ends // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1995. Vol. 33. P. 1689–1698.
- [36] Murashkin E., Dats E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoelasticity // *IAENG International Journal of Applied Mathematics*. 2017. Vol. 47. P. 261 – 264.
- [37] Orcan Y., Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Cylinder // *Acta Mechanica*. 1991. Vol. 90. P. 61–80.
- [38] Gamer U. On the Elastic-Plastic Deformation of a Sphere Subjected to a Spherically Symmetrical temperature Field // *Journal of Thermal Stresses*. 1988. Vol. 13. P. 159–173.
- [39] Eraslan A., Orcan Y. Thermoplastic Response of a Linearly Hardening Cylinder Subjected to Nonuniform Heat Source and Convective Boundary Condition // *Mechanics Based Design of Structures and Machines: An International Journal*. 2004. Vol. 32. P. 133–164.
- [40] Eraslan A., Orcan Y. Thermal Stresses in Elastic-Plastic Tubes With Temperature-Dependent Mechanical And Thermal Properties // *Journal of Thermal Stresses*. 2001. Vol. 24. P. 1097–1113.
- [41] Guven U., Altay O. Elastic-Plastic Solid Disk With Nonuniform Heat Source Subjected to External Pressure // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000. Vol. 42. P. 831–842.
- [42] Guven U., Altay O. Linear Hardening Solid Disk With Rigid Casing Subjected to a Uniform Heat Source // *Mechanics Research Communications*. 1998. Vol. 25. P. 679–684.
- [43] Gulgec M., Orcan Y. On The Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Cylinder Exhibiting Linear Hardening // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM)*. 1999. Vol. 79. P. 493–498.
- [44] Eraslan A., Orcan Y. Computation of Transient Thermal Stresses in Elastic-Plastic Tubes: Effect of Coupling And Temperature Dependent Physical Properties // *Journal of Thermal Stresses*. 2002. Vol. 25. P. 559–572.
- [45] Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Disk // *Journal of Thermal Stresses*. 1985. Vol. 8. P. 41–51.
- [46] Mack W. Thermal Assembly of an Elastic-Plastic Hub And a Solid Shaft // *Arch. Appl. Mech*. 1993. Vol. 63. P. 42–50.
- [47] Bengeri M., Mack W. The Influence of the Temperature Dependence of the Yield Stress on the Stress Distribution in a Thermally Assembled Elastic-Plastic Shrink Fit // *Acta Mechanica*. 1994. Vol. 103. P. 243–257.
- [48] Kovacs A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits // *Periodica Polytechnica. Ser.: Mech. Eng*. 1996. Vol. 40. P. 103–112.
- [49] Kovacs A. Hardening Effects on the Stress Distribution in a Shrink Fit under Cyclic Thermal Loading // *Periodica Polytechnica Ser.: Mech. Eng*. 1991. Vol. 35. P. 49–64.

E. P. Dats, E. V. Murashkin

THERMAL STRESSES UNDER TOROIDAL SYMMETRY

Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok, Russia

Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The present paper is devoted to problem of thermoelastoplastic deformation of hollow torus. The requisite equation of the temperature stresses theory are furnished in toroidal coordinate frame. The residual stresses in a hollow elastoplastic torus subject to non-uniform radial heating are calculated and graphically analyzed. The approximate analytical solution of the noted problem is obtained in the framework of the generalized plane stress state approach. The stress and displacement fields are computed in the thermoelastic and plastic flow domains. The correctness and applicability of the obtained solutions for a torus of arbitrary size under conditions of axisymmetric thermal effect are discussed.

Keywords: thermoelasticity, thermoplasticity, thermal stress, yield point, residual stress, residual strain, torus

REFERENCES

- [1] Production of materials with spatially-controlled cross-link density via vat photopolymerization / Gregory I Peterson, Johanna J Schwartz, Di Zhang [и др.] // ACS applied materials & interfaces. 2016. Т. 8, № 42. С. 29037–29043.
- [2] Liu Weiping, DuPont JN. Fabrication of functionally graded TiC/Ti composites by laser engineered net shaping // Scripta Materialia. 2003. Т. 48, № 9. С. 1337–1342.
- [3] Metal fabrication by additive manufacturing using laser and electron beam melting technologies / Lawrence E Murr, Sara M Gaytan, Diana A Ramirez [и др.] // Journal of Materials Science & Technology. 2012. Т. 28, № 1. С. 1–14.
- [4] Anisotropic material properties of fused deposition modeling ABS / Sung-Hoon Ahn, Michael Montero, Dan Odell [и др.] // Rapid prototyping journal. 2002. Т. 8, № 4. С. 248–257.
- [5] Material jetting additive manufacturing: An experimental study using designed metrological benchmarks / Yee Ling Yap, Chengcheng Wang, Swee Leong Sing [и др.] // Precision engineering. 2017. Т. 50. С. 275–285.
- [6] Mueller Bernhard, Kochan Detlef. Laminated object manufacturing for rapid tooling and patternmaking in foundry industry // Computers in Industry. 1999. Т. 39, № 1. С. 47–53.
- [7] Lipson Hod, Kurman Melba. Fabricated: The new world of 3D printing. John Wiley & Sons, 2013.
- [8] Boley B., Weiner J. Theory of Thermal Stresses. New York: Wiley, 1964.
- [9] Lippmann H. The Effect of a Temperature Cycle on the Stress Distribution in a Shrink Fit // International Journal of Plasticity. 1992. Vol. 8. P. 567–582.
- [10] Lomakin V. A. The one-dimensional problem of temperature stresses in an elastoplastic medium // Engineering Proceeding. 1959. Т. 25. С. 9–11.

Dats Evgeniy Pavlovich

e-mail: dats@dvo.ru, PhD, Assistant Professor, Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok, Russia,

Murashkin Evgenii Valerievich

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, PhD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

- [11] Raniecki B. Stresses in an Elastic-Plastic Hollow Sphere Subjected to a Variable Temperature Field // *Rozpr. Inz.* 1966. Vol. 14. p. 479.
- [12] Dats E.P., Murashkin E.V., Velmurugan R. Calculation of irreversible strains in a hollow elastoplastic ball under conditions of unsteady temperature exposure // *Bulletin of the I. Yakovleva Chuvash State Pedagogical University. Series: Limit States Mechanics.* 2015. № 3. С. 168–175.
- [13] Dats E.P., Mokrin S.N., Murashkin E.V. Calculation of accumulated residual deformation in the process of "heating-cooling" of an elastoplastic ball // *Bulletin of the I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Limit State Mechanics.* 2012. № 4. С. 250–264.
- [14] Dats E.P., Mokrin S.N. On reheating a continuous elastoplastic ball // *Abstracts of XXXVI Far Eastern Mathematical School-Seminar named after Academician E.V. Zolotov.* Vladivostok: IAPU FEB RAS, 2012. С. 106–109.
- [15] Burenin A. A., Dats E. P., Mokrin S. N. The formation of the field of residual stresses in elastoplastic bodies due to local heat exposure // *International Conference "Modern Problems of Mechanics" dedicated to the 100th anniversary of L. A. Galin. Abstracts.* Москва: ИПМех РАН, 2012. с. 20.
- [16] Dats E. P. The emergence and development of zones of irreversible deformation during heating and cooling // *Applied problems of the mechanics of a solid and advanced technologies in mechanical engineering. Digest of articles. №4.* Komsomolsk-on-Amur: IMiM FEB RAS, 2013. С. 16–26.
- [17] Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in AM fabricated ball during a heating process // *AIP Conference Proceedings.* 2018. Vol. 1959. p. 070008.
- [18] Murashkin E., Dats E. Thermal Residual Stresses Computing in Elastic-Plastic Ball with Rigid Inclusion under Heat Treatments // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science.* 2018. Vol. 2235. P. 811–814.
- [19] Murashkin E., Dats E. Applications of Multi-Physics Modelling for Simulations of Thermo-Elastic-Plastic Materials // *Fourth International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry.* Corfu Island, Greece, 24 - 27 Aug, 2017: Conference Publishing Services of IEEE, 2018. P. 76–80.
- [20] Murashkin E., Dats E. Thermoelastoplastic Deformation of a Multilayer Ball // *Mechanics of Solids.* 2017. Vol. 52, no. 5. P. 30–36.
- [21] Murashkin E., Dats E., Klindukhov V. Numerical Analysis of the Elastic-Plastic Boundaries in the Thermal Stresses Theory Frameworks // *Journal of Physics: Conf. Series.* 2017. Vol. 937. p. 012060.
- [22] Bland D. Elasto-plastic thick-walled tubes of work-hardening subject to internal and external pressures and to temperature gradients // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 1956. Vol. 4. P. 209–229.
- [23] Dats E., Mokrin S., Murashkin E. Calculation of the Residual Stress Field of the Thin Circular Plate under Unsteady Thermal Action // *Key Engineering Materials.* 2016. Vol. 685. P. 37–41.
- [24] Dats E., Mokrin S., Murashkin E. Calculation of the Residual Stresses of Hollow Cylinder under Unsteady Thermal Action // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science.* 2015. Vol. 2218. P. 1043–1046.
- [25] Dats E., Murashkin E. On Unsteady Heat Effect in Center of the Elastic-Plastic Disk // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science.* 2016. Vol. 2223. P. 69–72.
- [26] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // *Mechanics of Solids.* 2014. Mar. T. 49, № 2. С. 218–224. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654414020113>.
- [27] Plastic flow and unloading of a hollow cylinder during the «heating-cooling» action / A. A. Burenin, E. P. Dats, S. Mokrin et al. // *Bulletin of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State.* 2013. Vol. 16, no. 2. P. 22–28.
- [28] Dats E.P., Tkacheva A.V. Numerical study of temperature stresses caused by the process of hot landing of cylindrical parts // *Advances in continuum mechanics. International conference dedicated to the 75th anniversary of academician V.A. Levina.* Vladivostok: IACP FEB RAS, 2014. С. 481–484.
- [29] Dats E.P., Mokrin S.N., Murashkin E.V. Calculation of residual stresses of a hollow cylinder made of thermopurgoplastic material // *Materials of the XVIII International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Systems.* Alushta: MAI, 2013. С. 18–22.
- [30] Dats E. P., Murashkin E. V., Gupta N. K. On Yield Criterion Choice in Thermoelastoplastic Problems // *Procedia IUTAM.* 2017. Vol. 23. P. 187–200.

-
- [31] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On a Multi-Physics Modelling Framework for Thermo-elastic-plastic Materials Processing // *Procedia Manufacturing*. 2017. Vol. 7. P. 427–434.
- [32] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On Heating of Thin Circular Elastic-plastic Plate with the Yield Stress Depending on Temperature // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 173. P. 891–896.
- [33] Murashkin E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2018. Vol. 991. p. 012060.
- [34] Odeno H. Transient Thermal Stresses in Elasto-Plastic Discs // *Journal Mechanical Engineering Science*. 1969. Vol. 2. P. 384–391.
- [35] Orcan Y. Residual Stresses And Secondary Plastic Flow in a Heat Generating Elastic-Plastic Cylinder With Free Ends // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1995. Vol. 33. P. 1689–1698.
- [36] Murashkin E., Dats E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoelasticity // *IAENG International Journal of Applied Mathematics*. 2017. Vol. 47. P. 261 – 264.
- [37] Orcan Y., Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Cylinder // *Acta Mechanica*. 1991. Vol. 90. P. 61–80.
- [38] Gamer U. On the Elastic-Plastic Deformation of a Sphere Subjected to a Spherically Symmetrical temperature Field // *Journal of Thermal Stresses*. 1988. Vol. 13. P. 159–173.
- [39] Eraslan A., Orcan Y. Thermoplastic Response of a Linearly Hardening Cylinder Subjected to Nonuniform Heat Source and Convective Boundary Condition // *Mechanics Based Design of Structures and Machines: An International Journal*. 2004. Vol. 32. P. 133–164.
- [40] Eraslan A., Orcan Y. Thermal Stresses in Elastic-Plastic Tubes With Temperature-Dependent Mechanical And Thermal Properties // *Journal of Thermal Stresses*. 2001. Vol. 24. P. 1097–1113.
- [41] Guven U., Altay O. Elastic-Plastic Solid Disk With Nonuniform Heat Source Subjected to External Pressure // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000. Vol. 42. P. 831–842.
- [42] Guven U., Altay O. Linear Hardening Solid Disk With Rigid Casing Subjected to a Uniform Heat Source // *Mechanics Research Communications*. 1998. Vol. 25. P. 679–684.
- [43] Gulgec M., Orcan Y. On The Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Cylinder Exhibiting Linear Hardening // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM)*. 1999. Vol. 79. P. 493–498.
- [44] Eraslan A., Orcan Y. Computation of Transient Thermal Stresses in Elastic-Plastic Tubes: Effect of Coupling And Temperature Dependent Physical Properties // *Journal of Thermal Stresses*. 2002. Vol. 25. P. 559–572.
- [45] Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Disk // *Journal of Thermal Stresses*. 1985. Vol. 8. P. 41–51.
- [46] Mack W. Thermal Assembly of an Elastic-Plastic Hub And a Solid Shaft // *Arch. Appl. Mech*. 1993. Vol. 63. P. 42–50.
- [47] Bengeri M., Mack W. The Influence of the Temperature Dependence of the Yield Stress on the Stress Distribution in a Thermally Assembled Elastic-Plastic Shrink Fit // *Acta Mechanica*. 1994. Vol. 103. P. 243–257.
- [48] Kovacs A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits // *Periodica Polytechnica. Ser.: Mech. Eng*. 1996. Vol. 40. P. 103–112.
- [49] Kovacs A. Hardening Effects on the Stress Distribution in a Shrink Fit under Cyclic Thermal Loading // *Periodica Polytechnica Ser.: Mech. Eng*. 1991. Vol. 35. P. 49–64.