Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3 (41). С. 3–10

Светлой памяти
Геннадия Ивановича Быковцева посвящается

А. А. Буренин

УРАВНЕНИЕ ВОЗМОЖНЫХ МОЩНОСТЕЙ В ДИНАМИКЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Приводится вывод уравнений возможных мощностей для случая, когда в среде возможно распространение поверхностей разрывов скоростей, на которых терпят разрыв необратимые деформации.

Ключевые слова: упругость, пластическое течение, уравнение возможных мощностей, ударные волны, диссипативные разрывы.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.011

УДК: 539.374

1. Введение.

Уравнение возможных мощностей в математической теории пластического течения служит вариационной постановке задач теории. С помощью данного уравнения указываются ограничения, при которых задачи теории пластичности имеют единственное решение [1,2]. Это же уравнение служит основанием для формирования экстремальных принципов теории упругопластического деформирования и предельных теорем [1,2] теории. Здесь запишем такое уравнение в условиях, когда в среде возможно распространение поверхностей сильных разрывов (ударных волн), где претерпевают разрывы не только скорости и напряжения, но и необратимые деформации.

2. Исходные модельные зависимости.

Деформации d_{ij} в деформируемом теле полагаем малыми и содержащими обратимую e_{ij} и необратимую p_{ij} составляющие [1,2]

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad (1)$$

Буренин Анатолий Александрович
`e-mail`: mail@imim.ru, доктор физико-математических наук, член корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Поступила 01.08.2019

Работа выполнена в рамках государственного задания № 075-00414-19-00.

Соотношения (1) записаны в прямоугольной декартовой системе координат x_i $(i = 1, 2, 3)$; u_i – компоненты вектора перемещений. Смысл составляющей p_{ij} не уточняем. Это могут быть и пластические деформации, и вязкие (деформации ползучести), и некоторая сумма их. Важно, что в составе полных деформаций d_{ij} присутствуют обратимые e_{ij}, задающие консервативный механизм деформирования, определяемый упругими свойствами среды. Поэтому e_{ij} иногда называем упругими деформациями, то есть далее упругие деформации и обратимые деформации означают одно и то же. Если в некотором объеме сплошной среды отсутствуют поверхности разрывов скоростей перемещений и, следовательно, деформаций и напряжений, то в любой ее точке выполняется локальное следствие закона сохранения энергии [3,4]

$$\begin{gathered}\rho\tfrac{de}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij},\\ \varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right); \quad v_i = \tfrac{du_i}{dt} \quad = \tfrac{\partial u_i}{\partial t}\end{gathered} \tag{2}$$

В (2) ρ – плотность среды, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, q_j – компоненты вектора теплового потока, e – плотность распределения внутренней энергии. Последняя является функцией деформаций d_{ij} и плотности распределения энтропии $s\left(t, x_1, x_2, x_3\right)$, то есть $e = e\left(d_{ij}, s\right)$. При этом согласно второму закону термодинамики [5]

$$\frac{de}{ds} = T, \tag{3}$$

где T – абсолютная температура. Относительно функции $e = e\left(e_{ij}, s\right)$ принимаем еще одно предположение. Пусть такая функция ответственна только за консервативный механизм деформирования, когда $e = e\left(e_{ij}, s\right)$, то есть является функцией только обратимых (упругих) деформаций [4]. Тогда, следуя (1) и (2), имеем:

$$\begin{gathered}\rho\tfrac{\partial e}{\partial e_{ij}}\varepsilon_{ij}^e + \rho\tfrac{\partial e}{\partial s}\tfrac{ds}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^e + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^p\\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p; \quad \varepsilon_{ij}^e = \tfrac{de_{ij}}{dt}; \quad \varepsilon_{ij}^p = \tfrac{dp_{ij}}{dt}\end{gathered} \tag{4}$$

Отсюда, с учетом (3)

$$\left(\rho\frac{\partial e}{\partial e_{ij}} - \sigma_{ij}\right)\varepsilon_{ij}^e + \rho T\frac{ds}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^p$$

Отдельная возможность существования консервативного процесса упругого деформирования, диссипативных процессов деформирования и теплопроводности является термодинамическим следствием. Согласно этому следствию, получаем

$$\sigma_{ij} = \rho\frac{\partial e}{\partial e_{ij}} \tag{5}$$

$$\rho T\frac{ds}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^p \tag{6}$$

Перепишем уравнение баланса энтропии (6) в форме именно уравнения баланса

$$\begin{gathered}\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -J_{j,j} + \frac{1}{T}\sigma_{ij}\varepsilon^{p}_{ij} - \frac{1}{T^2}q_j T_{,j} \\ J_j = \rho s v_j + T^{-1}q_j\end{gathered} \tag{7}$$

Вектор с компонентами J_j является полным потоком энтропии. Он определяет поток энтропии в объеме, занимаемый телом, и перераспределения энтропии внутри деформируемого объема. За производство энтропии внутри объема ответственны два его источника внутри этого объема. Последний слагаемый правой части (7) задает производство энтропии за счет необратимого процесса теплопроводности, предпоследний – за счет процесса необратимого деформирования. Обратимый процесс только упругого деформирования является таким образом изоэнтропическим.

Далее принимаем адиабатическое приближение для процесса деформирования. Опираясь на то, что механические процессы являются неизмеримо более быстрыми по сравнению с процессом передачи тепла, считаем $q_j \equiv 0$. Иначе, коэффициент теплопроводности полагаем равным нулю. Тогда, следуя (6) и (7) запишем

$$\rho T\frac{dS}{dt} = \sigma_{ij}\varepsilon^{p}_{ij}; \quad \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\left(\rho s v_j\right)_{,j} + \sigma_{ij}\varepsilon^{p}_{ij} \tag{8}$$

Зависимость (5) приводит к закону Гука, если положить $\rho = \mathrm{const}$ и $\rho e = W\left(e_{ij}\right)$. Для изотропной среды имеем

$$\begin{gathered}W = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2; \\ I_1 = e_{kk}; \quad I_2 = e_{ij}e_{ji}\ ; \\ \sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь λ, μ – параметры Ламе. Выбор инвариантов I_1 и I_2 произволен. Если по соображениям следующим из практики применения линейных законов связи «напряжения-деформации», например, не устраивает нормальная изотропия материала среды уже на стадии обратимого деформирования, то можно принять $I_1 = e_{kk}$, $I_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\left(\sigma_1-\sigma\right)^2 + \left(\sigma_2-\sigma\right)^2 + \left(\sigma_3-\sigma\right)^2\right\}^{1/2}$. Инвариант I_2 в этом случае, где $\sigma = \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$, а σ_i главные значения тензора напряжений, называют интенсивностью напряжений. При таком выборе инвариантов непосредственно в квадратичном приближении для $W\left(I_1, I_2\right)$ приходим к материалам по – разному сопротивляющимся растяжению и сжатию [6]. Имеются примеры, когда в теории и расчетах удобно использовать зависимость, обратимую (9). Получим такое соотношение, введя термодинамический потенциал $\gamma\left(\sigma_{ij}, s\right)$ вида

$$\gamma\left(\sigma_{ij}, s\right) = \rho^{-1}e\left(e_{ij}, s\right) - \sigma_{ij}e_{ij} \tag{10}$$

Подстановка (10)в (2) позволяет записать

$$\left(e_{ij} - \rho\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma_{ij}}\right)\frac{d\sigma_{ij}}{dt} + \rho T\frac{ds}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij}\varepsilon^{p}_{ij}$$

Отсюда следует и определяющее соотношение, связывающее деформации с напряжениями

$$e_{ij} = \rho \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}} \tag{11}$$

и уравнение баланса энтропии (6) или (7).

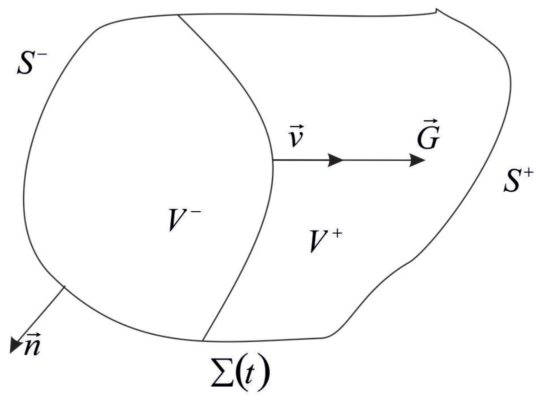

Рис. 1. Деформируемый объем и его деление на части поверхностью разрывов $\Sigma\,(t)$

Полагаем теперь, что в области V занимаемого деформируемым телом, движется поверхность Σ, делящая обьем V на две части V^+ и V^- (рис.1). В случае малых деформаций (1) и линейной зависимости деформаций от напряжений (9), (11) скорость продвижения данной поверхности G является постоянной. Динамические условия совместимости разрывов, являющиеся следствием законов сохранения, в общем случае имеют вид [7]:

$$\begin{gathered}
[\sigma_{ij}]\,\nu_j = \rho^+\left(v_j^+\nu_j - G\right)[v_i] \\
\sigma_{ij}^+\,[v_i]\,\nu_j = \rho^+\left(v_j^+\nu_j - G\right)\left\{\tfrac{[v_i][v_i]}{2} + [e]\right\} - [q_j]\,\nu_j
\end{gathered}$$

Здесь квадратными скобками обозначен разрыв переменной, так $[m] = m^+ - m^-$, где m^+ вычисляется непосредственно перед Σ, m^- – сразу за Σ; ν_j –компоненты единичной нормали к Σ. В рассматриваемом адиабатическом приближении для деформируемой среды $q_j \equiv 0$. В силу принятой малости деформаций пренебрегаем где это возможно слагаемыми, содержащими квадраты компонент v_j скоростей перемещений. В таком случае динамические условия совместности разрывов упрощаются и могут быть записаны в форме

$$\begin{gathered}
[\sigma_{ij}]\,\nu_j + \rho G\,[v_i] = 0 \\
[\sigma_{ij} v_i]\,\nu_j + \tfrac{1}{2}\rho G\,[v_i v_i + 2e] = 0
\end{gathered} \tag{12}$$

Разрыв $[e]$ плотности распределения внутренней энергии $e = e\,(e_{ij}, s)$ можно вычислить представив ударную волну Σ тонким переходным слоем, где одинаково проявляются как консервативные, так и диссипативные свойства процесса деформирования. Проинтегрировав по переходному слою найдем

$$\rho\left[e\right]=\frac{1}{2}\left[\sigma_{ij}e_{ij}\right]+\int_{p_{ij}^{+}}^{p_{ij}^{-}}\sigma_{ij}dp_{ji} \tag{13}$$

Подстановка (13) во второе соотношение (12) позволяет переписать следствие закона сохранения энергии в виде

$$\frac{1}{2}\rho G\left[v_iv_i\right]+\left[\sigma_{ij}v_i\right]\nu_j+\frac{G}{2}\left[\sigma_{ij}e_{ij}\right]+G\int_{p_{ij}^{+}}^{p_{ij}^{-}}\sigma_{ij}dp_{ij}=0 \tag{14}$$

Если воспользоваться геометрическими и кинематическим условиями совместности разрывов [8]

$$\begin{gathered}\left[m_{,j}\right]=\gamma\nu_j+g^{\alpha\beta}\left[m\right]_{,\alpha}x_{j,\beta}\\ \left[\dot{m}\right]=-G\gamma+\tfrac{\delta[m]}{\delta t};\quad g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta}=\delta_{\beta}^{\alpha}\end{gathered} \tag{15}$$

то можно получить зависимости

$$\begin{gathered}\left[v_i\right]=G\left[u_{i,j}\right]\nu_j\\ \left[e_{ij}\right]=-\tfrac{1}{2G}\left(\left[v_i\right]\nu_j+\left[v_j\right]\nu_i\right)\end{gathered}$$

Используем последнее в следующих тождественных преобразованиях

$$\left[\sigma_{ij}v_i\right]\nu_j=\sigma_{ij}^{+}\left[v_i\right]\nu_j+v_i\left[\sigma_{ij}\right]\nu_j-\left[\sigma_{ij}\right]\left[v_i\right]\nu_j=$$

$$=\tfrac{1}{2}\sigma_{ij}^{+}\left(\left[v_i\right]\nu_j+\left[v_j\right]\nu_i\right)-\rho Gv_i^{+}\left[v_i\right]+\rho G\left[v_i\right]\left[v_i\right]=$$

$$=-G\sigma_{ij}^{+}\left[e_{ij}\right]-\rho Gv_i^{+}\left[v_i\right]+\rho G\left[v_i\right]\left[v_i\right]$$

$$\tfrac{1}{2}\rho\left[v_iv_i\right]=\rho Gv_i^{+}\left[v_i\right]-\tfrac{1}{2}\rho G\left[v_i\right]\left[v_i\right]$$

Эти соотношения позволяют переписать (14) в виде:

$$-\tfrac{1}{2}\rho G\left[v_i\right]\left[v_i\right]+\rho Gv_i^{+}\left[v_i\right]-G\sigma_{ij}^{+}\left[e_{ij}\right]-\rho Gv_i^{+}\left[v_i\right]+\rho G\left[v_i\right]\left[v_i\right]+$$

$$+\tfrac{1}{2}G\left[\sigma_{ij}e_{ij}\right]+G\int_{p_{ij}^{+}}^{p_{ij}^{-}}\sigma_{ij}dp_{ij}=0,$$

или, приводя в последнем равенстве подобные и вычисляя разрыв произведений, запишем

$$\begin{gathered}-\tfrac{1}{2}\rho G\left[v_i\right]\left[v_i\right]-G\sigma_{ij}^{+}\left[e_{ij}\right]-G\sigma_{ij}^{+}\left[p_{ij}\right]+\tfrac{1}{2}G\sigma_{ij}^{+}\left[e_{ij}\right]+\tfrac{1}{2}Ge_{ij}^{+}\left[\sigma_{ij}\right]-\\ -\tfrac{1}{2}G\left[\sigma_{ij}\right]\left[e_{ij}\right]+G\int_{-p_{ij}^{+}}^{p_{ij}^{-}}\sigma_{ij}dp_{ij}=0,\end{gathered}$$

Замечаем, что согласно теореме Бетти для линейной упругой среды $\sigma_{ij}^{+}\left[e_{ij}\right]-e_{ij}^{+}\left[\sigma_{ij}\right]=0$. Тогда из последнего равенства следует

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}^{+}+\sigma_{ij}^{-}\right)\left[p_{ij}\right]=\int_{p_{ij}^{+}}^{p_{ij}^{-}}\sigma_{ij}dp_{ij} \tag{16}$$

Соотношение (16) представляет таким образом прямое следствие закона сохранения энергии на поверхности разрывов Σ. Важно, что оно является следствием только предположения об изотропной линейной связи «напряжения-деформации», то есть в рамках закона Гука (9). Механизм необратимого деформирования может быть любым.

Отмечаем, что второй слагаемый в правой части уравнения баланса энтропии, являсь источником энтропии, обязан быть при $\varepsilon_{ij}^p \neq 0$ строго положительным. Так как всегда $T > 0$, то $\sigma_{ij}\varepsilon_{ji}^p > 0$. Следовательно $\sigma_{ij}dp_{ji} > 0$ $(dt > 0)$. Но тогда

$$\int_{p_{ij}^+}^{p_{ij}^-} \sigma_{ij}dp_{ij} > 0; \quad -\frac{\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-}{2}\left[p_{ij}\right] > 0 \tag{17}$$

Данные ограничения на процессы в ударной волне накладывает второй закон термодинамики. Замечаем, что в случае только обратимого деформирования неравенства (17) обращаются в тождество. Они имеют смысл только при $\varepsilon_{ij}^p \neq 0$. Но ударная волна в упругой (гиперупругой [9]) также является необратимым процессом; в [10] показано, что в этом случае требование второго закона термодинамики сводится также к неравенству, накладываемому только на $[e]$ или $[\gamma]$. Причем эти разрывы полностью определяются параметрами обратимого деформирования. Следовательно, в упругой среде существует аналог теоремы Цемплена, известной в газовой динамике [11]. В рассматриваемом случае диссипативной поверхности разрывов скоростей роль теоремы Цемплена играют неравенства (17).

В объемах V^+ и V^-, на которые делит поверхность $\Sigma(t)$ объем V наряду с уравнением баланса внутренней энергии (1) выполняется уравнение движения

$$\sigma_{ij,j} + \rho\chi_i = \rho\frac{d^2u}{dt^2} \tag{18}$$

Обозначим через n_j компоненты внешней единичной нормали к поверхности $S = S^+ + S^-$ динамически деформируемого тела (рис. 1)

Проведем цепочку следующих тождественных преобразований

$$\int_S \sigma_{ij}v_in_jdS = \int_{S^+} \sigma_{ij}v_in_jdS + \int_{S^-} \sigma_{ij}v_in_jdS =$$

$$= \int_{S^+} \sigma_{ij}v_in_jdS + \int_\Sigma \sigma_{ij}^- v_i^- \nu_jd\Sigma - \int_\Sigma \sigma_{ij}^+ v_i^+ \nu_jd\Sigma + \int_\Sigma \left[\sigma_{ij}v_i\right]\nu_jd\Sigma =$$

$$= \int_{V^+} \rho v_i\frac{\partial v_i}{\partial t}dV + \int_{V^-} \rho v_i\frac{\partial v_i}{\partial t}dV + \int_{V^+} \sigma_{ij}v_{i,j}dV + \int_{V^-} \sigma_{ij}v_{i,j}dV -$$

$$- \int_{V^+} \rho\chi_iv_idV - \int_{V^-} \rho\chi_iv_idV + \int_\Sigma \left[\sigma_{ij}v_i\right]\nu_jd\Sigma =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{V^+} \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_iv_i + \sigma_{ij}e_{ij}\right)dV + \int_{V^-} \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_iv_i + \sigma_{ij}e_{ij}\right)dV\right] +$$

$$+ \int_{V^+} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^pdV + \int_{V^-} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^pdV - \int_V \rho\chi_iv_idV + \int_\Sigma \left[\sigma_{ij}v_i\right]\nu_jd\Sigma =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_V \left(\rho\frac{v_iv_i}{2} + \frac{\sigma_{ij}e_{ij}}{2}\right)dV + \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^pdV - \int_V \rho\chi_iv_idV +$$

$$+ \int_\Sigma \left(\rho G\frac{[v_iv_i]}{2} + G\frac{[\sigma_{ij}e_{ij}]}{2} + \left[\sigma_{ij}v_i\right]\nu_j\right)d\Sigma$$

Здесь с целью исключения объемов V^+ и V^- использовалось следствие закона сохранения массы

$$\frac{d}{dt}\int_{V^+} g\left(t, x_1, x_2, x_3\right) dt = \int_{V^+} \frac{\partial g}{\partial t} dV + \int_{S^+} g v_j n_j dS - \int_{\Sigma} g G d\Sigma$$

и аналогичное соотношения для V^-. Для подынтегрального выражения в поверхностном интеграле по Σ после некоторых тождественных преобразований можно получить

$$\rho G \frac{[v_i v_i]}{2} + \frac{G}{2}\left[\sigma_{ij} v_i\right] \nu_j = -\frac{\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-}{2}\left[p_{ij}\right]$$

Таким образом получаем окончательное соотношение

$$\begin{gathered} \int_S \sigma_{ij} v_i n_j dS + \int_V \rho \chi_i v_i dv = \\ = \frac{d}{dt}\int_V \left(\rho \frac{v_i v_i}{2} + \frac{\sigma_{ij} e_{ji}}{2}\right) dV + \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p dV - \int_\Sigma \frac{\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-}{2}\left[p_{ji}\right] d\Sigma \end{gathered} \tag{19}$$

Соотношение (19) и является искомым уравнением возможных мощностей, или по терминологии [1] уравнением скорости виртуальных работ. Согласно этому уравнению мощность внешнего воздействия на тело (левая часть (19)) расходуется на скорость изменения кинетической и потенциальной (упругой) энергии в теле (первое слагаемое правой части (19)), и на диссипацию энергии в объеме V и на поверхности Σ (соответсвующие последующие слагаемые правой части). Соотношение (16) подчеркивает термодинамический смысл последнего слагаемого в (19).

3. Заключение.

Отдельно следует заметить, что уравнение (19) записано в условиях, что деформации являются малыми, полные деформации считаются складывающимися из своих обратимых и необратимых составляющих. Для напряжений и обратимых (упругих) деформаций выполняются зависимости линейной изотропной теории упругости (в частности теорема Бетти [12]). Диссипативный механизм деформирования не конкретизируется; он может быть любым по предпочтениям исследователя.

Очевидно, что уравнение (19) может быть распространено на случаи, когда в теле присутствуют не одна, а несколько поверхностей разрывов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

[2] Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.

[3] Курапатенко В.Ф. Модели механики сплошных сред. Челябинск: Геотур, 2007. 303 с.

[4] Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Большие необратимые деформации и упругое последействие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.

[5] Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 457 с.

[6] Буренин А.А., Ярушина В.М. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // В кн. «Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород». К 75-летию академика Шемякина Е.И. М.: Физматлит. 2006. С. 100-106.

[7] Седовский В.М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука-Физматлит, 1997. 208 с.

[8] Томос Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.

[9] Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит,, 1963. 312 с.

[10] Буренин А. А., Чернышов А. Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве //ПММ. 1978. Т. 42. В.4. С. 711–717

[11] Рахматуллин Х.А., Сагомонян А.Я., Бунимович А.И., Зверев Н.Н. Газовая динамика. М.: Высш. Школа, 1965. 722 с.

[12] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

A. A. Burenin

VIRTUAL POWER PRINCIPLE IN DYNAMICS OF ELASTIC-PLASTIC SOLIDS

Institute of Machine Science and Metallurgy of FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. The derivation of the equations of virtual powers is given for the case when it is possible to propagate the surfaces of velocity discontinuities in the medium at which irreversible deformations undergo rupture.

Keywords: elasticity, plastic flow, equation of possible powers, shock waves, dissipative discontinuities

REFERENCES

[1] Bykovtsev G.I., Ivlev D.D. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian)
[2] Ishlinsky A.Yu., Ivlev D.D. Mathematical theory of plasticity. M.: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian)
[3] Kuropatenko V.F. Model of continuum mechanics. Chelyabinsk: Geotur, 2007. 303 p. (in Russian)
[4] Burenin A.A., Kovtanyuk L.V. Large irreversible deformations and elastic aftereffect. Vladivostok: Dalnauka, 2013. 312 p. (in Russian)
[5] De Groot S., Mazur P. Nonequilibrium thermodynamics. Moscow: Mir, 1964. 457 p. (in Russian)
[6] Burenin A.A., Yarushina V.M. To modeling of deformation of materials, differently resisting stretching and compression // In in. "Problems of mechanics of deformable solids and rocks". To the 75th anniversary of Shemyakin E. I. M.: Fizmatlit. 2006. pp. 100–106. (in Russian)
[7] Sadovsky V.M. Discontinuous solutions in problems of dynamics of elastic-plastic media. Moscow: Nauka-Fizmatlit, 1997. 208 p. (in Russian)
[8] Tomoe T. Plastic flow and fracture in solids. Moscow: Mir, 1964. 308 p. (in Russian)
[9] Prager V. Introduction to continuum mechanics. M.: Izd-vo Inostr. lit, 1963. 312 p. (in Russian)
[10] Burenin A.A., Chernyshov A.D. Shock waves in an isotropic elastic space //PMM. 1978. Vol. 42. I. 4. p. 711–717. (in Russian)
[11] Rakhmatullin H.A., Sagomonyan A.Ya., Bunimovich A. I., Zverev N.N. Gas dynamics. M.: No. School, 1965. 722 p. (in Russian)
[12] Novatsky V. Theory of elasticity. Moscow: Mir, 1975. 872 p. (in Russian)

Burenin Anatoliy Aleksandrovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Corresponding member of RAS, Principal researcher of the Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.