Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3 (41). С. 11–29

Ю. Н. Радаев, Е. В. Мурашкин

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ НА РАСТУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Работа посвящена выводу определяющих соотношений на поверхности наращивания. Предложенный подход основывается на результатах, известные из алгебры рациональных инвариантов. Аргументы тензорных функционалов выбраны с учетом их инвариантности относительно локальных поворотов координатного репера относительно нормали к поверхности наращивания. Построена полная система совместных рациональных инвариантов тензора напряжений и единичного вектора нормали к поверхности наращивания. Проведена геометрическая визуализация рассматриваемых рациональных инвариантов. Приведен вывод формул преобразования операторов дифференцирования вдоль координатных направлений на касательной плоскости к поверхности наращивания при переходе от заданной ортогональной сетки к произвольной (необязательно ортогональной) криволинейной сетке. Полученные граничные условия на поверхности наращивания геометрически и механически непротиворечивы. Сформулированные дифференциальные ограничения подразумевают экспериментальную идентификацию нескольких определяющих функций. Симметрия тензора напряжений при моделировании не учитывается.

Ключевые слова: аддитивное производство, 3D-печать, поверхностный рост, поверхность наращивания, остаточное напряжение, определяющее уравнение, рациональный инвариант, дифференциальное ограничение, полная система, производная по направлению

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.012

УДК: 539.374

Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17–19–01257).

Поступила 20.03.2019

Введение. Традиционные методы изготовления изделий сложной формы подразумевают разнообразные технологические процессы обработки, как связанные со снятием материала, так и основанные на синтезе изделий путем последовательного нанесения материала на поверхность произвольной формы. Изготовление изделий путем добавления нового материала широко используется в современной инженерной практике [1]. К таким способам аддитивного производства относятся: лазерная стереолитография [2], селективное лазерное спекание, электронно-лучевая плавка, моделирование методом наплавления, метод многоструйного моделирования, изготовление объектов с использованием ламинирования, 3D–печать [3], компьютерная осевая литография, послойное бетонирование [4].

3D Printing (3DP) аналогичен технологии селективного лазерного спекания, только здесь не используется плавление: объект формируется из порошкового материала путём склеивания, с использованием струйной печати для нанесения жидкого клея. Технология 3D–печати позволяет производить цветное моделирование за счет добавления в клей красителей (непосредственно во время печати), или за счет использования нескольких печатающих головок с цветным клеем [3].

Послойное бетонирование конструкций также относится к методам аддитивных технологий [4]. Послойное бетонирование можно разделить на два вида, в зависимости от времени между заливками. В случае “горячего шва” перерыв между слоями меньше 12 часов. Второй тип послойной заливки — “холодный шов”. В этом случае необходимо дождаться полного затвердевания предыдущего слоя для исключения возможного растрескивания не затвердевшей части под действием вновь добавленного материала.

Методы аддитивного производства, описанные выше, в основе своей используют хорошо известные природные процессы: аккреция космических объектов, формирование лавин и ледников, процессы роста кристаллов, рост атеросклеротических бляшек [5, 6]. Для всех этих явлений характерен поверхностный рост. Рост атеросклеротической бляшки можно описать как процесс изначальной инфильтрации компонентов плазмы крови в тонкий приповерхностный слой внутренней стенки артерии. Рост зародыша кристалла происходит путем присоединения к его поверхности отдельных атомов или их групп.

Основная особенность наращиваемого тела состоит в том, что тело формируется (“достраивается”) в процессе деформирования. Это обстоятельство, разумеется, существенно осложняет анализ таких процессов деформирования по сравнению с телами, состав материальных частиц которых в ходе деформирования не меняется. Достаточно упомянуть ситуацию, которая имеет место в динамике абсолютно твердого тела переменной массы — учет переменности массы, с одной стороны, приводит к более сложным математическим задачам, а с другой стороны, — порождает качественно новые эффекты в поведении тел. Естественно ожидать, что при обобщении этой модели на деформируемые тела произойдет дальнейшее усложнение начально-краевых задач, а влияние параметров наращивания на реакцию тела станет более многообразным.

Некоторые наиболее существенные отличия математической модели наращиваемого тела от классической модели тела постоянного состава кратко анализируются в работе обзорного характера [1]. Эти различия проявляются уже при описании движения наращиваемого тела как увеличивающейся совокупности материальных частиц.

Решение каждой конкретной задачи наращивания деформируемых тел представляет собой самостоятельную и трудоемкую проблему [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Существенной особенностью постановки краевых задач механики наращиваемых тел является постановка граничных условий на поверхности раздела исходного материала и наращиваемой части [14, 15, 16]. В настоящей работе будут рассматриваться несколько вариантов определяющих соотношений на поверхности наращивания, начиная от простейших соотношений (см. известную книгу Г. И. Быковцева: [16], С. 288–292) до некоторых существенных обобщений теории. При изложении будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в публикациях [16, 17, 18, 19, 20].

1. Понятия и уравнения, связанные с наращиваемой поверхностью. 1.1. Концептуальные особенности механики поверхностного роста. В силу особенностей наращиваемого тела изменение его геометрической формы обусловлено двумя факторами — искажением под действием нагрузок (это обычный в механике деформируемых тел фактор) и формоизменением за счет добавления материала по его внешней поверхности. Последний фактор характерен именно для тел переменного состава. Для правильного описания напряженно-деформированного состояния тела необходимо четко различать оба механизма формоизменения тела в рамках соответствующей математической модели. Укажем здесь на такой элементарный пример. Предположим, что первоначально имеется сплошной шар из сжимаемого материала. Внешним давлением он обжимается в радиальном направлении. Бели он при этом не наращивается, то его внешний радиус при прогрессирующем обжатии будет уменьшаться и это изменение размеров будет очевидным признаком наличия напряжений внутри его. В случае же наращивания внешний радиус шара может вести себя по-разному в зависимости от конкретных обстоятельств — как убывать, так и возрастать. В частности,он может оставаться и постоянным, если скорость притока материала к внешней поверхности соответствующим образом согласована с нарастанием интенсивности внешнего давления на шар. Можно также наращивать исходный шар в отсутствие внешнего давления и снова получать разительно различающиеся распределения напряжений, если варьировать окружное “натяжение” приращиваемых элементарных слоев. Во всяком случае совершенно ясно, что изменение геометрических характеристик наращиваемого тела почти ничего не говорит о его напряженном состоянии. В этом состоит одно из принципиальных отличий наращиваемого тела от тела постоянного состава.

В классической механике деформируемого твердого тела обычно считается, что множество материальных частиц, образующих данное тело, не изменяется в процессе его деформирования. Такие материальные объекты условимся называть телами постоянного состава. Однако, многообразие процессов деформирования, с которыми мы сталкиваемся в окружающей нас действительности, не укладывается в рамки этих представлений. Под воздействием разнообразных факторов множество частиц, образующих тело, может изменяться в очень широких пределах. Такие тела называются далее *телами переменного состава*. Встречаются ситуации, когда тело в процессе деформирования теряет свои частицы — так происходит, например, при коррозионных повреждениях, износе, абляции, эрозии, расплавлении. В подобных ситуациях можно говорить о телах уменьшающегося состава или, короче, *распадающихся телах*. Весьма часто приходится сталкиваться также со случаями увеличения массы деформируемого тела за счет добавления к нему новых материальных частиц. Так происходит, например, при последовательном возведении массивных бетонных конструкций, намораживании льда, изготовлении деталей способами намотки и напыления, выращивании кристаллов и т. д. Тела, переменность состава которых обусловлена притоком материала к ним извне, будем называть наращиваемыми телами. Заметим, что в динамику абсолютно твердого тела понятие тела переменного состава (массы) было введено И.В. Мещерским еще в конце прошлого века, однако понятие деформируемого твердого тела переменного состава появилось в механике существенно позднее.

Важно отметить, что "зарождение" или "исчезновение" материальных частиц может, в принципе, происходить как внутри тела, так и на его поверхности. По первому типу протекают, например, процессы биологического роста или деградации тканей, а по второму типу — разнообразные технологические процессы (напыление, затвердевание, намотка и т. п.). В дальнейшем будут рассматриваться только процессы наращивания деформируемых тел, поскольку этот случай значительно сложнее с точки зрения его математического моделирования, чем случай распадающегося тела. Кроме того, все рассмотрения будут ограничены процессами наращивания по внешней поверхности тела. Явления зарождения частиц во внутренних точках тела из рассмотрения исключаются.

Процесс присоединения к телу новых элементов будем называть *наращиванием*, а соответствующую часть внешней поверхности, к которой в текущий момент времени присоединяются бесконечно тонкие слои материала, — *поверхностью наращивания*. Поверхностью наращивания может быть вся свободная внешняя поверхность тела (односвязная или многосвязная) или ее часть. Тело, существовавшее до начала наращивания, будем называть *основным телом*. Тело, составленное из материальных элементов, которые присоединились к основному телу за промежуток времени от момента начала наращивания до рассматриваемого момента времени, назовем *дополнительным телом*, а объединение основного тела с дополнительным телом — *растущим телом* или *наращиваемым телом*. Возможны процессы наращивания, начинающиеся с зарождения единственной материальной частицы, когда основное тело, как таковое, отсутствует. Такая возможность в последующих рассуждениях, как правило, не исключается. Однако, учитывая особенности реальных процессов наращивания, будем предполагать, что основное тело существует.

Процессы наращивания целесообразно классифицировать еще по одному признаку — на *дискретные* и *непрерывные*. При дискретном наращивании к телу в отдельные моменты времени присоединяются объемы материала конечных размеров, а при непрерывном к телу постоянно добавляются бесконечно малые частицы или, скажем,бесконечно тонкие слои материала. Итак, основными характерными чертами рассматриваемой здесь концепции наращиваемого деформируемого твердого тела являются следующие: 1) дополнительные элементы материала присоединяются к телу по его внешней поверхности; 2) процесс наращивания протекает непрерывно — за каждый бесконечно малый промежуток времени к телу присоединяется инфинитезимальный объем материала; 3) наращивание происходит одновременно с нагружением тела поверхностными и/или массовыми силами. Одна из принципиально важных особенностей процесса наращивания состоит в том, что приращиваемые элементы могут находиться как в ненапряженном (естественном) состоянии, так и в, вообще говоря, произвольном состоянии "преднапряжения", которое никак не согласовано с состоянием поверхностного слоя тела, к которому они присоединяются.

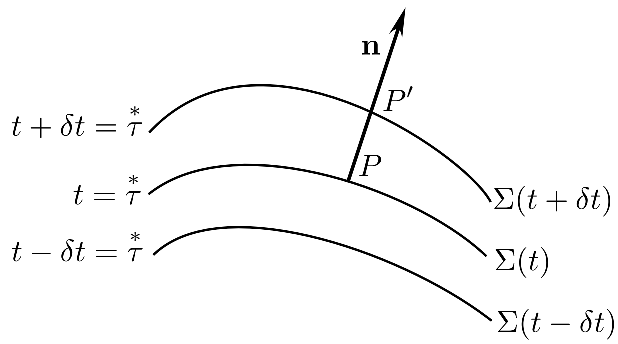

Рис. 1. Распространяющаяся в пространстве поверхность наращивания Σ (Propagating Growing Surface).

1.2. Основные уравнения, связанные с растущей поверхностью. Зададим перемещающуюся в пространстве поверхность наращивания Σ в неявном виде уравнением

$$t = \overset{*}{\tau}(x^i). \tag{1}$$

В этом случае единичная нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности τ, направленная в сторону ее распространения, вычисляется через вектор пространственного градиента от (1), т.е.

$$n_i = c\,\partial_i \overset{*}{\tau}, \quad c = |\boldsymbol{\nabla} \overset{*}{\tau}|^{-1}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\nabla}$ — оператор Гамильтона, c — линейная скорость поверхности наращивания в направлении нормали $\mathbf{n}$, которая определяется согласно (Рис. 1)

$$c = \lim_{\delta t \to 0} \frac{|\overrightarrow{PP'}|}{\delta t}. \tag{3}$$

Для восстановления напряжений по известным скоростям можно воспользоваться формулами, данными в [16]:

$$\begin{aligned} \tau^{ij} &= \int\limits_{\overset{*}{\tau}+0}^{t} [\partial_{.} \tau^{ij}(x^k, t')]dt' + \mathfrak{I}^{ji} + \overset{*}{\tau}{}^{ij}(x^k), \\ \mathfrak{I}^{ij} &= \int\limits_{\overset{*}{\tau}-0}^{\overset{*}{\tau}+0} [\partial_{.} \tau^{ij}(x^k, t')]dt', \end{aligned} \tag{4}$$

где τ^{ij} — тензор напряжений Коши, $\partial_{.}$ — производная по времени при фиксированных координатах x^k, $\mathfrak{I}^{ji}$ — интеграл скачков напряжений, $\overset{*}{\tau}{}^{ij}(x^k) = \tau^{ij}(x^k, t)\big|_{t=\overset{*}{\tau}(x^s)-0}$ компоненты тензора напряжений, вычисленные в момент времени $t = \overset{*}{\tau}(x^s) - 0$ прямо перед моментом включения элемента в состав основного тела (Рис. 2). Момент времени $t = \overset{*}{\tau}(x^s) + 0$ соответствует моменту сразу после присоединения элемента к поверхности наращивания .

Подставим актуальные напряжения (4) в уравнение равновесия

$$\nabla_j \tau^{ji} + X^i = 0. \tag{5}$$

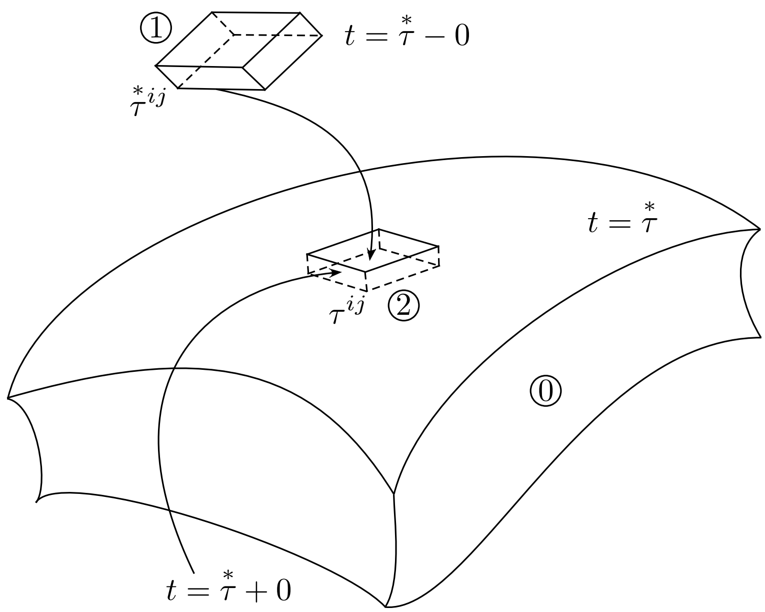

Рис. 2. Процесс поверхностного роста. 0) Основное тело. 1) Состояние элемента за момент до присоединения к основному телу. 2) Состояние элемента сразу после вхождения в состав основого тела.

Здесь $X^i = X^i(x^k, t)$ — объемные силы.

В результате получим

$$\nabla_j \left\{ \int\limits_{\overset{*}{\tau}+0}^{t} [\partial.\tau^{ji}(x^k, t')]dt' + \mathfrak{I}^{ji} + \overset{*}{\tau}{}^{ji}(x^k) \right\} + X^i = 0 \quad (t \geq \overset{*}{\tau} + 0). \tag{6}$$

Раскрывая скобки по правилу дифференцирования интеграла, зависящего от параметра[1], преобразуем соотношение (6) к виду

$$\int\limits_{\overset{*}{\tau}+0}^{t} \nabla_j [\partial.\tau^{ji}(x^k, t')]dt' + \nabla_j \mathfrak{I}^{ji} - (\nabla_j \overset{*}{\tau})[\partial.\tau^{ji}(x^k, t)]\Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x^s)+0} + \nabla_j \overset{*}{\tau}{}^{ji}(x^k) + X^i = 0. \tag{7}$$

Подставим формулу (2) в (7)

$$\int\limits_{\overset{*}{\tau}+0}^{t} \nabla_j [\partial.\tau^{ji}(x^k, t')]dt' + \nabla_j \mathfrak{I}^{ji} - c^{-1}[n_j \partial.\tau^{ji}(x^k, t)]\Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x^s)+0} + \nabla_j \overset{*}{\tau}{}^{ji}(x^k) + X^i = 0. \tag{8}$$

Меняя местами дифференцирования по пространственной и временной координате и вычисляя интеграл в (8) с учетом (5), получим

$$-X^i + \overset{*}{X}{}^i(x^k) + \nabla_j \mathfrak{I}^{ji} - c^{-1}[n_j \partial.\tau^{ji}(x^k, t)]\Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x^k)+0} + \nabla_j \overset{*}{\tau}{}^{ji}(x^k) + X^i = 0, \tag{9}$$

[1] Параметрами здесь выступают пространственные координаты x^k, причем нижний предел интегрирования зависит от x^k.

где $\overset{*}{X}{}^i(x^k) = X^i(x^k,t)\big|_{t=\overset{*}{\tau}(x^s)+0}$.

Окончательно, группируя подобные слагаемые и умножая обе части равенства (9) на c, получим дифференциальное ограничение на поверхности наращивания в тензорной форме

$$c[\boldsymbol{\nabla}\cdot\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}(x^k) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Im} + \overset{*}{\mathbf{X}}(x^k)] - [\mathbf{n}\cdot\partial.\boldsymbol{\tau}(x^k,t)]\Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x^s)+0} = \mathbf{0} \quad (t = \overset{*}{\tau}+0), \tag{10}$$

и координатной записи

$$c[\nabla_j\overset{*}{\tau}{}^{ji}(x^k) + \nabla_j\Im^{ji} + \overset{*}{X}{}^i(x^k)] - [n_j\partial.\tau^{ji}(x^k,t)]\Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x^s)+0} = 0 \quad (t = \overset{*}{\tau}+0). \tag{11}$$

На самом деле соотношения (10) и (11) не зависят от времени t.

Условие (10) следует рассматривать как дифференциальное ограничение для напряжений на поверхности наращивания. Действительно, если удастся выразить напряжения $\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}$ через актуальные напряжения $\boldsymbol{\tau}$ на поверхности наращивания Σ, то из соотношения (10) можно получить дифференциальное уравнение для напряжений $\boldsymbol{\tau}$. Альтернативные способы получения граничных условий на поверхности наращивания подробно обсуждались, например в публикациях [14, 15].

Отметим несколько специальных случаев формулировки дифференциального ограничения (11):

(1) При самоуравновешенности скачков напряжений ($\nabla_j\Im^{ji} = 0$) дифференциальное ограничение (11) можно записать в форме

$$c[\nabla_j\overset{*}{\tau}{}^{ji}(x^k) + \overset{*}{X}{}^i(x^k)] - [n_j\partial.\tau^{ji}(x^k,t)]\Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x^s)+0} = 0 \quad (t = \overset{*}{\tau}+0). \tag{12}$$

(2) Пусть, кроме того, напряженные состояния присоединяемых элементов самоуравновешены, т.е. справедливо

$$\nabla_j\overset{*}{\tau}{}^{ji}(x^k) = 0, \tag{13}$$

следовательно, дифференциальное ограничение (11) преобразуется к более простому виду

$$c[\overset{*}{X}{}^i(x^k)] - [n_j\partial.\tau^{ji}(x^k,t)]\Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x^s)+0} = 0 \quad (t = \overset{*}{\tau}). \tag{14}$$

(3) Если вдобавок к (12) и (13) отсутствуют объемные силы

$$X^i(x^k,t) = 0, \tag{15}$$

то условие (11) можно записать в виде

$$[n_j\partial.\tau^{ji}(x^k,t)]\Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x^s)+0} = 0 \quad (t = \overset{*}{\tau}). \tag{16}$$

или

$$[\partial.n_j\tau^{ji}(x^k,t)] - [\tau^{ji}(x^k,t)]\partial.n_j = 0 \quad (t = \overset{*}{\tau}+0). \tag{17}$$

(4) Если скорость распространения поверхности наращивания c равна нулю, то соотношение (11) преобразуется

$$[n_j\partial.\tau^{ji}(x^k,t)]\Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x^s)+0} = \partial.[n_j\tau^{ji}(x^k,t)]\Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x^s)+0} = 0. \tag{18}$$

Откуда, после интегрирования по времени получаем хорошо известное из теории упругости краевое условие (без указания значений правой части):

$$[n_j \tau^{ji}(x^k, t)]\Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x^s)+0} = t^i(x^k). \tag{19}$$

В общем случае напряжения $\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}$ будут связаны с актуальными напряжениями на поверхности наращивания тензорно–функциональной зависимостью

$$\overset{*}{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\mathfrak{F}}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \ldots). \tag{20}$$

Многоточие в соотношении (20) означает возможную зависимость функции $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$ от дополнительных параметров, характеризующих процесс наращивания. В простейшей модели множество дополнительных параметров может быть пустым. В частности, функция $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$ может зависеть от микроструктурных директоров и теплофизических переменных связанных с растущей поверхностью. Физический смысл дополнительных директоров [17, 18, 19, 20] может быть связан с характерными направлениями выкладки волокон в тканных композитных материалах, арматуры в бетонных конструкциях, намотке нитей в катушке и т.д. Функция $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$, на самом деле, должна зависеть от таких комбинаций аргументов, которые инвариантны относительно поворотов вокруг оси, определяемой директором $\mathbf{n}$.

2. Простейший вариант дифференциального ограничения на поверхности наращивания. Рассмотрим инвариантно–геометрическую интерпретацию случая, обсуждаемого в работе [16]. Пусть на поверхности наращивания τ известны поверхностные усилия $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}. \tag{21}$$

В этом случае примем для сужения на двумерный плоский элемент T тензора $\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}$ обозначение $\underset{2d}{\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}}$ и будем оперировать с простейшей зависимостью

$$\underset{2d}{\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}} = \underset{2d}{\boldsymbol{\mathfrak{F}}}(\mathbf{t}, \mathbf{n}). \tag{22}$$

В декартовой системе координат тензоры $\underset{2d}{\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}}$ и $\underset{2d}{\boldsymbol{\mathfrak{F}}}$ представляются в форме 2×2 матриц:

$$\underset{2d}{\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{pmatrix} \overset{*}{\tau}_{11} & \overset{*}{\tau}_{12} \\ \overset{*}{\tau}_{21} & \overset{*}{\tau}_{22} \end{pmatrix}, \quad \underset{2d}{\boldsymbol{\mathfrak{F}}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_{11} & \mathfrak{F}_{12} \\ \mathfrak{F}_{21} & \mathfrak{F}_{22} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

В дальнейшем удобно воспользоваться разложением вектора поверхностных усилий (Рис. 3) на сумму составляющих в виде

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_\perp + \mathbf{t}_\parallel. \tag{24}$$

Здесь $\mathbf{t}_\perp$ — проекция вектора поверхностных усилий на касательную плоскость T к мгновенной поверхности наращивания Σ, $\mathbf{t}_\parallel$ — проекция на нормальное направление к поверхности наращивания.

В качестве аргументов тензорной функции $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$ выберем совместные рациональные инварианты тензора второго ранга $\boldsymbol{\tau}$ и вектора $\mathbf{n}$, неизменные при повороте координатного репера вокруг директора $\mathbf{n}$. В таком случае, рационально независимую систему рациональных инвариантов [21] выпишем в следующем виде:

$$|\mathbf{t}|^2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \quad |\mathbf{t}_\parallel| = |\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}|, \quad |\mathbf{t}_\perp|^2. \tag{25}$$

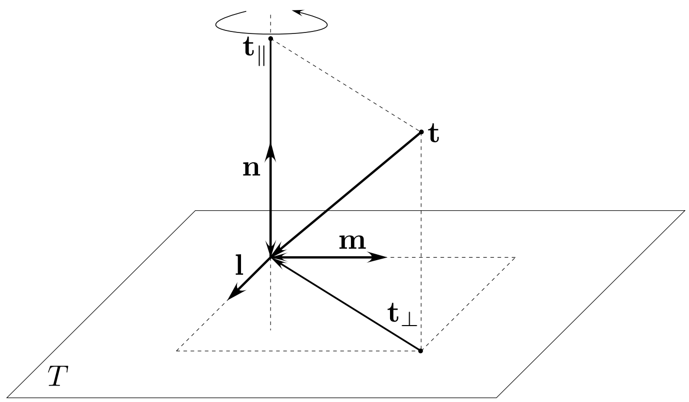

Рис. 3. Геометрическая визуализация вектора поверхностных усилий.

При этом, в системе инвариантов (25) существует очевидная сизигия

$$|\mathbf{t}|^2 = |\mathbf{t}_{\|}|^2 + |\mathbf{t}_{\perp}|^2. \tag{26}$$

Поэтому, устраняя первый инвариант в списке (25), система независимых рациональных инвариантов примет вид

$$|\mathbf{t}_{\|}|, \quad |\mathbf{t}_{\perp}|^2. \tag{27}$$

Определяющее соотношение на поверхности наращивания τ, с учетом (27), можно принять в форме

$$\underset{2d}{\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}} = \underset{2d}{\boldsymbol{\mathfrak{F}}}(|\mathbf{t}_{\|}|, |\mathbf{t}_{\perp}|^2). \tag{28}$$

Соотношение (28) имеет ясный механический смысл. Выберем декартову систему координат (Рис. 3) таким образом, чтобы орт $\mathbf{k}$ был направлен вдоль нормали $\mathbf{n}$ к поверхности наращивания, а для проекции вектора поверхностных усилий $\mathbf{t}$ в касательной плоскости T к поверхности наращивания справедливо следующее разложение

$$|\mathbf{t}_{\perp}|^2 = |\mathbf{t}_{\perp}\cdot\mathbf{l}|^2 + |\mathbf{t}_{\perp}\cdot\mathbf{m}|^2. \tag{29}$$

Тогда проекции вектора $\mathbf{t}$ на орты выбранной системы координат можно выразить через актуальные напряжения (здесь и далее индексы, заключенные в скобки $< \ldots >$, относятся к системе координат с базисом $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$)

$$|\mathbf{t}_{\|}| = |\tau_{<33>}|, \quad |\mathbf{t}_{\perp}\cdot\mathbf{l}|^2 = \tau^2_{<31>}, \quad |\mathbf{t}_{\perp}\cdot\mathbf{m}|^2 = \tau^2_{<32>}. \tag{30}$$

В итоге, определяющее соотношение (28) запишем в форме

$$\underset{2d}{\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}} = \underset{2d}{\boldsymbol{\mathfrak{F}}}(|\tau_{<33>}|, \tau^2_{<31>} + \tau^2_{<32>}). \tag{31}$$

Отметим, что соотношение (31) совпадает с аналогичным условием в работе [16]. Однако, в отличие от работы [16] тензор $\underset{2d}{\boldsymbol{\mathfrak{F}}}$ не является шаровым, т.е. имеется четыре определяющих функции на поверхности наращивания[2].

[2]В симметричном случае определяющих функций будет три. Для изотропного симметричного случая остается одна определяющая функция.

Подставив условие (31) в уравнение (11), получим дифференциальное ограничение для напряжений на поверхности наращивания в координатной форме

$$c[d_jF_{<ji>} + \overset{*}{X}_{<i>}(x_k)] - \partial.\tau_{<3i>}(x_k,t)\Big|_{t=\overset{*}{\tau}(x_s)+0} = 0 \ \ (i,j=1,2,3), \tag{32}$$

где d_j — оператор дифференцирования по направлениям:

$$d_3 = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}, \quad d_1 = \mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla}, \quad d_2 = \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla}, \tag{33}$$

т.е. в (33) индекс 3 соотвествует направлению нормали, а индексы 1 и 2 — касательным направлениям к поверхности наращивания. Подробное исследование аппарата операторов дифференцирования по направлению см. в [22]

Заметим, что система независимых совместных рациональных инвариантов (27) не является полной, в ней не учтены совместные инварианты, содержащие квадрат тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}$.

3. Инвариантно-полная формулировка дифференциального ограничения на поверхности наращивания. Полная система совместных инвариантов тензора второго ранга $\boldsymbol{\tau}$ и вектора $\mathbf{n}$, кроме инвариантов (27), включает в себя дополнительные инварианты

$$|\underset{2}{\mathbf{t}}_{\parallel}| = |\underset{2}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n}|, \quad |\underset{2}{\mathbf{t}}_{\perp}|^2, \quad |\mathbf{t}_{\perp}\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}_{\perp}|^2. \tag{34}$$

В соотношении (34) вектор $\underset{2}{\mathbf{t}}$ вычисляется в произвольной координатной сетке согласно

$$\underset{2}{\mathbf{t}} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}^2, \quad \underset{2}{t}_s = n_j\tau^{ji}\tau_{is} = t^i\tau_{is}. \tag{35}$$

Кроме того, следуя рассуждениям предыдущего раздела, для вектора $\underset{2}{\mathbf{t}}$ в (34) (Рис. 4) справедливо

$$\underset{2}{\mathbf{t}} = \underset{2}{\mathbf{t}}_{\parallel} + \underset{2}{\mathbf{t}}_{\perp}. \tag{36}$$

Вместо инварианта $|\mathbf{t}_{\perp}\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}_{\perp}|^2$ в (34) можно использовать $\cos^2\varpi$, в силу справедливости равенства

$$|\mathbf{t}_{\perp}\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}_{\perp}|^2 = |\mathbf{t}_{\perp}|^2|\underset{2}{\mathbf{t}}_{\perp}|^2\cos^2\varpi. \tag{37}$$

Полная система совместных рациональных инвариантов тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}$ и вектора $\mathbf{n}$ примет вид

$$|\mathbf{t}_{\parallel}|, \quad |\mathbf{t}_{\perp}|^2, \quad |\underset{2}{\mathbf{t}}_{\parallel}|, \quad |\underset{2}{\mathbf{t}}_{\perp}|^2, \quad |\mathbf{t}_{\perp}\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}_{\perp}|^2. \tag{38}$$

Тогда определяющее соотношение (20) на поверхности наращивания в терминах полной системы совместных инвариантов (38) асимметричного тензора второго ранга $\boldsymbol{\tau}$ и вектора $\mathbf{n}$, для сужения на двумерный плоский элемент T тензора $\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}$, примет вид

$$\underset{2d}{\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}} = \underset{2d}{\mathfrak{F}}(|\mathbf{t}_{\parallel}|, |\mathbf{t}_{\perp}|^2, |\underset{2}{\mathbf{t}}_{\parallel}|, |\underset{2}{\mathbf{t}}_{\perp}|^2, |\mathbf{t}_{\perp}\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}_{\perp}|^2). \tag{39}$$

Выберем, как и в предыдущем случае, декартову прямоугольную систему координат (Рис. 4) таким образом, чтобы орт $\mathbf{k}$ был направлен вдоль нормали $\mathbf{n}$ к поверхности наращивания. Для вектора проекции поверхностных усилий $\mathbf{t}$ в касательной плоскости T к поверхности наращивания примем (29), а для вектора $\underset{2}{\mathbf{t}}_{\perp}$ соответсвует очевидное равенство

$$|\underset{2}{\mathbf{t}}_{\perp}|^2 = |\underset{2}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\mathbf{l}|^2 + |\underset{2}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\mathbf{m}|^2. \tag{40}$$

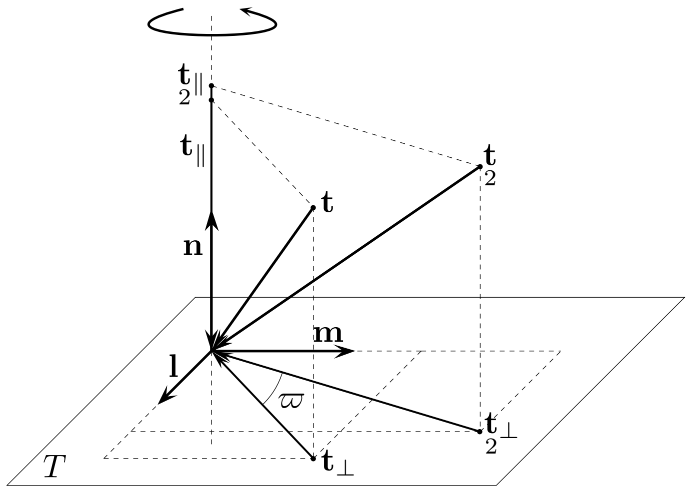

Рис. 4. Геометрическая визуализация векторов $\mathbf{t}$, $\underset{2}{\mathbf{t}}$ и его проекций.

Инварианты (27) и (38) и длин проекций (29) и (40) вычисляются через актуальные напряжения $\boldsymbol{\tau}$ на поверхности наращивания согласно

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{t}_\perp\cdot\mathbf{l}|^2=\tau^2_{<31>},\quad |\mathbf{t}_\perp\cdot\mathbf{m}|^2=\tau^2_{<32>},\quad |\mathbf{t}_\parallel|=|\tau_{<33>}|,\\
&|\underset{2}{\mathbf{t}}_\perp\cdot\mathbf{l}|^2=|\tau_{<3s>}\tau_{<s1>}|^2=|\tau_{<31>}\tau_{<11>}+\tau_{<32>}\tau_{<21>}+\tau_{<33>}\tau_{<31>}|^2,\\
&|\underset{2}{\mathbf{t}}_\perp\cdot\mathbf{m}|^2=|\tau_{<3s>}\tau_{<s2>}|^2=|\tau_{<31>}\tau_{<12>}+\tau_{<32>}\tau_{<22>}+\tau_{<33>}\tau_{<32>}|^2,\\
&|\underset{2}{\mathbf{t}}_\parallel|=|\tau_{<3s>}\tau_{<s3>}|=|\tau_{<31>}\tau_{<13>}+\tau_{<32>}\tau_{<23>}+\tau^2_{<33>}|, \qquad (41)\\
&|\mathbf{t}_\perp\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}_\perp|^2=|\tau_{<31>}\tau_{<3l>}\tau_{<l1>}+\tau_{<32>}\tau_{<3l>}\tau_{<l2>}|^2=\\
&\qquad=|\tau^2_{<31>}\tau_{<11>}+\tau_{<31>}\tau_{<32>}\tau_{<21>}+\tau^2_{<31>}\tau_{<33>}+\tau_{<32>}\tau_{<31>}\tau_{<12>}+\\
&\qquad+\tau^2_{<32>}\tau_{<22>}+\tau^2_{<32>}\tau_{<33>}|^2.
\end{aligned}$$

Последнее из данных выше соотношений, содержащее кубические по напряжениям слагаемые, следует отнести к классу никогда не используемых в механике деформируемого твердого тела.

Определяющее соотношение на поверхности наращивания (39) с учетом выражений (41) и приняв следующие обозначения для инвариантов,

$$\begin{aligned}
&I=|\tau_{<33>}|,\quad II=\tau^2_{<31>}+\tau^2_{<32>},\quad III=|\tau_{<31>}\tau_{<13>}+\tau_{<32>}\tau_{<23>}+\tau^2_{<33>}|,\\
&IV=|\tau_{<31>}\tau_{<11>}+\tau_{<32>}\tau_{<21>}+\tau_{<33>}\tau_{<31>}|^2+\\
&\qquad+|\tau_{<31>}\tau_{<12>}+\tau_{<32>}\tau_{<22>}+\tau_{<33>}\tau_{<32>}|^2, \qquad (42)\\
&V=|\tau^2_{<31>}\tau_{<11>}+\tau_{<31>}\tau_{<32>}\tau_{<21>}+\tau^2_{<31>}\tau_{<33>}+\tau_{<32>}\tau_{<31>}\tau_{<12>}+\\
&\qquad+\tau^2_{<32>}\tau_{<22>}+\tau^2_{<32>}\tau_{<33>}|^2.
\end{aligned}$$

можно выписать в форме

$$\underset{2d}{\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}}=\underset{2d}{\mathfrak{F}}(I,II,III,IV,V). \qquad (43)$$

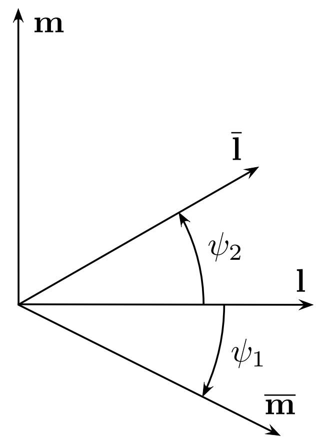

Рис. 5. Исходный и искаженный базисы в касательной плоскости к поверхности наращивания. ψ_1, ψ_2 — углы, характеризующие поворот и одновременно искажение ортогональной сетки на поверхности наращивания

или в упрощенной форме

$$\underset{2d}{\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}} = \underset{2d}{\mathfrak{F}}(I, II, III, IV). \tag{44}$$

Граничные условия в форме дифференциальных ограничений на поверхности наращивания (10), (11), в случае, когда приращиваемый материал обладает микроструктурными особенностями, можно обобщить введением в аргументы функции (20) дополнительных микроструктурных директоров, связанных с характерными направлениями выкладки материала в процессах намотки нитей или производстве тканных композитов.

4. Формулы преобразования для дифференциальных операторов d_1, d_2. В этом разделе мы рассмотрим вывод формул преобразования операторов $d_k (k = 1, 2)$ дифференцирования вдоль координатных направлений в касательной плоскости T при переходе от данной *ортогональной* сетки к произвольной (необязательно ортогональной) криволинейной сетке.

Предположим, что на плоскости T имеется локальный ортонормированный базис $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, а другой локальный базис состоит, вообще говоря, из неортогональных единичных векторов $\bar{\mathbf{l}}$, $\overline{\mathbf{m}}$, первый из которых отклоняется от орта $\mathbf{l}$ на угол ψ_1 по ходу часовой стрелки, а второй отклоняется от орта $\mathbf{l}$ на угол ψ_2 против хода часовой стрелки. Мы считаем, что оба угла положительны $\psi_1 > 0$, $\psi_2 > 0$, $\psi_1 + \psi_2 \neq \pi$. Углы ψ_1, ψ_2 могут, вообще говоря, изменяться при движении вдоль координатных линий локальной базисной системы $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ (Рис. 5).

Найдем формулы преобразования дифференциальных операторов

$$d_1 = \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nabla}, \quad d_2 = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nabla},$$
$$\overline{d_1} = \bar{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\nabla}, \quad \overline{d_2} = \overline{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\nabla},$$

при переходе от одной локальной базисной системы к другой. Эти операторы, как следует из их определения, представляют собой производные вдоль соответствующих координатных линий.

Коэффициенты разложения базисного вектора $\mathbf{l}$ вычислим по формуле

$$\mathbf{l} = \bar{\mathbf{l}}k_1 + \overline{\mathbf{m}}k_2, \tag{45}$$

тогда, на основании следующих соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{l}\cdot\bar{\mathbf{l}} &= \cos\psi_1 = k_1 + k_2\cos(\psi_1+\psi_2), \\ \mathbf{l}\cdot\overline{\mathbf{m}} &= \cos\psi_1 = k_2 + k_1\cos(\psi_1+\psi_2), \end{aligned} \tag{46}$$

коэффициенты в разложении (45) вычисляются в следующем виде

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\cos\psi_1 - \cos\psi_2\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}, \\ k_2 &= \frac{\cos\psi_2 - \cos\psi_1\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}, \end{aligned} \tag{47}$$

Аналогично для разложения базисного директора $\mathbf{m}$ имеем

$$\mathbf{m} = \bar{\mathbf{l}}s_1 + \overline{\mathbf{m}}s_2, \tag{48}$$

откуда с помощью уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{m}\cdot\bar{\mathbf{l}} &= -\sin\psi_1 = s_1 + s_2\cos(\psi_1+\psi_2), \\ \mathbf{m}\cdot\overline{\mathbf{m}} &= \sin\psi_1 = s_2 + s_1\cos(\psi_1+\psi_2), \end{aligned} \tag{49}$$

можно получить выражения для коэффициентов в разложении (48)

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-\sin\psi_1 - \sin\psi_2\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}, \\ s_2 &= \frac{\sin\psi_2 + \sin\psi_1\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}, \end{aligned} \tag{50}$$

Поскольку справедливы следующие зависимости

$$\begin{aligned} d_1 &= \mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla} = (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \overline{\mathbf{m}}k_2)\cdot\boldsymbol{\nabla} = \overline{d_1}k_1 + \overline{d_2}k_2, \\ d_2 &= \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla} = (\overline{d_1}s_1 + \overline{d_2}s_2)\cdot\boldsymbol{\nabla} = \overline{d_1}s_1 + \overline{d_2}s_2, \end{aligned}$$

то в итоге искомые формулы преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\cos\psi_1 - \cos\psi_2\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}\overline{d_1} + \frac{\cos\psi_2 - \cos\psi_1\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}\overline{d_2}, \\ d_2 &= \frac{-\sin\psi_1 - \sin\psi_2\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}\overline{d_1} + \frac{\sin\psi_2 + \sin\psi_1\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}\overline{d_2}, \end{aligned} \tag{51}$$

В случае преобразования поворота исходного базиса $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, т. е. когда

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} - \psi, \quad \psi_2 = \psi$$

полученные формулы (51) несколько упрощаются:

$$\begin{aligned} d_1 &= \sin\psi\overline{d_1} + \cos\psi\overline{d_2}, \\ d_2 &= -\cos\psi\overline{d_1} + \sin\psi\overline{d_2}, \end{aligned} \tag{52}$$

Обратное по отношению к (52) преобразование есть

$$\begin{aligned} \overline{d_1} &= \sin\psi d_1 - \cos\psi d_2, \\ \overline{d_2} &= \cos\psi d_1 + \sin\psi d_2, \end{aligned} \tag{53}$$

Далее в рамках указанного выше случая (поворот исходного базиса $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$) рассмотрим преобразование повторных дифференциальных операторов. Сначала положим, что угол ψ постоянен. Несложные вычисления показывают, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
d_1d_1 &= \sin^2\psi\overline{d_1d_1} + \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_2} + \overline{d_2d_1}) + \cos^2\psi\overline{d_2d_2},\\
d_2d_2 &= \cos^2\psi\overline{d_1d_1} - \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_2} + \overline{d_2d_1}) + \sin^2\psi\overline{d_2d_2},
\end{aligned}$$

откуда следуют формулы для операторов повторного дифференцирования

$$\begin{aligned}
&d_1d_1 + d_2d_2 = \overline{d_1d_1} + \overline{d_2d_2},\\
&d_1d_1 - d_2d_2 = -\cos 2\psi\overline{d_1d_1} + \sin 2\psi(\overline{d_1d_2} + \overline{d_2d_1}) + \cos 2\psi\overline{d_2d_2},
\end{aligned}$$

первая из которых указывает на инвариантность оператора $d_1d_1 + d_2d_2$ при поворотах локального базиса $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$. Замечая, что имеют место равенства

$$\begin{aligned}
-\,d_1d_2 &= \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_1} - \overline{d_2d_2}) + \cos^2\psi\overline{d_2d_1} - \sin^2\psi\overline{d_1d_2},\\
-\,d_2d_1 &= \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_1} - \overline{d_2d_2}) + \cos^2\psi\overline{d_1d_2} - \sin^2\psi\overline{d_2d_1},
\end{aligned}$$

приходим к формулам для смешанных производных по направлениям

$$\begin{aligned}
&d_1d_2 - d_2d_1 = \overline{d_1d_2} - \overline{d_2d_1},\\
&d_1d_2 + d_2d_1 = \sin 2\psi(\overline{d_1d_2} - \overline{d_2d_1}) + \cos 2\psi(\overline{d_1d_2} + \overline{d_2d_1}),
\end{aligned}$$

Первая из них устанавливает инвариантность оператора $d_1d_2 - d_2d_1$ при поворотах локального базиса $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$.

В случае поворота локального базиса на половину прямого угла имеем

$$\psi = \frac{\pi}{4},$$

и полученные только что формулы позволяют заключить, что

$$\begin{aligned}
d_1d_1 + d_2d_2 &= \overline{d_1d_1} + \overline{d_2d_2},\\
d_1d_2 - d_2d_1 &= \overline{d_1d_2} - \overline{d_2d_1},
\end{aligned}$$

Если угол ψ не является постоянным, то формулы преобразования повторных операторов несколько усложняются. Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}
d_1d_1 &= \sin^2\psi(\overline{d_1d_1} - (\overline{d_1}\psi)\overline{d_2}) + \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_2} + \overline{d_2d_1} - (\overline{d_1}\psi)\overline{d_1} + (\overline{d_2}\psi)\overline{d_2}) +\\
&\quad + \cos^2\psi(\overline{d_2d_2} + (\overline{d_2}\psi)\overline{d_1}),\\
d_2d_2 &= \cos^2\psi(\overline{d_1d_1} - (\overline{d_1}\psi)\overline{d_2}) - \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_2} + \overline{d_2d_1} - (\overline{d_1}\psi)\overline{d_1} + (\overline{d_2}\psi)\overline{d_2}) +\\
&\quad + \sin^2\psi(\overline{d_2d_2} + (\overline{d_2}\psi)\overline{d_1}),
\end{aligned}$$

откуда сразу находим выражение для суммы смешанных производных по направлению второго порядка

$$d_1d_1 + d_2d_2 = \overline{d_1d_1} + \overline{d_2d_2} + (\overline{d_2}\psi)\overline{d_1}) - (\overline{d_1}\psi)\overline{d_2}), \qquad (54)$$

На основании формул преобразования

$$\begin{aligned}
-\,d_1d_2 &= \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_1} - \overline{d_2d_2} - (\overline{d_1}\psi)\overline{d_2} - (\overline{d_2}\psi)\overline{d_1}) +\\
&\quad + \cos^2\psi(\overline{d_2d_1} - \overline{d_2}\psi)\overline{d_2}) - \sin^2\psi(\overline{d_1d_2} - \overline{d_1}\psi)\overline{d_1}),\\
-\,d_2d_1 &= \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_1} - \overline{d_2d_2} - (\overline{d_1}\psi)\overline{d_2} - (\overline{d_2}\psi)\overline{d_1}) +\\
&\quad + \cos^2\psi(\overline{d_1d_2} + \overline{d_1}\psi)\overline{d_1}) - \sin^2\psi(\overline{d_2d_1} - \overline{d_2}\psi)\overline{d_2}),
\end{aligned}$$

приходим к очевидному равенству

$$d_1d_2 - d_2d_1 = \overline{d_1d_2} - \overline{d_2d_1} + (\overline{d_1}\psi)\overline{d_1}) + (\overline{d_2}\psi)\overline{d_2}), \tag{55}$$

Тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ можно записать как линейную комбинацию базисных тензорных произведений в базисе $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} =&\tau_{<11>}\mathbf{l}\otimes\mathbf{l} + \tau_{<12>}\mathbf{l}\otimes\mathbf{m} + \tau_{<21>}\mathbf{m}\otimes\mathbf{l} + \tau_{<22>}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + \tau_{<23>}\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}+\\ &+ \tau_{<32>}\mathbf{n}\otimes\mathbf{m} + \tau_{<33>}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + \tau_{<13>}\mathbf{l}\otimes\mathbf{n} + \tau_{<31>}\mathbf{n}\otimes\mathbf{l}\end{aligned} \tag{56}$$

Преобразуем тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ для этого подставим в формулу (56) разложения базисных директоров $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ (45) и (48)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} =& \tau_{<11>}(\bar{\mathbf{l}}k_1 + \overline{\mathbf{m}}k_2)\otimes(\bar{\mathbf{l}}k_1 + \overline{\mathbf{m}}k_2) + \tau_{<12>}(\bar{\mathbf{l}}k_1 + \overline{\mathbf{m}}k_2)\otimes(\bar{\mathbf{l}}s_1 + \overline{\mathbf{m}}s_2)+\\ &+ \tau_{<21>}(\bar{\mathbf{l}}s_1 + \overline{\mathbf{m}}s_2)\otimes(\bar{\mathbf{l}}k_1 + \overline{\mathbf{m}}k_2) + \tau_{<22>}(\bar{\mathbf{l}}s_1 + \overline{\mathbf{m}}s_2)\otimes(\bar{\mathbf{l}}s_1 + \overline{\mathbf{m}}s_2)+\\ &+ \tau_{<23>}(\bar{\mathbf{l}}s_1 + \overline{\mathbf{m}}s_2)\otimes\mathbf{n} + \tau_{<32>}\mathbf{n}\otimes(\bar{\mathbf{l}}s_1 + \overline{\mathbf{m}}s_2) + \tau_{<33>}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}+\\ &+ \tau_{<13>}(\bar{\mathbf{l}}k_1 + \overline{\mathbf{m}}k_2)\otimes\mathbf{n} + \tau_{<31>}\mathbf{n}\otimes(\bar{\mathbf{l}}k_1 + \overline{\mathbf{m}}k_2)\end{aligned} \tag{57}$$

Раскроем скобки в (57) и получим выражение:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} =& \tau_{<11>}(\bar{\mathbf{l}}\otimes\bar{\mathbf{l}}k_1^2 + \bar{\mathbf{l}}\otimes\overline{\mathbf{m}}k_1k_2 + \overline{\mathbf{m}}\otimes\bar{\mathbf{l}}k_2k_1 + \overline{\mathbf{m}}\otimes\overline{\mathbf{m}}k_2^2)+\\ &+ \tau_{<12>}(\bar{\mathbf{l}}\otimes\bar{\mathbf{l}}k_1s_1 + \bar{\mathbf{l}}\otimes\overline{\mathbf{m}}k_1s_2 + \overline{\mathbf{m}}\otimes\bar{\mathbf{l}}k_2s_1 + \overline{\mathbf{m}}\otimes\overline{\mathbf{m}}k_2s_2)+\\ &+ \tau_{<21>}(\bar{\mathbf{l}}\otimes\bar{\mathbf{l}}s_1k_1 + \bar{\mathbf{l}}\otimes\overline{\mathbf{m}}s_1k_2 + \overline{\mathbf{m}}\otimes\bar{\mathbf{l}}s_2k_1 + \overline{\mathbf{m}}\otimes\overline{\mathbf{m}}s_2k_2)+\\ &+ \tau_{<22>}(\bar{\mathbf{l}}\otimes\bar{\mathbf{l}}s_1^2 + \bar{\mathbf{l}}\otimes\overline{\mathbf{m}}s_1s_2 + \overline{\mathbf{m}}\otimes\bar{\mathbf{l}}s_2s_1 + \overline{\mathbf{m}}\otimes\overline{\mathbf{m}}s_2^2)+\\ &+ \tau_{<23>}(\bar{\mathbf{l}}\otimes\mathbf{n}s_1 + \overline{\mathbf{m}}\otimes\mathbf{n}s_2) + \tau_{<32>}(\mathbf{n}\otimes\bar{\mathbf{l}}s_1 + \mathbf{n}\otimes\overline{\mathbf{m}}s_2)+\\ &+ \tau_{<33>}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + \tau_{<13>}(\bar{\mathbf{l}}\otimes\mathbf{n}k_1 + \overline{\mathbf{m}}\otimes\mathbf{n}k_2) + \tau_{<31>}(\mathbf{n}\otimes\bar{\mathbf{l}}k_1 + \mathbf{n}\otimes\overline{\mathbf{m}}k_2)\end{aligned} \tag{58}$$

Соберем слагаемые с одинаковыми тензорными произведениями базисных директоров $\bar{\mathbf{l}}$, $\overline{\mathbf{m}}$, $\overline{\mathbf{n}}$. После ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} =& (k_1^2\tau_{<11>} + k_1s_1\tau_{<12>} + k_1s_1\tau_{<21>} + s_1^2\tau_{<22>})\bar{\mathbf{l}}\otimes\bar{\mathbf{l}}+\\ &+ (k_1k_2\tau_{<11>} + k_1s_2\tau_{<12>} + s_1k_2\tau_{<21>} + s_1s_2\tau_{<22>})\bar{\mathbf{l}}\otimes\overline{\mathbf{m}}+\\ &+ (k_1k_2\tau_{<11>} + k_2s_1\tau_{<12>} + s_2k_1\tau_{<21>} + s_1s_2\tau_{<22>})\overline{\mathbf{m}}\otimes\bar{\mathbf{l}}+\\ &+ (k_2^2\tau_{<11>} + k_2s_2\tau_{<12>} + k_2s_2\tau_{<21>} + s_2^2\tau_{<22>})\overline{\mathbf{m}}\otimes\overline{\mathbf{m}}+\\ &+ (k_2\tau_{<13>} + s_2\tau_{<23>})\overline{\mathbf{m}}\otimes\mathbf{n} + (k_2\tau_{<31>} + s_2\tau_{<32>})\mathbf{n}\otimes\overline{\mathbf{m}}+\\ &+ \tau_{<33>}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + (k_1\tau_{<13>} + s_1\tau_{<23>})\bar{\mathbf{l}}\otimes\mathbf{n} + (k_1\tau_{<31>} + s_1\tau_{<32>})\mathbf{n}\otimes\bar{\mathbf{l}}\end{aligned} \tag{59}$$

Откуда, окончательно, формулы преобразования компонент тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}$ от исходного базиса к искаженному запишем в форме:

$$
\begin{aligned}
\tau_{<\overline{11}>} &= k_1^2\tau_{<11>} + k_1 s_1\tau_{<12>} + k_1 s_1\tau_{<21>} + s_1^2\tau_{<22>},\\
\tau_{<\overline{12}>} &= k_1 k_2\tau_{<11>} + k_1 s_2\tau_{<12>} + s_1 k_2\tau_{<21>} + s_1 s_2\tau_{<22>},\\
\tau_{<\overline{21}>} &= k_1 k_2\tau_{<11>} + k_2 s_1\tau_{<12>} + s_2 k_1\tau_{<21>} + s_1 s_2\tau_{<22>},\\
\tau_{<\overline{22}>} &= k_2^2\tau_{<11>} + k_2 s_2\tau_{<12>} + k_2 s_2\tau_{<21>} + s_2^2\tau_{<22>},\\
\tau_{<\overline{23}>} &= k_2\tau_{<13>} + s_2\tau_{<23>},\\
\tau_{<\overline{32}>} &= k_2\tau_{<31>} + s_2\tau_{<32>},\\
\tau_{<\overline{33}>} &= \tau_{<33>},\\
\tau_{<\overline{13}>} &= k_1\tau_{<13>} + s_1\tau_{<23>},\\
\tau_{<\overline{31}>} &= k_1\tau_{<31>} + s_1\tau_{<32>}.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Заключение.

(1) В работе выполнено исследование возможных, геометрически и механически непротиворечивых граничных условий на поверхности наращивания в форме дифференциальных ограничений.
(2) Получена общая форма дифференциальных ограничений для асимметричного тензора напряжений, справедливая для весьма широкого круга материалов и метаматериалов.
(3) Введен интеграл скачков напряжений на поверхности наращивания.
(4) Аргументы определяющей тензорной функции на поверхности наращивания определяются набором инвариантов, неизменных по отношению к поворотам координатного репера.
(5) Рассмотрена геометрическая интерпретация простейшего варианта дифференциального ограничения. Дана инвариантно–полная формулировка.
(6) Развитый подход подразумевает экспериментальную идентификацию определяющих тензорных функций на поверхности наращивания.
(7) Полученные результаты могут служить общей основой в прикладных исследованиях по механике растущих тел с асимметричным тензором напряжений.
(8) Приведены формулы преобразования дифференциальных операторов на касательной плоскости к поверхности наращивания.
(9) Симметрия тензора напряжений не учитывается, что позволяет использовать результаты и в асимметричных моделях механики континуума.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Loughborough University. The 7 Categories of Additive Manufacturing. 2019. URL: https://www.lboro.ac.uk/research/amrg/about/the7categoriesofadditivemanufacturing/.
[2] Mankovich N.J. C. A. S. N. The display of three-dimensional anatomy with stereolithographic models // Journal of digital imaging. Vol. 55. P. 155–162.
[3] Lipson H. Kurman M. Fabricated: The new world of 3D printing. John Wiley & Sons, 2013.
[4] et al. Panda B. Additive manufacturing of geopolymer for sustainable built environment // Journal of cleaner production. 2017. T. 167. C. 281–288.
[5] Stadnik N.E. Dats E.P. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. 2018. T. 991, № 1. c. 012075.
[6] Stadnik N. E. Murashkin E. V. Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // AIP Conference Proceedings. 2019. T. 2116. c. 380013.

[7] Southwell R.V. Introduction to the theory of elasticity, 2nd ed. Oxford Univ. Press., 1941.

[8] Рашба Э.И. Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения. 1953.

[9] Харлаб В.Д. Линейная теория ползучести наращиваемого тела // Механика стержневых систем и сплошных сред: Тр. ЛИСП. 1966. С. 93–119.

[10] Арутюнян Н.Х. Наумов В.Э. Радаев Ю.Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 1. Движение потока осаждаемых частиц с переменной скоростью // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 5. С. 6–24.

[11] Арутюнян Н.Х. Наумов В.Э. Радаев Ю.Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 2. Случай падения приращиваемых частиц с постоянной скоростью // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 6. С. 99–112.

[12] Наумов В.Э. Радаев Ю.Н. Термомеханическая модель наращиваемого тела: вариационная формулировка. Препринт. Ин-т проблем механики РАН. М.

[13] Дмитриева А.М. Наумов В.Э. Радаев Ю.Н. Наращивание термоупругого сферического слоя: применение вариационного подхода. Препринт. Ин-т проблем механики РАН. М.,.

[14] Arutyunyan N.Kh., Naumov V.E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1984. Т. 48, № 1. С. 1–10.

[15] Тринчер В.К. Общая геометрически линейная постановка задачи определения деформированного состояния для тела с переменной границей // Проблемы современной механики. Ч.2. Под ред. Л.И. Седова. 1983.

[16] Быковцев Г.И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: Сборник статей. Владивосток: Дальнаука.

[17] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Математические модели и современные физические теории поля // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9:4(2). С. 41–94.

[18] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.

[19] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Точно сохраняющиеся инварианты связанного микрополярного термоупругого поля // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12:4. С. 71–79.

[20] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Полевые уравнения и d-тензоры термоупругого континуума с “тонкой” микроструктурой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13:2(1). С. 60–68.

[21] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, Государственное издательство технико–теоретической литературы, 1948. 408 с.

[22] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара СамГУ, 2007. 142 с.

Yu. N. Radayev, E. V. Murashkin

ON A CLASS OF CONSTITUTIVE EQUATIONS ON PROPAGATING GROWING SURFACE

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract. The present work is devoted to an approaches to derivation of constitutive equations on the propagating growing surface. The proposed approach is based on notion known from the algebra of rational invariants. The arguments of tensor functionals are elucidated taking account of their invariance with respect to rotational transformations of the coordinate frame. A complete system of joint rational invariants of the stress tensor and the unit normal vector to growing surface is discussed. The geometric visualization of the considered rational invariants is given. A number of variants of constitutive equations on PGS of different complexity levels are derived and discussed. The derivation of the transformation formulae for the directional derivatives on the tangent plane element to growing surface for transition from a given orthogonal frame to an arbitrary curvilinear one are obtained. The obtained boundary conditions on growing surface are geometrically and mechanically consistent. The formulated differential constraints imply an experimental identification of consitutive functions.

Keywords: 3D-Printing, surface growth, stress, constitutive equation, rational invariant, differential constraint, complete system

REFERENCES

[1] Loughborough U. The 7 Categories of Additive Manufacturing. 2019. URL: https://www.lboro.ac.uk/research/amrg/about/the7categoriesofadditivemanufacturing/.
[2] Berman B. 3–D printing: The new industrial revolution // Business horizons. 1990. Vol. 55. P. 155–162.
[3] Mankovich N., Cheeseman A., Stoker N. The display of three-dimensional anatomy with stereolithographic models // Journal of digital imaging. Vol. 55. P. 155–162.
[4] Lipson H. K. M. Fabricated: The new world of 3D printing. John Wiley & Sons, 2013.
[5] Panda B., et al. Additive manufacturing of geopolymer for sustainable built environment // Journal of cleaner production. 2017. Vol. 167. P. 281–288.
[6] Stadnik N., Dats E. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. 2018. Vol. 991, no. 1. p. 012075.
[7] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2116. p. 380013.
[8] Southwell R. Introduction to the theory of elasticity, 2nd ed. Oxford Univ. Press., 1941.
[9] Rashba E.I. Determination of stresses in arrays from the action of their own weight, taking into account the order of their construction. 1953.
[10] Harlab V. Linear theory of creep of a growing solids // The mechanics of rod systems and continuous media: Tr. LISP. 1966. P. 93–119.
[11] Harutyunyan N., Naumov V., Radaev Y. Dynamic accretion of the elastic layer. Part 1. The motion of the flow of deposited particles with a variable velocity // Izv. USSR AS. MTT. 1992. no. 5. P. 6–24.

Yuri N. Radayev, D.Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Evgenii V. Murashkin, Cand.Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

[12] Harutyunyan N., Naumov V., Radaev Y. Dynamic accretion of the elastic layer. Part 2. The case of deposition of incremental particles at a constant velocity // Izv. USSR AS. MTT. 1992. no. 6. P. 99–112.
[13] Naumov V.E., Radaev Yu.N. Thermomechanical model of an growing solids: variational formulation. Preprint. M.: Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences.
[14] Dmitrieva A.M., Naumov V.E., Radaev Yu.N. Growth of thermoelastic spherical layer: variational approach application. Preprint. M.: Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences.
[15] Arutyunyan N., Naumov V. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1984. Vol. 48, no. 1. P. 1–10.
[16] Trincher V.K. On the statement of the problem of determining stresses in the gravitational state of a growing solid // Izv. USSR AS. MTT.
[17] Bykovtsev G.I. Selected fundamental problems in the mechanics of solids: Collection of papers. Vladivostok: Dal'nauka.
[18] Kovalev V., Radayev Y. Mathematical models and contemporary theories of physical fields // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2009. Vol. 9:4(2). P. 41–94.
[19] Kovalev V., Radayev Y. Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika [Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics]. Saratov: Saratov State Univ., 2010. 328 p.
[20] Kovalev V., Radayev Y. On precisely conserved quantities of coupled micropolar thermoelastic field // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2012. Vol. 12:4. P. 71–79.
[21] Kovalev V., Radayev Y. Covariant field equations and d-tensors of hyperbolic thermoelastic continuum with fine microstructure // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2013. Vol. 13:2(1). P. 60–68.
[22] Gurevich G. Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, 1964. 408 p.
[23] Radayev Y. Prostranstvennaia zadacha matematicheskoi teorii plastichnosti [Three-dimensional Problem of the Mathematical Theory of Plasticity]. Samara: SamSU, 2007. 142 p.