

А. А. Абдурахманов, В. В. Глаголев

МОДЕЛЬ НАХОЖДЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ОТРЫВЕ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Рассматривается модель деформирования слоистого композита на основе концепции слоя взаимодействия в линейно упругой постановке при нормальном отрыве. Из вариационной постановки задачи о равновесии двух тел, соединенных посредством тонкого слоя, с учетом упрощающих гипотез распределения поля перемещений консоли получена система дифференциальных уравнений. Из аналитического решения полученной системы анализируется возможность использования энергетического произведения в качестве критерия разрушения адгезионного слоя.

Ключевые слова: нормальный отрыв, слой взаимодействия, слоистый композит, энергетическое произведение.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.013

УДК: 539.375

Введение. В механике деформируемого твердого тела используются множество моделей для плоских слоистых материалов, объединенных в композит адгезионным слоем (АС) [1-4]. В такого рода материалах толщина адгезионного слоя (АС) является естественным линейным параметром (ЛП). В зависимости от толщины АС (ядра), относительной жесткости между ядром и сопрягаемыми телами, граничных условий применяют различные модели. Постановка и решение задач, учитывающих изгибную жесткость ядра слоистого композита предложена в работах [5-7]. В работах [5,6] деформация обжатия ядра полагается постоянной по толщине, а в работе [7] - линейной.

В настоящее время основным подходом в этом направлении является моделирование АС слоем нулевой толщины [8-10]. Однако, в этом случае теряется различие между когезионным разрушением АС (по его массиву) и адгезионным механизмом

© Абдурахманов А. А., Глаголев В. В., 2019

Абдурахманов Амир Абдурауфович

e-mail: dragon.1993@inbox.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула.

Глаголев Вадим Вадимович

e-mail: vadim@tsu.tula.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Поступила 19.08.2019

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-41-710001 р-а.

отслоения. Особая роль в этих моделях отводится определению адгезионных сил взаимодействия [11]. Если сопрягаемые материалы контактируют не по всей длине, в модели будет присутствовать сингулярность. Аналитические решения для тел конечных размеров в этом случае получаются, как правило, в рамках упрощающих гипотез [12-14].

Учет размера АС при незначительной его изгибной жесткости, присутствует в модели с введением «мягкого слоя» [1,15,16] и слоя взаимодействия [17-19]. В данных моделях размер АС существенно меньше сопрягаемых им тел, кроме того, отметим, что он не является постоянной величиной в готовой продукции. В этом случае речь может идти об определенном допуске или диапазоне значений, в рамки которого укладывается толщина АС в образцах. Для нахождения напряженно-деформированного состояния (НДС) и связанного с ним критического состояния в рамках известных локальных критериев необходимо знать точное значение толщины АС, что проблематично. Таким образом, необходим критерий разрушения, обеспечивающий независимость критериальной величины от точных значений ЛП при выполнении расчета при любом значении ЛП из заданного диапазона с определенной степенью точности. В работе [28] было введено понятие энергетического произведения (ЭП) для материального слоя в виде произведения приращения удельной свободной энергии и толщины слоя.

В данной работе для случая нормального отрыва в АС рассматривается зависимость ЭП от толщины слоя в зоне обрыва связей АС с сопрягаемыми телами при упругом деформировании. Показано, что, рассматривая ЭП в качестве критерия разрушения можно проводить расчеты на прочность тонкого по сравнению с толщинами сопрягаемых тел АС, используя в качестве его толщины фиксированное значение из некоторого диапазона.

Постановка задачи. На Рис. 1 показан слоистый композит длиной $l+a$, состоящий из трех тел. Пластины 1 и 2 с одинаковыми толщинами по длине и механическими свойствами связаны слоем взаимодействия 3 толщиной δ_0 . Правый торец образца жестко закреплен от горизонтальных перемещений, на левых торцах консолей действует вертикальная антисимметричная нагрузка интенсивностью P . Вся остальная поверхность образца свободна от внешней нагрузки.

Для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применим концепцию «слоя взаимодействия». В этом случае равновесие тел 1 и 2 согласно работе [17] запишем в вариационной форме для тела 1:

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ u_1 dx_1 + \\ & + 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} P^1 \cdot \delta u dl \end{aligned} \quad (1)$$

и тела 2:

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + \\ & + 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} P^2 \cdot \delta u dl, \end{aligned} \quad (2)$$

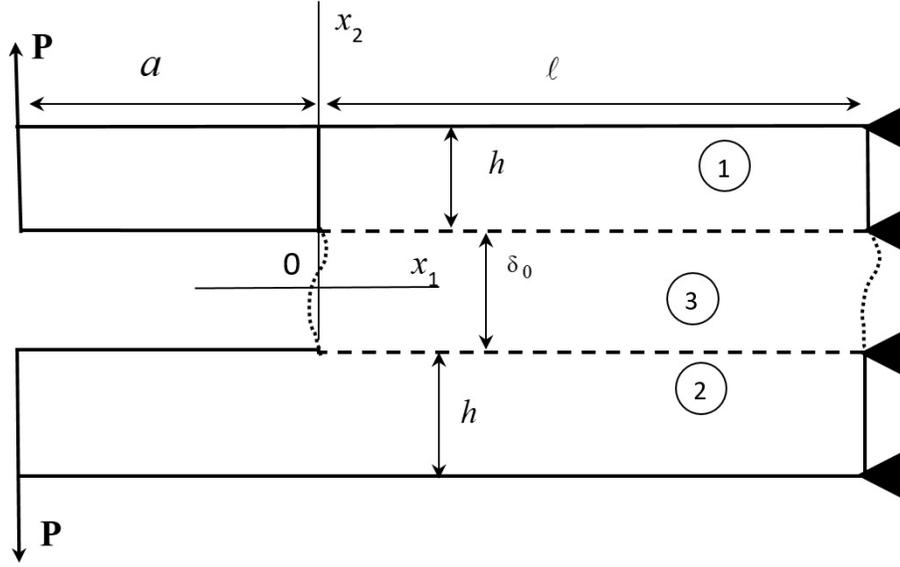


Рис. 1. Модель ДКБ-образца

где S_1, S_2 - площади тел 1 и 2; σ, ϵ - тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}$ - тензоры средних напряжений и деформаций слоя с соответствующими компонентами:

$$\bar{\sigma}_{21}(x_1) = \bar{\sigma}_{12}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2, \quad \bar{\sigma}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\epsilon}_{11}(x_1) = 0.5 \left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \quad \bar{\epsilon}_{21}(x_1) = \bar{\epsilon}_{12}(x_1) =$$

$$0.5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5 \left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right).$$

где u_k^+ соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя; $k = 1, 2$; L_1, L_2 - граница приложения внешней нагрузки для тела 1 и 2. Постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1, 2:

$$\mathbf{u}^+ = u(x_1, \delta_0/2); \quad \mathbf{u}^- = u(x_1, -\delta_0/2); \quad x_1 \in [0, \ell] \quad (3)$$

наряду с равенством компонент векторов напряжений границ слоя и сопрягаемых им пластин.

Рассмотрим определяющие соотношения в форме закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_1}{1 + \nu_1} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu_1}{1 - 2\nu_1} \epsilon \delta_{ij} \right), \quad (4)$$

где E_1, ν_1 - модуль упругости и коэффициент Пуассона тела пластин 1 и 2; $\epsilon = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ - объемное расширение; δ_{ij} - символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right). \quad (5)$$

В силу симметрии задачи проекции поля перемещений удовлетворяют условиям $u_1^1(x_1) = u_1^2(x_1)$, $u_2^1(x_1) = -u_2^2(x_1)$. Таким образом достаточно ограничиться рассмотрением тела 1. С учетом, что в слое взаимодействия для данного нагружения имеет место $u_1^+(x_1) = u_1^-(x_1)$, $u_2^+(x_1) = -u_2^-(x_1)$ из (4) и (7) получаем $\bar{\sigma}_{12} = 0$. В этом случае разрешающая система уравнений преобразуется в вариационное уравнение:

$$\int_{S_1} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} P^1 \cdot \delta u dl \quad (6)$$

Таким образом, решение системы (6)-(8) сводится к определению поля перемещений $\mathbf{u}(x_1, x_2)$ в теле 1 (см. Рис. 1) с учетом граничных условий на его торцах:

$$u_1(x_1)|_{x_1=\ell} = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_{12}|_{x_1=\ell} = 0, \quad (8)$$

$$\sigma_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad (9)$$

$$\sigma_{12}|_{x_1=-a} = -P. \quad (10)$$

Для упрощения задачи принимаем, что поле перемещений в теле 1 определено следующим образом с учетом условия (5):

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad (11)$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_2^+(x_1). \quad (12)$$

Входящие в представление (11), (12) параметр имеет геометрический смысл малого угла поворота материальной нормали к плоскости $x_2 = \delta_0/2$ в теле 1. Согласно распределению (11)-(12) деформации будут определяться в виде:

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_2) = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad (13)$$

$$\varepsilon_{21}(x_1, x_2) = \varepsilon_{12}(x_1) = 0.5 \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right), \quad (14)$$

$$\varepsilon_{22}(x_1, x_2) = 0. \quad (15)$$

Выражения (13), (14), как теория Тимошенко [14] и работа [7], учитывают сдвиговые деформации и повороты нормалей в теле.

Рассмотрим работу внутренних напряжений для тела 1 с учетом заданных полей деформаций (13)-(14):

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds = \\ & = \int_{-a}^0 \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(\sigma_{11} \left(\frac{d\delta u_1^+}{dx_1} - (x_2 - \delta_0/2) \frac{d\delta \varphi}{dx_1} \right) + \sigma_{12} \left(\frac{d\delta u_2^+}{dx_1} - \delta \varphi \right) \right) dx_1 dx_2 + \\ & + \int_{+0}^{\ell} \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(\sigma_{11} \left(\frac{d\delta u_1^+}{dx_1} - (x_2 - \delta_0/2) \frac{d\delta \varphi}{dx_1} \right) + \sigma_{12} \left(\frac{d\delta u_2^+}{dx_1} - \delta \varphi \right) \right) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Введем в рассмотрение обобщенные силы:

$$Q_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2, \quad (17)$$

$$Q_{12}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{12} dx_2, \quad (18)$$

и обобщенный момент:

$$M_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11}(x_2 - \delta_0/2) dx_2. \quad (19)$$

Интегрируем по частям ряд слагаемых в (16) с учетом (17)-(19) и третье слагаемое в левой части (6):

$$\int_{-a}^{-0} Q_{1k} \frac{d\delta u_k^+}{dx_1} dx_1 = Q_{1k} \delta u_k^+ \Big|_{x_1=-a}^{x_1=-0} - \int_{-a}^{-0} \frac{dQ_{1k}}{dx_1} \delta u_k^+ dx_1, \quad (20)$$

$$\int_{+0}^{\ell} Q_{1k} \frac{d\delta u_k^+}{dx_1} dx_1 = Q_{1k} \delta u_k^+ \Big|_{x_1=+0}^{x_1=\ell} - \int_{+0}^{\ell} \frac{dQ_{1k}}{dx_1} \delta u_k^+ dx_1, \quad (21)$$

$$\int_{-a}^{-0} M_{11} \frac{d\delta\varphi}{dx_1} dx_1 = M_{11} \delta\varphi \Big|_{x_1=-a}^{x_1=-0} - \int_{-a}^{-0} \frac{dM_{11}}{dx_1} \delta\varphi dx_1, \quad (22)$$

$$\int_{+0}^{\ell} M_{11} \frac{d\delta\varphi}{dx_1} dx_1 = M_{11} \delta\varphi \Big|_{x_1=+0}^{x_1=\ell} - \int_{+0}^{\ell} \frac{dM_{11}}{dx_1} \delta\varphi dx_1, \quad (23)$$

$$\int_{+0}^{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{d\delta u_1^+}{dx_1} dx_1 = \bar{\sigma}_{11} \delta u_1^+ \Big|_{x_1=+0}^{x_1=\ell} - \int_{+0}^{\ell} \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} \delta u_1^+ dx_1. \quad (24)$$

Рассмотрим правую часть (6). Найдем вектор напряжений на левом торце консоли

$$\mathbf{P}^1 = -\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} = P\mathbf{e}_2.$$

При положительном обходе контура работа напряжений равна:

$$\int_{L_1} P^1 \cdot \delta u dl = \int_{h+\delta_0/2}^{\delta_0/2} P \delta u_2^+ (-dx_2) \Big|_{x_1=-a} = P h \delta u_2^+ \Big|_{x_1=-a} = Q_2 \delta u_2^+ \Big|_{x_1=-a} \quad (25)$$

Подставив (16), (20)-(25) в (6) и приравняв слагаемые при равных вариациях приходим к двум системам дифференциальных уравнений:

для участка $x_1 \in [-a; 0]$:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = 0, \quad (26)$$

для участка $x_1 \in (0; \ell]$:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}, \quad (27)$$

с условиями сопряжения:

$$u_1^+ \Big|_{x_1=-0} = u_1^+ \Big|_{x_1=+0}, \quad (28)$$

$$u_2^+|_{x_1=-0} = u_2^+|_{x_1=+0}, \quad (29)$$

$$\varphi^+|_{x=-0} = \varphi^+|_{x=+0}, \quad (30)$$

$$M_{11}|_{x_1=-0} = M_{11}|_{x_1=+0}, \quad (31)$$

$$Q_{12}|_{x_1=-0} = Q_{12}|_{x_1=+0}, \quad (32)$$

$$Q_{11}|_{x_1=-0} = (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0}, \quad (33)$$

и естественными граничными условиями:

$$Q_{12}|_{x_1=-a} = -Q_2, \quad (34)$$

$$Q_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad (35)$$

$$M_{11}|_{x_1=-a} = 0. \quad (36)$$

На правом торце рассматриваем граничные условия:

$$u_1^+|_{x_1=\ell} = 0, \quad (37)$$

$$\varphi|_{x_1=\ell} = 0, \quad (38)$$

$$Q_{12}|_{x_1=\ell} = 0. \quad (39)$$

С учетом (13)-(15) и условия плоской деформации $\varepsilon_{33} = 0$, определяющие соотношения (4) запишем в виде:

$$\sigma_{11} = D \left(\frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2) \right), \quad (40)$$

$$\sigma_{12} = L \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right), \quad (41)$$

где $D = \frac{E_1(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}$, $L = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$.

Из (5) получим связь напряженного состояния в слое взаимодействия и его граничным перемещением:

$$\bar{\sigma}_{11} = D1 \frac{du_1^+}{dx_1} + D2u_2^+, \quad (42)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = C1u_2^+ + C2 \frac{du_1^+}{dx_1}, \quad (43)$$

где $D1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$, $D2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$, $C1 = \frac{2E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$, $C2 = \frac{E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$.

Запишем выражения обобщенных сил и моментов:

$$Q_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(D \left(\frac{du_1^+}{dx_1} - \varphi'(x_2 - \delta_0/2) \right) \right) dx_2 = D \left(h \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^2}{2} \varphi' \right), \quad (44)$$

$$Q_{12}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} L \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right) dx_2 = Lh \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right), \quad (45)$$

и моментов:

$$\begin{aligned} M_{11}(x_1) &= \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(D \left(\frac{du_1^+}{dx_1} - \varphi' (x_2 - \delta_0/2) \right) \right) (x_2 - \delta_0/2) dx_2 = \\ &= D \left(\frac{h^2}{2} \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^3}{3} \varphi' \right). \end{aligned} \quad (46)$$

В результате задача (26)-(33) с учетом (42)-(46) становится замкнутой относительно трех неизвестных функций: $u_1^+(x_1)$, $u_2^+(x_1)$, $\varphi(x_1)$. Каждая неизвестная функция входит в систему со второй производной включительно и для их однозначного определения необходимо шесть граничных условий. Граничные условия (34)-(39) дают решение поставленной задачи.

Решение задачи. Проинтегрировав систему (26) с учетом граничных условий (34-36) и выражений (44-46), находим значения вертикального и горизонтального перемещений (u_1^+ и u_2^+), угла поворота нормали к консоли (φ), при $x_1 \in [a; 0]$:

$$u_1^+ = \frac{h}{2} \varphi + k_3, \quad (47)$$

$$u_2^+ = \frac{Q_2(x_1 + a)^3}{6S} + k_1 x_1 + k_2, \quad (48)$$

$$\varphi = \frac{Q_2}{Lh} + \frac{Q_2(x_1 + a)^2}{2S} + k_1, \quad (49)$$

где k_1, k_2, k_3 - постоянные; $S = \frac{Dh^3}{12}$.

Из системы (27) получаем систему дифференциальных уравнений второго порядка для участка $x_1 \in (0; \ell]$:

$$\begin{cases} \varphi'' = K_1 \varphi - K_2 u_2; \\ (u_2^+)' = K_3 \varphi' - K_4 u_2 + \frac{C_2}{Lh} b_1; \end{cases} \quad (50)$$

где b_1 - постоянная, $K_1 = \frac{C_1(2Dh+\delta_0 D_1) - \delta_0 D_2 C_2}{Lh(2Dh+\delta_0 D_1)}$, $K_2 = \frac{C_2 Dh^2 + Lh(2Dh+\delta_0 D_1)}{Lh(2Dh+\delta_0 D_1)}$, $K_3 = \frac{6Lh(2Dh+\delta_0 D_1)}{Dh^3(Dh+2\delta_0 D_1)}$, $K_4 = \frac{3Dh^2 \delta_0 D_2 + 6Lh(2Dh+\delta_0 D_1)}{Dh^3(Dh+2\delta_0 D_1)}$.

Систему (50) сводим к системе четырех уравнений первого порядка для которой находим собственные значения:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{K_1 + K_3 - K_2 K_4}{2} + \sqrt{\frac{(K_2 K_4 - K_1 - K_3)^2 - 4K_1 K_3}{4}}}, \\ \lambda_{3,4} &= \pm \sqrt{\frac{K_1 + K_3 - K_2 K_4}{2} - \sqrt{\frac{(K_2 K_4 - K_1 - K_3)^2 - 4K_1 K_3}{4}}}. \end{aligned}$$

Решение (50) запишем в виде:

$$u_2^+ = S_1 e^{\lambda_{1x_1}} + S_2 e^{\lambda_{2x_1}} + S_3 e^{\lambda_{3x_1}} + S_4 e^{\lambda_{4x_1}} - \frac{C_2}{Lh K_1} b_1, \quad (51)$$

$$\varphi = S_1 B_1 e^{\lambda_1 \ell} + S_2 B_2 e^{\lambda_2 \ell} + S_3 B_3 e^{\lambda_3 \ell} + S_4 B_4 e^{\lambda_4 \ell}, \quad (52)$$

$$u_1^+ = S_1 B_5 e^{\lambda_1 x_1} + S_2 B_6 e^{\lambda_2 x_1} + S_3 B_7 e^{\lambda_3 x_1} + S_4 B_8 e^{\lambda_4 x_1} + b_1 x_1 \left(1 + \frac{\delta_0 D_2 C_2}{L h K_1 (2 D h + \delta_0 D_1)} \right) + b_2, \quad (53)$$

где b_2 - постоянная,

$$B_i = \lambda_i + K_1 / \lambda_i, i = 1..4, \\ B_i = \left(\frac{B_j D h^2 - \delta_0 D_2 / \lambda_j}{2 D h + \delta_0 D_1} \right), i = 5..8, j = 1..4.$$

Таким образом, НДС консоли и слоя на данном участке полностью определяется шестью постоянными $S_1, S_2, S_3, S_4, b_1, b_2$.

Подставив полученное решение в условие сопряжения (33), получаем $b_1 = 0$.

Для нахождения оставшихся постоянных в решении (47)-(49) и (51)-(53) составим систему восьми уравнений из условий сопряжения решений (28-32) и граничных условий на правом торце (37-39):

$$\begin{cases} S_1 \left(\frac{B_5}{2} - \frac{h B_1}{3} \right) + S_2 \left(\frac{B_6}{2} - \frac{h B_2}{3} \right) + S_3 \left(\frac{B_7}{2} - \frac{h B_3}{3} \right) + S_4 \left(\frac{B_8}{2} - \frac{h B_4}{3} \right) = \frac{Q_2 a}{D h^2} \\ S_1 (\lambda_1 - B_1) + S_2 (\lambda_1 - B_1) + S_3 (\lambda_1 - B_1) + S_4 (\lambda_1 - B_1) = -\frac{Q_2}{L h} \\ S_1 B_1 e^{\lambda_1 l} + S_2 B_2 e^{\lambda_2 l} + S_3 B_3 e^{\lambda_3 l} + S_4 B_4 e^{\lambda_4 l} = 0 \\ S_1 B_5 e^{\lambda_1 l} + S_2 B_6 e^{\lambda_2 l} + S_3 B_7 e^{\lambda_3 l} + S_4 B_8 e^{\lambda_4 l} + b_2 = 0 \\ S_1 e^{\lambda_1 l} (\lambda_1 - B_1) + S_2 e^{\lambda_2 l} (\lambda_1 - B_1) + S_3 e^{\lambda_3 l} (\lambda_1 - B_1) + S_4 e^{\lambda_4 l} (\lambda_1 - B_1) = 0 \\ \frac{Q_2 a^3}{6 S} + k_3 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\ \frac{Q_2}{L h} + \frac{Q_2 a^2}{2 S} + k_2 = S_1 B_1 + S_2 B_2 + S_3 B_3 + S_4 B_4 \\ \frac{Q_2}{2 L} + \frac{Q_2 h a^2}{4 S} + \frac{k_2 h}{2} + k_1 = S_1 B_5 + S_2 B_6 + S_3 B_7 + S_4 B_8 + b_2 \end{cases} \quad (54)$$

Решение системы (54) запишем в виде:

$$S_1 = \frac{Q_2 (6 L a (\lambda_3 - B_3) (e^{2 \lambda_3 l} - 1) + D h \lambda_3 (3 B_7 - 2 B_3 h) (e^{2 \lambda_3 l} + 1))}{2 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))}, \\ S_2 = \frac{Q_2 e^{2 \lambda_1 l} (6 L a (\lambda_3 - B_3) (e^{2 \lambda_3 l} - 1) + D h \lambda_3 (3 B_7 - 2 B_3 h) (e^{2 \lambda_3 l} + 1))}{2 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))}, \\ S_3 = -\frac{Q_2 (6 L a (\lambda_1 - B_1) (e^{2 \lambda_1 l} - 1) + D h \lambda_1 (3 B_5 - 2 B_1 h) (e^{2 \lambda_1 l} + 1))}{2 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))}, \\ S_4 = -\frac{Q_2 e^{2 \lambda_3 l} (6 L a (\lambda_1 - B_1) (e^{2 \lambda_1 l} - 1) + D h \lambda_1 (3 B_5 - 2 B_1 h) (e^{2 \lambda_1 l} + 1))}{2 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))}, \\ k_1 = \frac{(2 B_5 - B_1 h) (6 L a B_{13} (\lambda_3 - B_3) + D h B_{11} B_{16})}{4 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))} - \\ - \frac{(2 B_7 - B_3 h) (6 L a B_{13} (\lambda_1 - B_1) + D h B_{11} B_{15})}{4 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))}, \\ k_2 = \frac{Q_2 (6 L a (B_{14} (B_1 (\lambda_3 - B_3) - B_3 (\lambda_1 - B_1))) + D h (B_1 B_{11} B_{16} - B_3 B_{12} B_{15}))}{2 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))} - \\ - \frac{Q_2}{L h} - \frac{Q_2 a^2}{2 S}, \\ k_3 = \frac{Q_2 (6 L a (\lambda_3 - B_3) (B_{16} + B_{15}) + D h B_{13} (B_{12} - B_{11}))}{2 L D h^2 (B_9 (e^{2 \lambda_1 l} - e^{2 \lambda_3 l}) + B_{10} (e^{2 l (\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))} - \frac{Q_2 a^3}{6 S},$$

$b_2 = 0$,

где:

$$\begin{aligned} B_9 &= (((-B_1 - B_3)h + \frac{3B_5}{2} + \frac{3B_7}{2})\lambda_3 + B_3(hB_1 - \frac{3B_5}{2}))\lambda_1 + \lambda_3 B_1(hB_3 - \frac{3B_7}{2}), \\ B_{10} &= (((B_1 - B_3)h - \frac{3B_5}{2} + \frac{3B_7}{2})\lambda_3 - B_3(hB_1 - \frac{3B_5}{2}))\lambda_1 + \lambda_3 B_1(hB_3 - \frac{3B_7}{2}), \\ B_{11} &= \lambda_3(3B_7 - 2B_3h), \quad B_{12} = \lambda_1(3B_5h - 2B_1h), \quad B_{13} = (e^{2\lambda_1\ell} + 1)(e^{2\lambda_3\ell} + 1), \\ B_{14} &= (e^{2\lambda_1\ell} - 1)(e^{2\lambda_3\ell} - 1), \quad B_{15} = (e^{2\lambda_1\ell} + 1)(e^{2\lambda_3\ell} - 1), \quad B_{16} = (e^{2\lambda_1\ell} - 1)(e^{2\lambda_3\ell} + 1). \end{aligned}$$

Результаты решения. В качестве материала для расчета рассмотрим композит со следующими характеристиками консолей: $E_1 = 2 * 10^{11}$ Па, $\nu_1 = 0.3$, и адгезионного слоя: $E_3 = 9 * 10^9$ Па, $\nu_3 = 0.3$. Геометрические характеристики слоистого композита выбираем следующими: $\ell = 0.5$, $a = 0.05$, $h = 0.05$.

На Рис. 2 и Рис. 3 построены зависимости горизонтальных и вертикальных перемещений верхней границы слоя для различных значений коэффициента Пуассона при единичной внешней нагрузке. Значения компонент вектора перемещения отнесены к величине вертикального перемещения на левом торце слоя. Координата по оси абсцисс отнесена к толщине слоя.

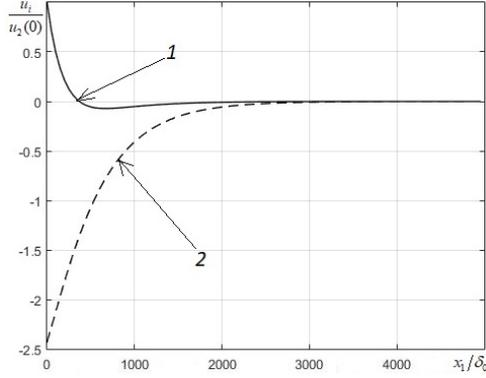


Рис. 2. Перемещения слоя при $\nu_1=0.3:1$ - вертикальные, 2 - горизонтальные.

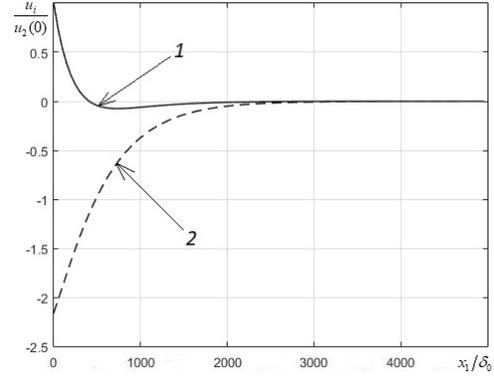


Рис. 3. Перемещения слоя при $\nu_1=0$: 1 - горизонтальные, 2 - вертикальные.

Напряженное состояние в АС для рассматриваемых характеристик слоистого композита показано на Рис.4 и Рис.5. Значения компонент тензора напряжений отнесены к величине напряжения $\bar{\sigma}_{22}$ на левом торце слоя. Координата по оси абсцисс отнесена к толщине слоя.

Из анализа представленных зависимостей видно, что учет коэффициента Пуассона существенно влияет на распределение напряжённого состояния в АС.

С учетом полученного решения, из (42) и (43) определяем напряженное состояние в вершине слоя взаимодействия:

$$\bar{\sigma}_{11}|_{x_1=0} = \frac{Q_2(K_7 D_3 - K_8 D_4)}{2LDh^2(B_{13}(e^{2\lambda_1\ell} - e^{2\lambda_3\ell}) + B_{14}(e^{2\ell(\lambda_1+\lambda_3)} - 1))} \quad (55)$$

$$\bar{\sigma}_{22}|_{x_1=0} = \frac{Q_2(K_7 C_3 - K_8 C_4)}{2LDh^2(B_{13}(e^{2\lambda_1\ell} - e^{2\lambda_3\ell}) + B_{14}(e^{2\ell(\lambda_1+\lambda_3)} - 1))} \quad (56)$$

где:

$$K_7 = 6LaB_{15}(\lambda_3 - B_3) + DhB_{11}B_{13}, \quad K_8 = 6LaB_{16}(\lambda_1 - B_1) + DhB_{12}B_{13}, \quad D_3 = D_1\lambda_1 B_5 + D_2, \quad D_4 = D_1\lambda_3 B_7 + D_2, \quad C_3 = C_2\lambda_1 B_5 + C_1, \quad C_4 = C_2\lambda_3 B_7 + C_1.$$

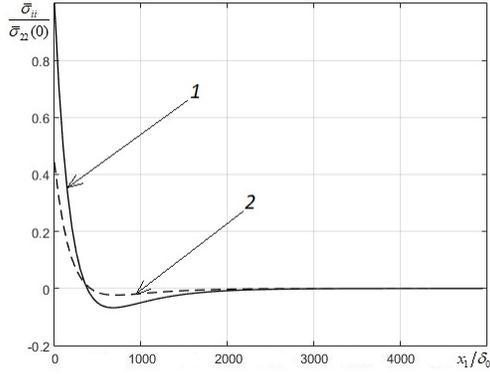


Рис. 4. Напряжения в слое при $\nu_1=0.3:1$ – напряжения отрыва, 2 – осевые напряжения.

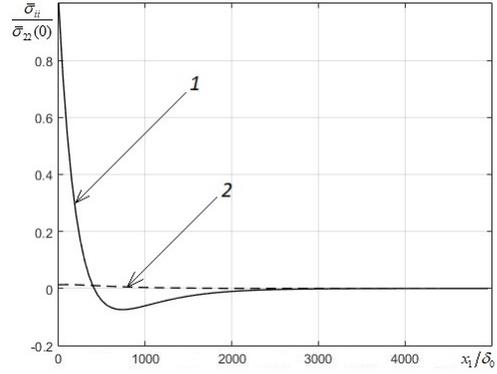


Рис. 5. Напряжения в слое при $\nu_1=0$: 1 – напряжения отрыва, 2 – осевые напряжения.

Рассмотрим значение приращения свободной энергии в вершине слоя взаимодействия:

$$\varphi = \frac{1}{2} (\bar{\varepsilon}_{11}\bar{\sigma}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22}\bar{\sigma}_{22}) \tag{57}$$

Введем в рассмотрение ЭП [19]:

$$2\gamma = \delta_0\varphi. \tag{58}$$

Подставим (55)-(57) в (58). Выразим расклинивающую силу через ЭП:

$$Q_2 = \frac{2LDh^2(B_9(e^{2\lambda_1\ell} - e^{2\lambda_3\ell}) + B_{10}(e^{2\ell(\lambda_1+\lambda_3)} - 1))\sqrt{2E\gamma}}{\sqrt{\delta_0(K_7^2(D_3^2 + C_3^2) - 2K_7K_8(D_3D_4 + C_3C_4) + K_8^2(D_4^2 + C_4^2))}}. \tag{59}$$

В таблице приведены значения расклинивающего усилия для различных значений толщины АС.

δ_0	10^{-2}	$5 * 10^{-3}$	10^{-3}	$5 * 10^{-4}$	10^{-4}
Q_2 (Н/м)	1	1	1	1	1

Таблица 1. Зависимость критической силы от толщины АС.

Из результатов значений расклинивающей силы в таблице видно, что ее величина не зависит от толщины слоя и определяется механическими и геометрическими характеристиками образца. В критическом состоянии образца сила Q_2 достигает значения Q_2^C , а $2\gamma - 2\gamma^C$.

Для выреза в виде математического разреза значение критической силы имеет выражение:

$$Q_2^C = \frac{h^{3/2}}{2\sqrt{3}a} K_{IC}, \tag{60}$$

где K_{IC} - вязкость разрушения.

Из (59) и (60) получаем отношение коэффициента вязкости разрушения и энергетического произведения:

$$f\left(\frac{a}{h}\right) = \frac{K_{IC}^2}{E\gamma} = \left(\frac{4LDh^2(B_{13}(e^{2\lambda_1\ell} - e^{2\lambda_3\ell}) + B_{14}(e^{2\ell(\lambda_1 + \lambda_3)} - 1))\sqrt{6a}}{h\sqrt{h\delta_0(K_7^2(D_3^2 + C_3^2) - 2K_7K_8(D_3D_4 + C_3C_4) + K_8^2(D_4^2 + C_4^2)))}} \right)^2 \quad (61)$$

В работе [18] было найдено выражение энергетическое произведение для аналогичной задачи в частном случае, когда $\nu_1 = \nu_3 = 0$, $E_1 = E_2 = E_3$, и $\ell \rightarrow \infty$. Ниже представлено соответствующее значение ЭП для данного случая:

$$2\gamma_1 = \left(\frac{Q_2 2 \left(\sqrt{3} \frac{a}{h} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{Eh} \right)^2 \quad (62)$$

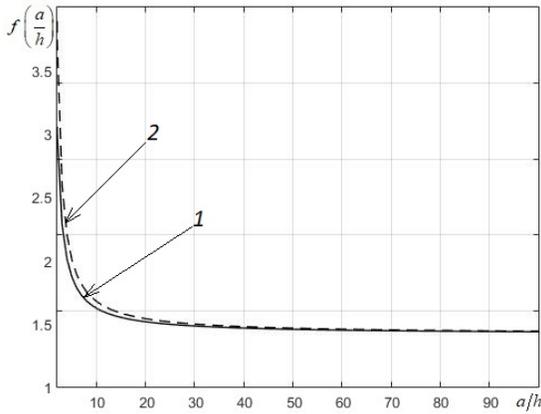


Рис. 6. Функция f : 1 - при $\nu_3=0.3$, 2 - при $\nu_3=0$

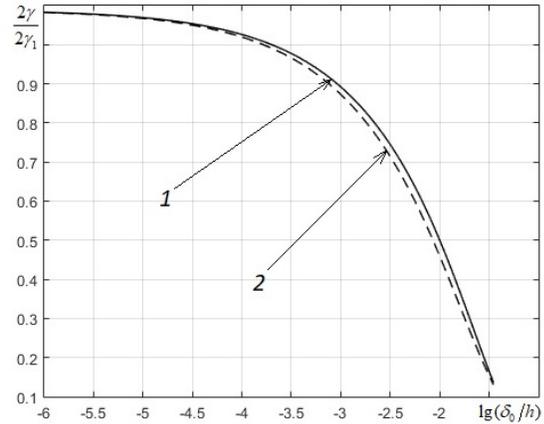


Рис. 7. Относительное энергетическое произведение: 1 - при $\nu_3=0.3$, 2 - при $\nu_3=0$

На рис. 6 представлено изменение функции f в зависимости от длины a , сегмента балки не взаимодействующего с адгезионным слоем, при изменении отношения длины сегмента к высоте балки $\left(\frac{a}{h}\right)$. Отношение толщины адгезионного слоя к высоте балки $\left(\frac{\delta_0}{h}\right)$ равнялось значению $5 \cdot 10^{-5}$. График 1 соответствует расчетным значениям, а график 2 – нулевым значениям коэффициентов Пуассона и равенства модулей упругости материалов композита.

На Рис.7 представлено изменение ЭП в зависимости от толщины АС. Толщина АС изменялась в пределах от $5 \cdot 10^{-8}$ до $5 \cdot 10^{-2}$. Значения ЭП отнесены к значению ЭП для случая, когда $\delta_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ и $\nu = 0.3$.

Результаты Рис. 7 дает неплохое соответствие формул (58) и (62) при нулевых значениях коэффициентов Пуассона и равенства модулей упругости материалов композита. Однако увеличение значений коэффициентов Пуассона и различие в модулях упругости АС и сопрягаемых им материалов приводит к существенному различию ЭП, вычисляемому по формулам (58) и (62).

Данный результат дает связь между критическим значением энергетического произведения и механическими характеристиками материала.

Заключение. Из найденных распределений полей перемещений границы АС получены зависимости ЭП на торце слоя. Рассматривая критическое значение ЭП в качестве критерия разрушения тонкого АС, можно в определенном диапазоне проводить расчеты без фиксации значения толщины АС. В этом случае расчет критического состояния АС может быть следующим. Так в образце с заданными геометрическими и механическими характеристиками при $\delta_0^* = \delta_0/h \leq 10^{-5}$ из эксперимента можно найти внешнюю критическую нагрузку. По данной нагрузке находится критическое значение ЭП. Для образцов, выбирая любой относительный параметр из диапазона $\delta_0 \in (0; \delta_0^*]$, при данном виде нагружения можно определить критическую внешнюю нагрузку, сопоставляя значение ЭП на торце слоя с критическим.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
- [2] Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1974. 640 с.
- [3] Allen H.G., Feng Z. Classification of Structural Sandwich Panel Behavior // *Mechanics of Sandwich Structures*. Springer, Dordrecht, 1998. pp. 1–12.
- [4] Lurie S., Volkov-Bogorodskii D., Tuchkova N. Exact solution of Eshelby-Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions // *Acta Mechanica*. 2015. No 3. pp. 1–12.
- [5] Mattei O., Bardella L. A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions // *Eur. J. Mech. A-Solid*. 2016. Vol. 58. pp. 172–186.
- [6] Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // *Composite Structures*. 2016. Vol. 137. pp. 140–147.
- [7] Panteghini A., Bardella L. Structural theory and finite element modelling of linear elastic sandwich beams // *Eur. J. Mech. A-Solid*. 2017. Vol. 61. pp. 393–407.
- [8] Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Отслоение покрытий под действием термоупругих напряжений (Балочное приближение) // *Вестник СамГУ. Естественная серия*. 2007. №4(54). С. 66–83.
- [9] Устинов К.Б. Об отслоении слоя от полуплоскости; условия упругой заделки для пластины эквивалентной слою // *Изв. РАН. МТТ*. 2015. № 1(50). С. 75–95.
- [10] Evans A.G., Hutchinson J.W. On the mechanics of delamination and spalling on compressed films // *International Journal of Solids and Structures*. 1984. № 5(20). pp. 455–466.
- [11] Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С. Поверхностная энергия и энергия адгезии упругих тел // *Изв. РАН. МТТ*. 2017. №1(52). С. 76–91.
- [12] Mantari J.L., Yarasca J. A simple and accurate generalized shear deformation theory for beams // *Composite Structures*. 2015. Vol. 134. pp. 593–601.
- [13] Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory // *Engineering Fracture Mechanics*. 2017. Vol. 169. pp. 309–320.
- [14] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.
- [15] Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Изгиб двуслойной балки с жестким контактом между слоями // *Прикладная математика и механика*. 2011. № 1(75). С. 112–121.
- [16] Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Обобщенная модель Тимошенко-Рейсснера для многослойной пластины // *Изв. РАН. МТТ*. 2016. №5(51). С. 22–35.
- [17] Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. Моделирование процесса разделения композита с адгезионным слоем // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. № 2. С. 34–44.
- [18] Абдурахманов А.А., Глаголев В.В., Глаголева М.О. Об одном модельном представлении деформирования двухконсольной балки // *Вестник ТулГУ. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи*. 2019. № 1. С. 26–36.
- [19] Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *International Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 158. pp. 141–149.

A. A. Abdurakhmanov, V. V. Glagolev

MODEL OF FINDING THE STRESSED-DEFORMED STATE OF THE ADHESION LAYER AT NORMAL SEPARATION

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. A model of deformation of a layered composite is considered on the basis of the concept of an interaction layer in a linearly elastic formulation with normal separation. From the variational formulation of the equilibrium problem for two bodies connected by means of a thin layer, taking into account the simplifying hypotheses of the distribution of the console displacement field, a system of differential equations is obtained. From the analytical solution of the resulting system, the possibility of using the energy product as a criterion for the destruction of the adhesive layer is analyzed.

Keywords: normal separation, interaction layer, layered composite, energy product.

REFERENCES

- [1] Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. Mechanics of multilayer structures. M.: Mechanical Engineering, 1980.375 p. (in Russian)
- [2] Cherepanov G.P. Fracture mechanics of composite materials. M. : Nauka, 1974. 640 p. (in Russian)
- [3] Allen H.G., Feng Z. Classification of Structural Sandwich Panel Behavior // Mechanics of Sandwich Structures. Springer, Dordrecht, 1998. pp. 1–12. (in Russian)
- [4] Lurie S., Volkov-Bogorodskii D., Tuchkova N. Exact solution of Eshelby-Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions // Acta Mechanica. 2015.No 3. pp. 1–12. (in Russian)
- [5] Mattei O., Bardella L. A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions // Eur. J. Mech. A-Solid. 2016. Vol. 58. pp. 172–186. (in Russian)
- [6] Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // Composite Structures. 2016. Vol. 137. pp. 140–147. (in Russian)
- [7] Panteghini A., Bardella L. Structural theory and finite element modeling of linear elastic sandwich beams // Eur. J. Mech. A-Solid. 2017. Vol. 61. pp. 393–407. (in Russian)
- [8] Goldstein R.V., Osipenko N.M. Detachment of coatings under the action of thermoelastic stresses (Beam approximation) // Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya. 2007. No 4 (54). pp. 66–83. (in Russian)
- [9] Ustinov K.B. On the delamination of a layer from a half-plane; elastic sealing conditions for an equivalent layer plate // Izv. RAN. MTT. 2015. No 1 (50). pp. 75–95. (in Russian)
- [10] Evams A.G., Hutchinson J.W. On the mechanics of delamination and spalling on compressed films // International Journal of Solids and Structures. 1984. No. 5 (20). pp. 455–466. (in Russian)
- [11] Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S. Surface energy and adhesion energy of elastic bodies // Izv. RAN. MTT. 2017. No1 (52). S. 76–91. (in Russian)
- [12] Mantari J.L., Yarasca J. A simple and accurate generalized shear deformation theory for beams // Composite Structures. 2015. Vol. 134. pp. 593–601. (in Russian)

© Abdurakhmanov A. A., Глаголев В. В., 2019

Abdurakhmanov Amir Abduraufovich

e-mail: dragon.1993@inbox.ru, Postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia

Glagolev Vadim Vadimovich

e-mail: vadim@tsu.tula.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Tula State University, Tula, Russia

- [13] Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory // *Engineering Fracture Mechanics*. 2017. Vol. 169. pp. 309–320. (in Russian)
- [14] Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. *Plates and shells*. M.: Fizmatgiz, 1963. 636 p. (in Russian)
- [15] Morozov N.F., Tovstik P.E. Bending of a two-layer beam with non-rigid contact between layers // *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2011. No 1 (75). pp. 112–121. (in Russian)
- [16] Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. A generalized Timoshenko-Reissner model for a multilayer plate // *Izv. RAN. MTT*. 2016. No 5 (51). pp. 22–35. (in Russian)
- [17] Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. Modeling the process of separation of a composite with an adhesive layer // *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*. 2016. No. 2. pp. 34–44. (in Russian)
- [18] Abdurakhmanov A.A., Glagolev V.V., Glagoleva M.O. About one model representation of double-beam beam deformation // *Vestnik TulGU. Seriya: Differentsial'nye uravneniya i prikladnye zadachi*. 2019. No 1. pp. 26–36. (in Russian)
- [19] Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *International Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 158. pp. 141–149. (in Russian)