

К. Н. Пестов, О. Н. Любимова, М. В. Останин

## ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТИПА СТЕФАНА

*Дальневосточный федеральный университет, г.Владивосток, Россия*

**Аннотация.** Предлагается конечно-разностный метод решения двухфазных задач типа Стефана с одновременно существующими и изменяющимися несколькими границами раздела фаз. Суть метода состоит в ведении в уравнение теплопроводности дополнительной функции — источника тепла, которая определяет положение фронта фазового перехода и численно находится на каждом временном слое. Приведены результаты расчетов по предложенному методу задач с импульсным источником и двумерной задачи с неоднородными краевыми условиями. Проведено сравнение с результатами классической задачи Стефана и квазистационарным решением Лейбензона при решении задачи о промерзании трубы.

**Ключевые слова:** фазовый переход первого рода, задача Стефана, разностная схема, численные методы, граница раздела фаз.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.41.3.002

УДК: 519.633:517.958

### Введение

Актуальность поиска наиболее простых и эффективных алгоритмов кинетики фазовых границ связанных с фазовыми переходами первого рода в классификации Эренфеста, обусловлена не только практическими задачами плавления и кристаллизации металла, но и проектированием уникальных сооружений, например, мерзлотных плотин, оснований нефтяных платформ и пирсов из льда для эксплуатации в арктических условиях. Одной из основных особенностей моделирования подобных сооружений является необходимость учета возможности резкого изменения физических свойств тела плотины, пирса или основания платформы при переходе из мерзлого состояния (льда)

---

© Пестов К. Н., Любимова О. Н., Останин М. В., 2019

*Пестов Константин Николаевич*

**e-mail:** kopestov@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Дальневосточный федеральный университет, г.Владивосток, Россия.

*Любимова Ольга Николаевна*

**e-mail:** berms@mail.ru, кандидат физико-математических наук, профессор, Дальневосточный федеральный университет, г.Владивосток, Россия.

*Останин Максим Валентинович*

**e-mail:** ostanin.mv@dvvfu.ru, ассистент, Дальневосточный федеральный университет, г.Владивосток, Россия.

Поступила 31.05.2019

в талое (вода). В результате одной из задач при формировании модели является определение границ областей мерзлых и талых рассматриваемого сооружения. При моделировании подобных явлений существуют два основных подхода к решению задач с границей раздела фаз: сквозной счет и явное выделение границы раздела фаз. Методы первого направления способны выявить важные особенности термических процессов при фазовых переходах, однако описание локальных полей температуры и динамики положения границы фазового перехода при таком подходе невозможно. Численные методы, второго подхода как правило обладают высокой точностью выделения межфазной границы, но становятся алгоритмически весьма сложными в случае многофазных и многомерных задач или для случая циклического изменения температуры на границе, когда число немонотонно движущихся фронтов может быть несколько, причем некоторые из них могут сливаться друг с другом или исчезать. Среди наиболее распространенных: метод ловли фронта в узел сетки [1], методы адаптивной сетки [2], выпрямления фронта [3] и дробных шагов [4]. Метод ловли фронта в узел сетки имеет два варианта реализации, когда задается временной шаг, а пространственная сетка подбирается так, чтобы фронт попал в узел и наоборот, когда временной шаг подбирается так, чтобы фронт попал в узел стационарной пространственной сетки. Оба варианта ограничены случаем только одного монотонно меняющегося фронта. При использовании методов адаптивной сетки возникает нетривиальная задача на каждом временном слое строить «хорошую» сетку, причем для сложных областей задача построения сетки может по сложности превосходить исходную задачу. Методы выпрямления фронтов основаны на замене пространственной переменной, так чтобы исходная задача в области с криволинейной границей переходила в уже другую задачу, определенной в прямоугольной области. Метод тоже имеет ограничение по числу фронтов. Предлагаемый в настоящей статье численный метод является некоторым симбиозом сквозных методов и метода ловли фронта в узел сетки. Метод можно применять для случая любого количества фронтов, как для одномерных, так и для многомерных задач

### Постановка задачи

Рассмотрим Материальное тело в виде одномерного стержня, двумерной пластины или трехмерной области сделано из материала, теплофизические свойства которого задаются следующими параметрами:  $c^+$ ,  $c^-$  — удельная теплоемкость,  $\rho^+$ ,  $\rho^-$  — плотность,  $\lambda^+$ ,  $\lambda^-$  — коэффициент теплопроводности соответственно жидкой и твердой фаз,  $T^*$ ,  $Q^*$  — температура и скрытая теплота плавления.

Для простоты изложения зависимость коэффициентов  $c$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$  от температуры можно не учитывать и ввести коэффициент температуропроводности  $a = \lambda/(c\rho)$

Тело в каждый момент времени может содержать несколько одновременно существующих твердых и жидких зон, пересекающихся по поверхностям фазового перехода  $S(t) = \{x|T(x,t) = T^*\}$ . Объединение всех твердых зон обозначим через  $\Omega_l(t) = \{x|T(x,t) < T^*\}$ , а объединение жидких через  $\Omega_s(t) = \{x|T(x,t) > T^*\}$ . В процессе теплопередачи может меняться как положение фронтов, так и их количество: могут рождаться новые, исчезать или сливаются в один. Каждый фронт — это односвязная поверхность, такая что  $S(t) = \{x|T(x,t) = T^*\}$ . Если фронтов нет, то тело находится полностью в твердом или жидком состоянии.

Функция температуры внутри каждой из фаз описывается уравнением теплопроводности

$$c\rho = \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T, x \in \Omega_l(t) \cup \Omega_s(t)$$

В классической постановке на границе фазового перехода задаются два условия. Первое — условие непрерывности температуры  $[T]_s = 0$  т.е. скачок температуры равен нулю. Второе — это условие Стефана  $\left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right]_s = Q^* \frac{\partial \xi}{\partial t}$ , где  $\xi$  — скорость движения фронта и  $n$  — вектор нормали к поверхности  $S$ .

Построим модель фазового перехода без условия Стефана. Доопределим (сгладим) коэффициент теплопроводности на границе раздела фаз следующим образом:

$$\lambda = \begin{cases} \lambda^+, & \text{если } T \leq T^* - T' \\ \lambda^*, & \text{если } T^* - T' \leq T \leq T^* + T' \\ \lambda^-, & \text{если } T \geq T^* + T' \end{cases}$$

Рассмотрим некоторый малый объем тела  $\Delta V$ . Пусть в момент времени  $t^*$  он достиг температуры плавления, тогда уравнение баланса энергии с учетом закона Фурье за малое время  $\Delta t = t - t^*$ , такое, что этот объем не изменил агрегатного состояния, можно записать в виде

$$\int_{\partial V} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} ds \Delta t = \int_V \Delta Q dV,$$

Здесь  $\Delta Q$  — приращение тепла за время  $\Delta t$ . Этот объем сменит состояние, если  $\Delta Q = \rho Q^*$ .

Воспользовавшись непрерывностью коэффициента теплопроводности и теоремой Остроградского-Гаусса, разделяя обе части на  $\Delta t$  и переходя к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \begin{cases} c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, & T \neq T^* \text{ или } Q = \rho^- Q^* \text{ или } Q = -\rho^+ Q^* \\ \frac{\partial Q}{\partial t}, & T = T^* \text{ и } Q < \rho^- Q^* \text{ и } Q > -\rho^+ Q^* \end{cases} \quad (1)$$

Введем две функции, позволяющие учесть непрерывное накопление (выделение) энергии, затрачиваемой на фазовый переход (или выделяемой при фазовом переходе) в уравнении теплопроводности (1) следующим образом:

$$\gamma(x, t) = \begin{cases} 1, & T = T^* \\ 0, & T \neq T^* \end{cases}, Q(x, t) = \begin{cases} \bar{Q}, & \text{для } \gamma(x, t) = 1 \\ 0, & \text{для } \gamma(x, t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\bar{Q}$  — ограниченная функция, характеризующая удельное (отнесенное к единице объема) тепло, затраченное на фазовый переход, которая определяется в процессе решения.

Используя формулы (2), уравнение (1) может быть переписано в виде

$$c\rho(1 - \gamma(x, t)) \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T - \gamma(x, t) \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (3)$$

На внешней границе всего тела заданы условия теплообмена по закону Ньютона (краевые условия 3-го рода):

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} - \chi (T - T_e(t)) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

где  $\chi$  — коэффициент теплоотдачи,  $T_e$  — функция температуры окружающей среды,  $n$  — вектор нормали к внешней поверхности.

В начальный момент времени  $t = 0$  задано некоторое распределение температуры  $T|_{t=0} = T_0(x)$ . Математическая модель, содержащая уравнение (1) и краевые условия, является замкнутой.

### Разностная схема

Изложение предлагаемого численного метода ведется на примере одномерной задачи в декартовых координатах. Для многомерного случая задача отличается только за счет температурной части, так как в уравнении (1) введенная функция  $q$  дифференцируется только по времени, в криволинейных координатах изменяется только выражение лапласиана.

В одномерном случае не ограничивая общности можно считать, что решение ищется в области  $D = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$ . Построим пространственно-временную сетку  $\omega = \omega_x \times \omega_t$  равномерную по координате с шагами  $\Delta_x: \omega_x = \{x_{i+1} = x_i + \Delta_x, i = 0 \dots N-1\}$  и неравномерную по времени  $\omega_t = \{t_{j+1} = t_j + \Delta_{t,j}, j = 0, 1, 2, \dots\}$  с переменным шагом  $\Delta_{t,j}$

Шаг по времени будем выбирать следующим образом. Если в теле фазовых переходов нет, то задача теплопроводности решается с фиксированным начальным шагом  $\Delta_t$ . Фазовый переход в теле появляется, как только температура в какой-то точке станет равна  $T^*$ . Соответственно на следующем временном шаге температура в этой точке известна, и ищется в этом узле только функция  $Q(x, t)$ . Если найденное значение попало в интервал  $(\rho^+ Q^*, \rho^- Q^*)$ , то шаг  $\Delta_t$  приемлем. Если же  $Q$  не попало в указанный интервал, то шаг необходимо уменьшить, например вдвое, и пересчитать временной слой. Фазовый переход произойдет в точке, если выполнится одно из условий:  $Q = -\rho^+ Q^*$  или  $Q = \rho^- Q^*$ . В первом случае произойдет плавление, во втором затвердевание. Зададим точность попадания в концы интервала. Таким образом, определим шаг  $\Delta_{t,j}$

$$\Delta_{t,j} = \begin{cases} \Delta_t, & \text{если } T_i^j < T^* - \varepsilon \text{ или } T_i^j > T^* + \varepsilon, \\ \frac{\Delta_t}{2^s}, & \text{если } -\rho^+ Q^* + \varepsilon \leq Q_i^j \leq \rho^- Q^* - \varepsilon, \end{cases}$$

где  $s$  — номер итерации на  $j$  — ом временном слое.

Рассмотрим аппроксимацию уравнений (3)-(5) и краевых условий (6). Из начальных условий известно решение на нулевом временном слое  $T_i^0 = T_0(x_i)$ .

Каждому внутреннему узлу в теле на  $j$  — ом временном слое ставится в соответствие разностное уравнение:

$$c\rho(1 - \gamma_i^j) \frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\Delta_{t,j}} = \lambda \frac{T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j}{\Delta_x^2} - \gamma_i^j \frac{Q_i^j - Q_i^{j-1}}{\Delta_{t,j}}, i = 1, \dots, N-1 \quad (5)$$

В граничных узлах задаются уравнения

$$\lambda \frac{T_1^j - T_0^*}{\Delta_x} - \chi_0(T_0^j - T_e^j) = 0, \lambda \frac{T_N^j - T_{N-1}^j}{\Delta_x} - \chi_N(T_N^j - T_e^j) = 0 \quad (6)$$

Положение границы фазового перехода можно отследить по сеточной функции, которая определяется как

$$\gamma_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } -\rho^+ Q^* + \varepsilon < Q_i^{j-1} < \rho^- Q^* - \varepsilon \text{ и } T^* - \varepsilon < T_i^{j-1} < T^* + \varepsilon \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Если  $\gamma_i^j = 1$ , то в данной точке в данный момент времени находится граница фазового перехода. Если  $\gamma_i^j = 0$ , то уравнение (1) в данной точке превращается в обыкновенное уравнение теплопроводности. Сеточные функции  $Q_i^j$  и  $T_i^j$  в зависимости от  $\gamma_i^j$  равны

$$T_i^j = \begin{cases} T_i^j, & \text{если } \gamma_i^j = 0, \\ T_i^{j-1}, & \text{если } \gamma_i^j = 1, \end{cases} \quad Q_i^j = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma_i^j = 0, \\ Q_i^j, & \text{если } \gamma_i^j = 1 \end{cases}$$

Систему уравнений (4),(5) запишем в матричном виде  $A^j T^j = B^j$ , где  $T^j = (T_0^j, \dots, T_N^j)^T$  — вектор значений температуры на  $j$  — ом временном слое. Матрица системы  $A^j = (a_{ml})$  является трехдиагональной. Ее элементы и элементы вектора свободных членов определяются следующим образом:

при  $m = 1$  ( $x_0^j$  — начальная точка):

$$a_{11} = -\frac{\lambda}{\Delta_x} - \chi_0, a_{12} = \frac{\lambda}{\Delta_x}(1 - \gamma_2^j), b_1 = -\chi_0 T_0(t_j) - \frac{\lambda}{\Delta_x} \gamma_2^j,$$

при  $1 < m < N$  ( $x_m^j$  — внутренняя точка):

$$a_{m,m-1} = \frac{\lambda}{\Delta_x^2}(1 - \gamma_{m-1}^j), a_{m,m+1} = \frac{\lambda}{\Delta_x^2}(1 - \gamma_{m+1}^j)$$

$$a_{mm} = \left( \frac{2\lambda}{\Delta_x^2} + \frac{c\rho}{\Delta_{t,j}} \right) (\gamma_m^j - 1) - \frac{\gamma_m^j}{\Delta_{t,j}}$$

$$b_m = c\rho(\gamma_m^j - 1)T_m^{j-1} - \gamma_m^j \frac{Q_m^{j-1}}{\Delta_{t,j}} - \frac{\lambda}{\Delta_x^2}(1 - \gamma_{m+1}^j)T_{m+1}^{j-1} - \frac{\lambda}{\Delta_x^2}(1 - \gamma_{m-1}^j)T_{m-1}^{j-1}$$

при  $m = N$  ( $x_N^j$  — конечная точка):

$$a_{N,N-1} = -\frac{\lambda}{\Delta_x}(\gamma_{N-1}^j - 1), a_{NN} = \frac{\lambda}{\Delta_x} - \chi_0, b_N = -\chi_N T_N(t_j) + \frac{\lambda}{\Delta_x} \gamma_{N-1}^j.$$

Все остальные элементы матрицы равны нулю. Система может быть эффективно решена методом прогонки.

### Примеры численного моделирования

Во всех рассмотренных примерах  $N = 100$ . Рассмотрим две одномерных задачи, имеющие аналитическое решение.

Классическая задача Стефана.

Задача о промерзании в области  $x \geq 0$  ставится следующим образом. Необходимо найти распределение температуры  $T(x, t)$  и закон движения фронта фазового перехода  $\xi = \xi(t)$ , если в начальный момент все полупространство занято водой, имеющей нулевую температуру  $T(x, 0) = 0$ , а в последующие моменты времени на границе задана постоянная отрицательная температура:  $T(0, t) = T_0$ . Задача имеет аналитическое решение известное как автомодельное решение Стефана [6].

При численном моделировании были заданы следующие граничные условия:  $T(0, t) = -5^\circ\text{C}$ ,  $T(1, t) = 0^\circ\text{C}$ . Параметры материала :  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ ;  $a^+ = 0.136 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ ,  $a^- = 0.988 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ ,  $Q = 332400 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$ . Задача является однофазной, поскольку температура в одной фазе постоянна и равна начальной температуре (рис. 1). Графики положения фронта во времени на рис. 1а соответствуют:  $\xi_s(t)$  — автомодельному решению Стефана,  $\xi_n(t)$  — численному решению. Максимальная относительная погрешность

на данной сетке не превышает 4%, на сетке  $N = 200$  не превосходит 2.1 %. Заметим, что метод демонстрирует хорошую сходимость к автомодельному решению.

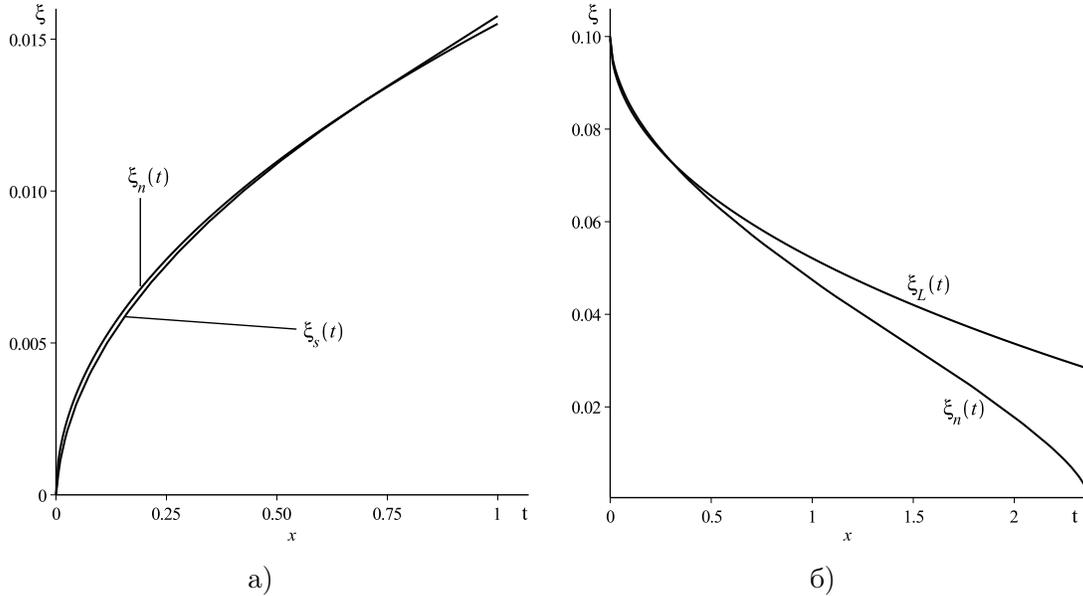


Рис. 1. Сравнение численного решения с а) автомодельным решением б) решением Лейбенсона

Задача о промерзании цилиндрической трубы.

Имеется неограниченный по высоте цилиндр радиуса  $R$ , заполненный водой при температуре  $T(r, 0) = 0^\circ\text{C}$ ,  $0 \leq r \leq R$ . Начиная с некоторого момента времени  $t = 0$  на поверхности цилиндра поддерживается постоянная температура  $T(R, t) = T_0$ ,  $t > 0$ . Фронт промерзания начинает двигаться от поверхности к оси цилиндра, и через некоторое время вся жидкость в трубе замерзает. Задача имеет полуаналитическое решение квазистационарным методом Лейбенсона [2]. Краевые условия при моделировании приняты следующие:  $T_0 = -5^\circ\text{C}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial x}|_x = 0$  материал — вода,  $R = 0.1\text{м}$ .

Графики движения фронта по времени на рис. 1б соответствуют:  $\xi_L(t)$  — решению Лейбенсона,  $\xi_n(t)$  — численному решению. На начальном этапе, пока распределение температуры в замершей части можно описывать стационарными решениями, кривые практически не отличаются. В дальнейшем наблюдается отклонение, которое можно объяснить погрешностью метода Лейбенсона. Время полного затвердевания  $t = 2.98$  (ч).

Пример задачи с импульсным источником.

На правый конец стержня длины  $l$  импульсом подается тепловой поток высокой интенсивности  $q = -\frac{2 \cdot 10^8}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$  второй же конец стержня теплоизолирован. Начальная температура равна  $T(x, 0) = 20^\circ\text{C}$ . Параметры материала  $a^+ = 0.136 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ ,  $a^- = 0.988 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ ,  $Q^* = 332400 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$ ,  $T^* = 660^\circ$  соответствуют алюминию  $l = 0.1\text{м}$ . Подобные задачи возникают, например при моделировании сварочных процессов.

На рис. 2а показано изменение температуры в различных точках стержня с течением времени. График зависимости положения фронта от времени изображен на рис.

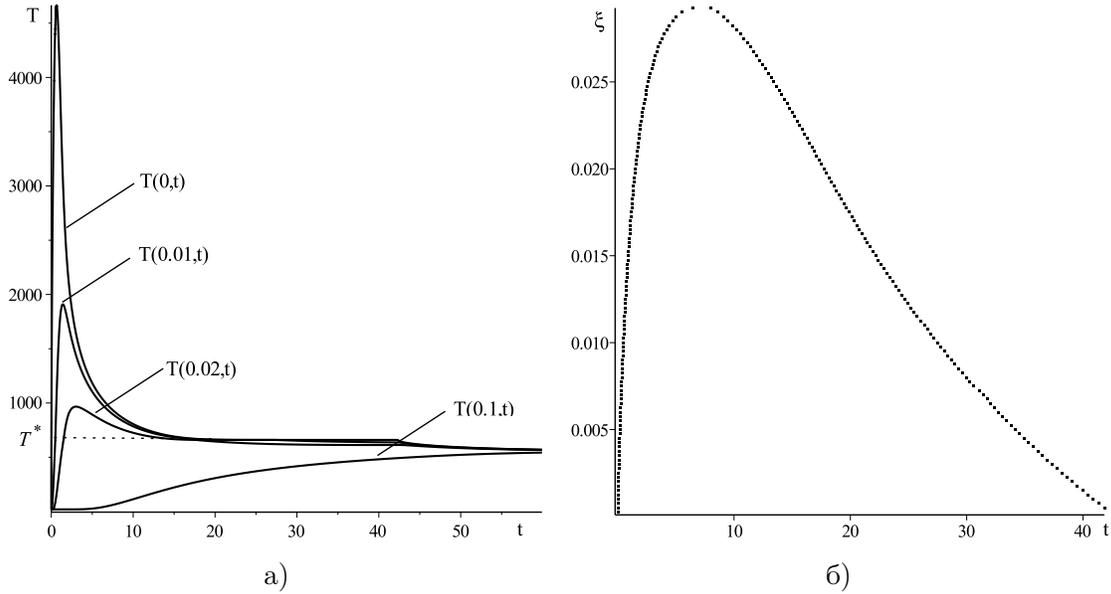


Рис. 2. Временной профиль температуры в некоторых точках стержня и положение фронта.

26. Максимальная толщина проплавления составляет  $\xi_m ax = 0.029$  и соответствует времени  $t = 8.63$ (ч). После этого времени стержень начинает кристаллизоваться. Причем в виду того, что разница температур на концах стержня значительна, второй фронт не образуется. Ко времени  $t = 41.83$ (ч) стержень вернулся в полностью твердое состояние.

Граничные условия  $T(0,t) = 10 \sin\left(\frac{\pi t}{21600}\right)$ ,  $T(0.1,t) = -10 \sin\left(\frac{\pi t}{21600}\right)$ . Начальная температура  $T(x,0) = 10^\circ C$  Материал – вода.

На рис.3 представлены результаты моделирования. На рис. За приведен характер распределения температуры по времени на левом конце  $x = 0$  и в середине стержня  $x = 0.5$ . Заметно, что изменение температуры в середине стержня имеет периодический характер при  $t > 15$ .

На рис. 3б приведено положение фронта фазового перехода во времени. Видно, что сначала материал слева начинает плавиться, затем возникают оба фронта, т.е. периодические граничные условия определяют и периодическую динамику движения фронта.

Пример двумерной задачи.

Рассматривается задача о плавлении квадратного алюминиевого бруса со стороной  $h = 1$  бесконечной длины и начальной температурой  $\hat{Q}_0 = 20^\circ$ . Условия на боковых поверхностях заданы в виде

$$\left[ \lambda \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} + \chi_1(T(x,y,t) - \hat{Q}_e) \right] \Big|_{x=0} = 0 \quad \left[ \lambda \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} + \chi_2(T(x,y,t) - \hat{Q}_e) \right] \Big|_{y=0} = 0$$

$$\left[ \lambda \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} + \chi_3(T(x,y,t) - \hat{Q}_e) \right] \Big|_{x=h} = 0 \quad \left[ \lambda \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} + \chi_4(T(x,y,t) - \hat{Q}_e) \right] \Big|_{y=h} = 0$$

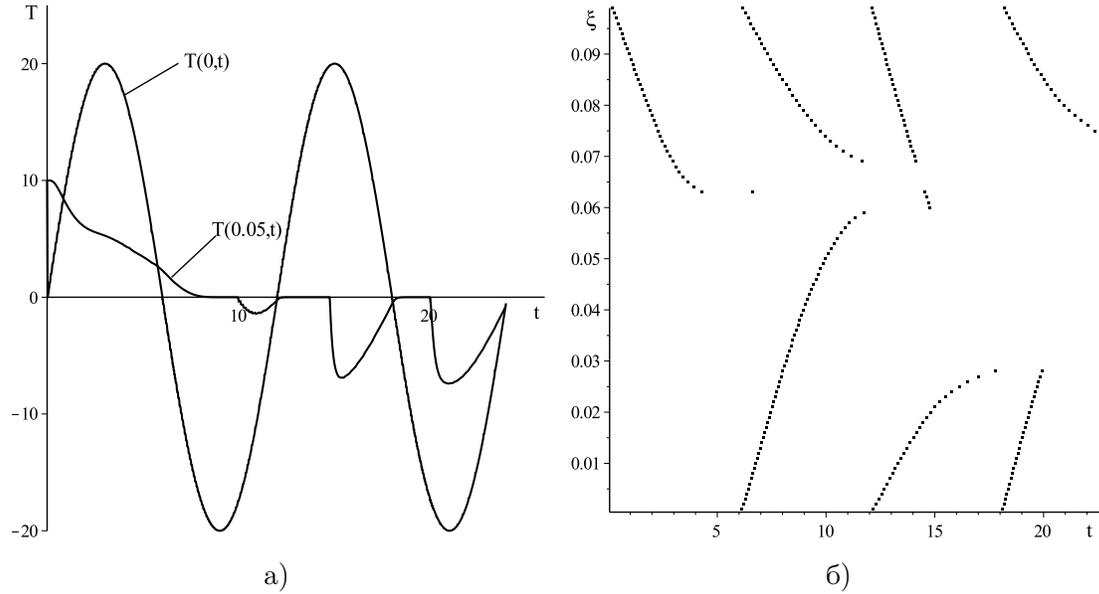


Рис. 3. Временной профиль температуры и положение фронта.

где  $\hat{Q}_e = 2200^\circ C$ , а коэффициенты теплоотдачи соответствуют вариантам а)  $\chi_1 = 300 \frac{W}{m^2 \cdot C}$ ,  $\chi_2 = 400 \frac{W}{m^2 \cdot C}$ ,  $\chi_3 = 100 \frac{W}{m^2 \cdot C}$ ,  $\chi_4 = 200 \frac{W}{m^2 \cdot C}$  б)  $\chi_1 = 0 \frac{W}{m^2 \cdot C}$ ,  $\chi_2 = 0 \frac{W}{m^2 \cdot C}$ ,  $\chi_3 = 200 \frac{W}{m^2 \cdot C}$ ,  $\chi_4 = 400 \frac{W}{m^2 \cdot C}$

На рис. 4 представлены результаты расчета, кривые линии представляют собой фронт фазового перехода в различные моменты времени

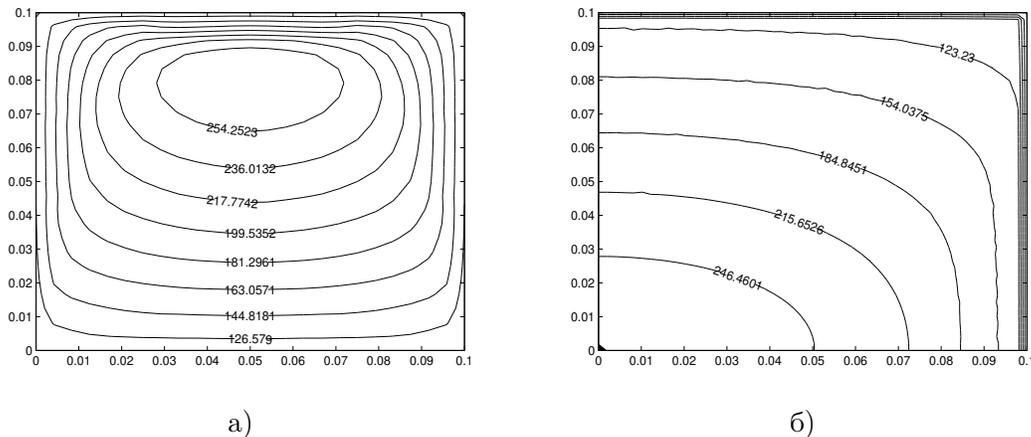


Рис. 4. Динамика фронта фазового перехода во времени.

### Заключение

В настоящей работе предложен численный метод решения одно- и многомерных задач типа Стефана с несколькими границами раздела фаз. Метод позволяет решать

задачи с заранее неизвестным количеством фронтов, для областей произвольной геометрии, сложными граничными условиями. Результаты расчетов приведенных задач демонстрируют простоту расчетов и адекватность результатов. Практическое применение метода можно связать с различными технологическими задачами в материаловедении, например, при получении слоистых композиционных материалов методами температурной обработки и прогнозировании поведения грунтов в гидротехнических сооружениях при сезонных колебаниях температуры.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Никитенко Н.И. Исследование процессов тепло- и массообмена методом сеток. к.-наук. Думка, 1978. 213 с.
- [2] Лыков А.В. теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
- [3] Будаков Б.М., Соловьева Е. Н., Успенский А.Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана //Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. № 5. С. 828–840.
- [4] Самарский А. А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. № 5. С. 816–827.
- [5] Будаков Б.М., Гольдман Н.А., Успенский А. Б. разностные схемы с выпрямлением фронтов для решения многофронтовых задач типа Стефана // Докл. АН СССР. 1966. № 4. С. 735–738.
- [6] Голубева А.А. стандартная программа численного решения краевой задачи Стефана для одномерных параболических уравнений разностным методом с «дробными шагами по  $x$  и  $t$ » // Методы решения краевых и обратных задач теплопроводности / (Под ред. А. Б. Успенского). Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1975. С. 39–51.
- [7] Дарьин Н.А., Мажукин В.И. математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке //Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 7.

K. N. Pestov, O. N. Lyubimova, M. V. Ostanin

## THE METHOD OF SOLVING PROBLEMS TYPE OF STEFAN WITH PHASE TRANSITIONS OF THE FIRST KIND

*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

**Abstract.** The finite-difference method of solving the two-phase Stefan-type problems with several simultaneously existing and variable phase interfaces is proposed. The principle of method consists in entering into the heat conduction equation the additional function – heat source which identifies the position of the phase transition front and is numerically determined on every temporal layer. The calculation results based on the proposed method for problems with pulsed source and two-dimensional problem with the inhomogeneous boundary conditions are presented. The results were compared with those of the classical Stefan type problem and quasi-stationary Laybenson solution for the problem of the pipe freezing.

**Keywords:** first-order phase transition, Stefan problem, difference scheme, numerical methods, phase interface.

## REFERENCES

- [1] Nikitenko N.I. Study of the heat-mass exchange processes by the grid method. Kiev: Naukova Dumka, 1978. 213 p. (in Russian)
- [2] Lykov A.V. Theory of thermal conduction. Moscow.: Vysshaya shkola, 1967. 600 p. (in Russian)
- [3] Budak B.M., Solovyeva E.N., Uspensky A.B. Finite difference method with smoothing of coefficients for solving the Stefan problems // Journal of numerical mathematics and mathematical physics. 1965. No. 5. pp. 828–840. (in Russian)
- [4] Samarsky A.A., Moiseenko B.D. Economic scheme of the through computation for the multi-dimensional Stefan problem // Journal of numerical mathematics and mathematical physics. 1965. No. 5. pp. 816–827 (in Russian)
- [5] Budak B.M., Goldman N.A., Uspensky A.B. Difference schemes with front rectification for solving the multi-front Stefan problems // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1966. No. 4. pp. 735–738 (in Russian)
- [6] Golubeva A.A. Standard program of the computation solution of the boundary Stefan problem for one-dimensional parabolic equations by the finite difference method with «fractional steps in  $x$  and  $t$ » // Methods for solving boundary value and inverse problems of thermal conductivity. Moscow: Publ. of Moscow University. 1975. pp. 39–51 (in Russian)
- [7] Daryin N.A., Mazhukin V.I. Mathematical modeling of the Stefan problem on the adaptive grid // Differential equations. 1987. No. 7. pp. 1154–1160 (in Russian)

---

*Pestov Konstantin Nikolaevich*

e-mail: kopestov@yandex.ru, Candidate of physico & mathematical sciences, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

*Lyubimova Olga Nikolaevna*

e-mail: berms@mail.ru, Candidate of physico & mathematical sciences, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

*Ostanin Maxim Valentinovich*

e-mail: ostanin.mv@dvfu.ru, assistant & mathematical sciences, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.