Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3 (41). С. 104–109

А. Н. Максимов[1], *Е. А. Деревянных*[1], *Ю. П. Дмитриев*[1], *Т. В. Митрофанова*[2]

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СЖИМАЕМОГО ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ

[1] *Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия*
[2] *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. В работе получены компоненты напряжений в пластической области для пространства из сыпучего материала, ослабленного эллипсоидальной полостью. В данной задаче действуют взаимноперпендикулярые силы на бесконечности при остутсвии давлений внутри полости. Задача решена в сферической координатной системе в безразмерных единицах длины.

Ключевые слова: напряжения, деформации, пластичность, эллипсоидальная полость.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.41.3.008

УДК: 539.374

Введение

Во многих отраслях, таких как горное дело, строительная механика и причих немаловажное место имеет определение напряженного состояния массива вокруг различного рода выемок и полостей. Определение напряженного состояния пространства из сжимаемого идеально-пластического материала, ослабленного сферической полостью, было приведено в [1]. В [2], [3], [4], [5], [6] были приведены решения задач для сжимаемого упругопластического материала с полостями при соблюдении условий полной пластичности Треска-Сен-Венана. В этих работах были рассмотрены все три случая, удовлетворяющие данным условиям, один из которых соответствовал случаю

Максимов Алексей Николаевич
`e-mail`: alexei.maksimow@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.
Деревянных Евгения Анатольевна
`e-mail`: jane-evgeniya@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.
Дмитриев Юрий Петрович
`e-mail`: 14102010olga@mail.ru, кандидат технических наук, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.
Митрофанова Татьяна Валерьевна
`e-mail`: mitrofanova_tv@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.09.2019

со сферической полостью [2], [3], [4], а два других [5], [6] представляли решение аналитической задачи. В [7] было представлено подробное решение для всех трех случаев.

В данной работе рассматривается пространство с эллипсоидальной полостью из сжимаемого идеально пластического материала при взаимноперпендикулярном приложении уислий на бесконечности. Задача решена в сферической системе координат, использован метод малого параметра, величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу полости ρ_0.

Рассматривается массив из сыпучей среды, обладающей свойствами внутреннего трения и сцепления. Условие предельного состояния сыпучей среды берется в виде [8]

$$f(\sigma'_{ij}) = k_0 + a\sigma, \tag{1}$$

где $a = \operatorname{tg}\alpha$ — коэффициент внутреннего трения, α — угол внутреннего трения, σ'_{ij} — напряжения, k_0 — удельное сцепление.

Используем уравнения равновесия [8]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho}(2\sigma_\rho - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{\rho\theta}\operatorname{ctg}\theta) = 0,\\
\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho}((\sigma_\theta - \sigma_\varphi)\operatorname{ctg}\theta + 3\tau_{\rho\theta}) = 0,\\
\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho}(3\tau_{\rho\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta) = 0.
\end{gathered} \tag{2}$$

Условия пластичности Треска-Сен-Венана [8] с учетом (1):

$$\begin{gathered}
(\sigma_\rho - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3)(\sigma_\theta - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3) - \tau_{\rho\theta}^2 = 0,\\
(\sigma_\theta - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3)(\sigma_\varphi - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3) - \tau_{\theta\varphi}^2 = 0,\\
(\sigma_\varphi - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3)(\sigma_\rho - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3) - \tau_{\rho\varphi}^2 = 0,
\end{gathered} \tag{3}$$

а также

$$\begin{gathered}
(\sigma_\rho - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3)\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\rho\theta}\tau_{\rho\varphi},\\
(\sigma_\varphi - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3)\tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\varphi}\tau_{\theta\varphi},\\
(\sigma_\theta - \sigma + (k_0 + a\sigma)2/3)\tau_{\rho\varphi} = \tau_{\rho\theta}\tau_{\theta\varphi}.
\end{gathered} \tag{4}$$

Граничные условия:

$$\sigma_\rho l + \tau_{\rho\theta}m + \tau_{\rho\varphi}n = P_\rho, \quad \tau_{\rho\theta}l + \sigma_\theta m + \tau_{\theta\varphi}n = P_\theta, \quad \tau_{\rho\varphi}l + \tau_{\theta\varphi}m + \sigma_\varphi n = P_\varphi, \tag{5}$$

где σ_ρ, $\tau_{\rho\theta}$, ... — компоненты девиатора напряжения; l, m, n — направляющие косинусы нормали; P_ρ, P_θ, P_φ — проекции усилий на оси ρ, θ, φ; $\sigma = (\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_\varphi)/3$ — среднее давление.

Решения ищутся в виде рядов по малому параметру δ ($\delta \ll 1$) [4]:

$$\begin{gathered}
\sigma_\rho = \sigma_\rho^0 + \delta\sigma'_\rho, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \delta\sigma'_\theta, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^0 + \delta\sigma'_\varphi,\\
\tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\theta}^0 + \delta\tau'_{\rho\theta}, \quad \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\rho\varphi}^0 + \delta\tau'_{\rho\varphi}, \quad \tau_{\theta\varphi} = \tau_{\theta\varphi}^0 + \delta\tau'_{\theta\varphi}.
\end{gathered} \tag{6}$$

В качестве известных напряжений в невозмущенном состоянии принимаются [1]

$$\sigma_\theta^0 = \sigma_\varphi^0, \quad \tau_{\rho\theta}^0 = \tau_{\rho\varphi}^0 = \tau_{\theta\varphi}^0 = 0; \tag{7}$$

$$\sigma_\rho^{0p} = \frac{k_0}{a}\left(\rho^{-\frac{12a}{3+4a}} - 1\right), \quad \sigma_\theta^{0p} = \sigma_\varphi^{0p} = \frac{k_0}{a}\left(\rho^{-\frac{12a}{3+4a}} - 1\right) = A + D, \tag{8}$$

где $A = (3+4a)/(3-2a)$, $D = -6k_0/(3+4a)$.

Линеаризируя условия пластичности (3) и (4), получим

$$\sigma'_\rho = A\tilde{\sigma}', \tag{9}$$

$$\tau'_{\theta\varphi} = 0, \tag{10}$$

где $\tilde{\sigma}' = \sigma'_\theta = \sigma'_\varphi$. Уравнения равновесия (2) с учетом (10) примут вид [4]

$$\frac{\partial\sigma_\rho^0}{\partial\rho} + \frac{2}{\rho}(\sigma_\rho^0 - \sigma_\theta^0) = 0, \quad \frac{\partial\sigma_\theta^0}{\partial\theta} = \frac{\partial\sigma_\varphi^0}{\partial\varphi} = 0. \tag{11}$$

Для решения (11) введем функцию $U(\rho,\theta,\varphi)$ так, чтобы выполнялись:

$$\tilde{\sigma}' = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}, \quad \tau'_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial U}{\partial\theta}, \quad \tau'_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho^3\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}. \tag{12}$$

Тогда первые два уравнения (12) тождественно удовлетворяются, а последнее примет вид [4]

$$-A\rho^2\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2} + 2\rho\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta} = 0. \tag{13}$$

Решение (13) ищется методом разделения переменных. При этом:

$$U = R(\rho)\times\Theta(\theta)\times\cos m\varphi. \tag{14}$$

Тогда для $R(\rho)$ получим уравнение [3]

$$R'' - \frac{2}{\rho A}R' + \frac{\lambda}{\rho^2 A}R = 0. \tag{15}$$

Получим решение (15):

$$R = C_1\rho^{\chi_1} + C_2\rho^{\chi_2}, \tag{16}$$

$$\chi_{21} = \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\lambda}{A}}, \tag{17}$$

λ, C_1, C_2 будут определены ниже.

Для $\Theta(\theta)$ получим [3]:

$$\Theta'' + \operatorname{ctg}\theta\cdot\Theta' + \frac{\lambda - m^2}{\sin^2\theta} = 0. \tag{18}$$

Уравнение (18) является дифференциальным уравнением для присоединенных функций Лежандра. Решая совместно (18), (12) и (9), получим

$$\sigma'_\rho = -\frac{A}{\rho^2}R'\Theta\cos m\varphi, \quad \tau'_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho^3}R\Theta'\cos m\varphi, \quad \tau'_{\rho\varphi} = -\frac{m}{\rho^3\sin\theta}R\Theta\sin m\varphi, \tag{19}$$

где A представлена выше, $R' = \partial R(\rho)/\partial\rho$, $\Theta' = \partial\Theta(\theta)/\partial\theta$.

После линерализации граничных условий (5), получим [4]

$$\sigma'_\rho = \frac{\partial\sigma_\rho^0}{\partial\rho}\rho_1, \quad \tau'_{\rho\theta} = \sigma_\theta^0\frac{\partial\rho_1}{\partial\theta}, \quad \tau'_{\rho\varphi} = \sigma_\varphi^0\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\rho_1}{\partial\varphi}. \tag{20}$$

Полагая $\rho = 1$, после совместногорешения (20) и (8), получим граничные условия в виде:

$$\sigma'_\rho = B\rho_1(\theta,\varphi), \quad \tau'_{\rho\theta} = -\frac{B}{2}\frac{\partial\rho_1(\theta,\varphi)}{\partial\theta}, \quad \tau'_{\rho\varphi} = -\frac{B}{2\sin\theta}\frac{\partial\rho_1(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}, \tag{21}$$

где $B = -2D$, $\rho_1(\theta,\varphi)$ задает уравнение эллипсоида в первом приближении и определяется $\rho = 1 + \partial\rho_1(\theta,\varphi)$:

$$\rho_1(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\left[(c_1+c_2)(1-3\cos^2\theta) + (c_1-c_2)\sin^2\theta\cos 2\varphi\right], \tag{22}$$

где

$$c_1 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\frac{\rho_3-\rho_1}{\rho_2-\rho_3}, \quad c_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{\rho_3-\rho_1}{\rho_2-\rho_3},$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 — полуоси эллипсоида. Тогда решая совместно (19), (21), (22) и полагая $\rho = 1$, получим:

$$\begin{aligned}
R'\Theta\cos m\varphi &= -\frac{B}{2A}\left[(c_1+c_2)(1-3\cos^2\theta) + (c_1-c_2)\sin^2\theta\cos 2\varphi\right], \\
R\Theta'\cos m\varphi &= -\frac{B}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(c_1+c_2)(1-3\cos^2\theta) + (c_1-c_2)\sin^2\theta\cos 2\varphi\right], \\
mR\Theta\sin m\varphi &= \frac{B}{4}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(c_1+c_2)(1-3\cos^2\theta) + (c_1-c_2)\sin^2\theta\cos 2\varphi\right].
\end{aligned} \tag{23}$$

Общее решение $U(\rho,\theta,\varphi)$ складывается из двух решений:

$$U = U_0 + U_2, \tag{24}$$

где $U_0 = R_0\Theta_0$ — решение при $m = 0$; $U_2 = R_2\Theta_2\cos 2\varphi$ — решение при $m = 2$. Тогда, решая (23) при $m = 0$ и $m = 2$, получим $\lambda = 6$ — однозначное решение (18). Тогда, решая (15) при $\lambda = 6$, получим

$$R_0 = R_2. \tag{25}$$

Функция U_2 в соответствии с (24) и (25) примет вид

$$U_2 = (c_1-c_2)\sin^2\theta\cos 2\varphi(C_1\rho^{\chi_1} + C_2\rho^{\chi_2}). \tag{26}$$

После совместного ршения (24), (25) и (26), получим:

$$U(\rho,\theta,\varphi) = (C_1\rho^{\chi_1} + C_2\rho^{\chi_2})\left[(c_1+c_2)(1-3\cos^2\theta) + (c_1-c_2)\sin^2\theta\cos 2\varphi\right]. \tag{27}$$

Из граничных условий определяются константы:

$$C_1 = -\frac{AB\chi_1 - 2B}{4A(\chi_2-\chi_1)} - \frac{B}{4}, \quad C_2 = \frac{AB\chi_1 - 2B}{4A(\chi_2-\chi_1)}. \tag{28}$$

Подставляя (27) в (20) и принимая во внимание (9) и (10), получим для компонент напряжений в пластической области для пространства из сыпучего материала, ослабленного эллипсоидальной полостью, выражения

$$\sigma_\theta'^p = \sigma_\varphi'^p = -\frac{C_1\chi_1\rho^{\chi_1} + C_2\chi_2\rho^{\chi_2}}{\rho^3}\times$$
$$\times\left[(c_1+c_2)(1-3\cos^2\theta) + (c_1-c_2)\sin^2\theta\cos 2\varphi\right],$$

$$\tau_{\rho\theta}'^p = \frac{C_1\rho^{\chi_1} + C_2\rho^{\chi_2}}{3\rho^3}\frac{\partial P_2^2(\cos\theta)}{\partial\theta}\left[3(c_1+c_2) + (c_1-c_2)\cos 2\varphi\right], \qquad (29)$$

$$\tau_{\rho\varphi}'^p = -\frac{2(C_1\rho^{\chi_1} + C_2\rho^{\chi_2})}{3\rho^3\sin\theta}(c_1-c_2)\sin 2\varphi P_2^2(\cos\theta),$$

$$\sigma_\rho'^p = A\sigma_\theta'^p, \quad \tau_{\theta\varphi}' = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Максимов А. Н. Напряженное состояние идеальнопластического сжимаемого пространства, ослабленного сферической полостью // Сб. тр. Всероссийской НПК “Современное состояние прикладной науки в области механики и энергетики”. Чебоксары: Чувашская ГСХА, 2016. С. 592–599.

[2] Максимов А. Н., Ефремов В. Г. Об определении предельного напряженного состояния в массиве, ослабленном эллипсоидальной полостью // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2001. № 2(21). С. 128–134.

[3] Максимов А. Н., Пушкаренко Н. Н. К вопросу определения возмущенного состояния идеальнопластического сжимаемого массива, ослабленного сферической полостью // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3(29). С. 117–121.

[4] Maksimov A. N., Pushkarenko N. N. On determination of perfectly plastic disturbed rock mass state on condition of full plasticity // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. no. 1053. 012052 doi: 10.1088/1742-6596/1053/1/012052.

[5] Максимов А. Н. Об определении возмущенного состояния массива при условии полной пластичности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4(30). С. 102–107.

[6] К вопросу определения возмущенного состояния массива, ослабленного полостями / А. Н. Максимов, Н. Н. Пушкаренко, Е. А. Деревянных [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 3(33). С. 58–63.

[7] К вопросу определения предельного напряженного состояния массива, ослабленного полостями / А. Н. Максимов, Н. Н. Пушкаренко, Е. А. Деревянных [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 2(36). С. 50–64.

[8] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.

A. N. Maksimov[1], *E. A. Derevyannykh*[1], *Y. P. Dmitriev*[1], *T. V. Mitrofanova*[2]

STRESS STATE OF IDEALOPLASTIC COMPRESSIBLE SPACE WEAKENED BY ELLIPSOIDAL CAVITY

[1] *Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia*
[2] *I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

Abstract. In this work, stress components in the plastic region are obtained for a space of bulk material weakened by an ellipsoidal cavity. In the formulation of this problem at infinity, mutually perpendicular forces are applied, and there is no pressure inside the cavity. The solution to the problem is obtained in a spherical coordinate system in dimensionless units of length.

Keywords: stresses, deformations, plasticity, ellipsoidal cavity.

REFERENCES

[1] Maximov A. N. Stressed state of idealoplastic compressible space weakened by spherical cavity // Collection of works of the All-Russian NPC. Modern state of applied science in the field of mechanics and energy. Cheboksary: Chuvash GSHA, 2016. P. 592–599. (in Russian).

[2] Maximov A. N., Efremov V. G. About definition of extreme tension in the massif weakened by an ellipsoidal cavity // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2001. no. 2(21). P. 128–134. (in Russian).

[3] Maksimov A. N., Pushkarenko N. N. To the question of determining the perturbed state of the idealoplastic compressible massif weakened by the spherical cavity // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2016. no. 3(29). P. 117–121. (in Russian).

[4] Maksimov A. N., Pushkarenko N. N. On determination of perfectly plastic disturbed rock mass state on condition of full plasticity // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. no. 1053. 012052 doi: 10.1088/1742-6596/1053/1/012052. (in USA).

[5] Maksimov A. N. On Determining the Perturbed State of the Massif under Condition of Complete Plasticity // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2016. no. 4(30). P. 102–107. (in Russian).

[6] To the question of determining the perturbed state of the massif weakened by cavities / A. N. Maksimov, N. N. Pushkarenko, E. A. Derevyannih et al. // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2017. no. 3(33). P. 58–63. (in Russian).

[7] To the issue of determining the maximum stressed state of the massif weakened by cavities / A. N. Maksimov, N. N. Pushkarenko, E. A. Derevyannih et al. // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2018. no. 2(36). P. 50–64. (in Russian).

[8] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian).

Maksimov Alexey Nikolaevich, Candidate of Sci. Phys. & Math., Associate Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

Derevyannykh Evgenia Anatolevna, Candidate of Sci. Phys. & Math., Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

Dmitriev Yuri Petrovich, Candidate of Engineering Sciences, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

Mitrofanova Tatiana Valeryevna, Candidate of Sci. Phys. & Math., I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.