

Р. И. Непершин

О ПЛАСТИЧЕСКОМ ВЫДАВЛИВАНИИ ТОНКОСТЕННОГО СТАКАНА

*Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”,
г. Москва, Россия*

Аннотация. Рассчитывается идеально пластическое течение при выдавливании тонкостенного цилиндрического стакана жестким пуансоном при условии полной пластичности Треска. Вычисляются линии скольжения, контактные напряжения и годографы скоростей пластического течения для сферической и конической формы пуансона с учетом контактного трения по Прандтлю и контролем положительности диссипативной функции пластического течения. Получены зависимости контактных напряжений и среднего давления на пуансон от формы контактной границы, трения и относительной толщины стенки стакана.

Ключевые слова: тонкостенный стакан, выдавливание, сферический пуансон, конический пуансон, идеально пластическое течение, условие полной пластичности Треска, контактное трение, линии скольжения, контактные напряжения, годограф скоростей, диссипативная функция.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.001

УДК: 539.374 + 621.751

Введение. При крупносерийном производстве в машиностроении экономически эффективным способом изготовления полых деталей типа стакан является выдавливание жестким пуансоном из цилиндрической заготовки на механических и гидравлических прессах с высокой производительностью при экономии металла и уменьшении трудоемкости последующей механической обработки [1]. При высокой пластичности заготовки возможны процессы холодного выдавливания с высокой точностью цилиндрических поверхностей и минимальной механической обработке торцов [1, 2].

Выдавливание стаканов из углеродистых и легированных сталей сопровождается высокими контактными давлениями на инструмент в зависимости от технологических параметров процесса и контактного трения, которые приводят к снижению стойкости инструмента вследствие износа и усталости. Поэтому актуальной проблеме расчета технологических нагрузок на инструмент при выдавливании посвящено много работ.

В начальный период развития теории пластичности применяли инженерные методы с использованием приближенных условий равновесия и условий пластичности

© Непершин Р. И., 2019

Непершин Ростислав Иванович

e-mail: nepershin_rigambler.ru, доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”, г. Москва, Россия.

Поступила 20.09.2019

[3, 4, 5]. Аналитические методы оценки верхней оценки нагрузки для кинематически возможных полей скоростей пластического течения приведены в [6, 7, 8, 9]. Применение метода конечных элементов на основе математической теории пластичности [10, 11, 12] ограничено трудностями решения больших систем нелинейных уравнений с неизвестными жесткопластическими границами и сингулярным изменением напряжений и скоростей в точках пересечения границ пластической области с контактной границей инструмента.

В настоящей работе приведено решение задачи осесимметричного идеально пластического течения при выдавливании стакана, удовлетворяющее полной системе дифференциальных уравнений для напряжений и скоростей при условии полной пластичности на ребре призмы Треска в пространстве главных напряжений. В этом случае дифференциальные уравнения относятся к гиперболическому типу [13] и соответствуют сдвиговому механизму трехмерной пластической деформации по двум плоскостям скольжения. Решение получено численным интегрированием системы дифференциальных уравнений для напряжений и скоростей с использованием процедуры решения элементарных задач Коши и смешанного типа и контролем положительности диссипативной функции [14].

Рассматривается переход к стационарному пластическому течению при выдавливании стакана жестким пуансоном сферической и конической форм с учетом контактного трения по Прандтлю. На начальной стадии происходит нестационарный процесс вдавливания жесткой сферы или конуса в пластическое полупространство [14, 15, 16]. Пластическая область расширяется до контакта с границей матрицы и переходит в стационарное пластическое течение в стенку стакана. Ниже жесткопластической границы в заготовке возникают малые упругопластические деформации, которые в идеально пластической модели не учитываются. В этой области для расчета контактных напряжений на границах матрицы и выталкивателя при известных напряжениях на жесткопластической границе можно использовать метод конечных элементов для упругопластического тела [17].

Постановка задачи и основные уравнения. На рис. 1 показана схема выдавливания стакана из цилиндрической заготовки пуансоном диаметром d в полости матрицы диаметром D с нижним выталкивателем. Инструмент принимается жестким; пуансон перемещается со скоростью V , матрица и выталкиватель неподвижны.

Рассматривается начало стационарного пластического течения с образованием пластической области, ограниченной границами контакта с пуансоном и матрицей, свободной границей по толщине выдавливаемой стенки стакана и жесткопластической границей с нижней недеформируемой частью заготовки. При скольжении на границах контакта с инструментом принимается условие пластического трения по Прандтлю $\mu = \tau_c / \sigma_Y$, где τ_c — контактное касательное напряжение и σ_Y — напряжение текучести материала заготовки. При $\mu > 0$ на криволинейной границе пуансона в окрестности оси симметрии образуется центральная жесткая область [7].

Сила Q , действующая на пуансон, определяется напряжениями на границе контакта с пластической областью, зависящими от формы границы, коэффициента трения μ и квадрата отношения диаметров пуансона и матрицы, определяющего относительное изменение площади сечения заготовки и толщину стенки h при заданном диаметре пуансона d :

$$e = \frac{d^2}{D^2}, \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1 \right), \quad e^* < e < 1. \quad (1)$$

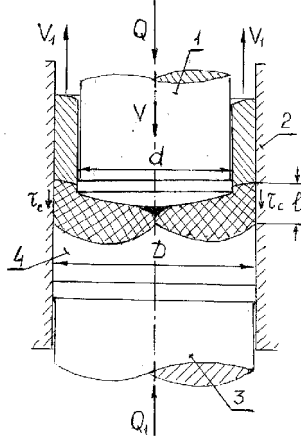


Рис. 1. Схема выдавливания стакана: 1 — пуансон, 2 — матрица, 3 — выталкиватель, 4 — заготовка

При $e < e^*$ пластическая область не распространяется до стенки матрицы; для сферической и конической форм пуансона нестационарное пластическое течение в этом случае моделируется вдавливанием в пластическое полупространство [14, 15, 16]. При $e \rightarrow 1$ происходит калибровка заготовки в замкнутой полости матрицы с образованием тонкого торцевого заусенца при $h \rightarrow 0$. Сила Q_1 , действующая на выталкиватель, при известном значении Q определяется условием статического равновесия заготовки с учетом трения на границе контакта l матрицы с пластической областью:

$$Q_1 = Q + \sigma_Y \mu \pi D l. \quad (2)$$

Скорость стенки стакана V_1 определяется условием пластической несжимаемости при заданной скорости пуансона V :

$$V_1 = \frac{Ve}{1-e}. \quad (3)$$

Материал заготовки идеально пластический; в пластической области выполняется условие полной пластичности на ребре призмы Треска в пространстве главных напряжений при осевой симметрии и положительной радиальной скорости $V_r > 0$ [13, 14]:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 1, \quad \sigma_2 = \sigma_1, \quad \sigma_2 = \sigma_\theta. \quad (4)$$

Напряжение текучести σ_Y принято за единицу для напряжений; σ_θ — окружное главное напряжение в цилиндрических координатах r, z, θ . При условиях (4) дифференциальные уравнения равновесия для напряжений и уравнения несжимаемости и изотропии для скоростей пластического течения приводятся к гиперболическому типу с характеристиками, совпадающими с ортогональными линиями скольжения ξ, η на плоскости r, z :

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{для } \xi, \quad \frac{dz}{dr} = -\operatorname{ctg} \varphi \quad \text{для } \eta; \quad (5)$$

с дифференциальными соотношениями для $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ и угла φ наклона касательной ξ линии скольжения к оси r

$$d\sigma - d\varphi = \frac{1}{2} \frac{dr + dz}{r} \quad \text{вдоль } \xi, \quad (6)$$

$$d\sigma + d\varphi = \frac{1}{2} \frac{dr - dz}{r} \quad \text{вдоль } \eta \quad (7)$$

и для проекций V_ξ , V_η вектора скорости на ξ и η линии скольжения

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = -\frac{1}{2} \frac{V_\xi dr - V_\eta dz}{r} \quad \text{вдоль } \xi, \quad (8)$$

$$dV_\eta + V_\xi d\varphi = -\frac{1}{2} \frac{V_\xi dz + V_\eta dr}{r} \quad \text{вдоль } \eta. \quad (9)$$

При $V_r > 0$ и соотношениях (4) диссипативная функция пластического течения положительна при выполнении неравенств $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_3 < 0$ для главных скоростей деформаций на плоскости r , z , которые при вычислениях линий скольжения и скоростей по уравнениям (5)–(9) приводятся к одному неравенству [18]

$$\Gamma + \frac{V_r}{r} > 0, \quad \Gamma = \frac{\partial V_\xi}{\partial \eta} - V_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial V_\eta}{\partial \xi} + V_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad (10)$$

где Γ — максимальная скорость деформации сдвига на плоскости r , z .

Уравнения (5)–(7) образуют замкнутую систему для переменных r , z , σ , φ и интегрируются численным методом [14] при известных граничных условиях для напряжений, которые в цилиндрических координатах определяются формулами

$$\sigma_r = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_z = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_\theta = \sigma + \frac{1}{2}, \quad \tau_{rz} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi. \quad (11)$$

После вычисления линий скольжения определяются значения r , z , φ и уравнения (8), (9) образуют замкнутую систему для скоростей V_ξ , V_η , которые интегрируются численным методом [14] при известных граничных условиях на границах пластической области с проверкой неравенства (10). Проекция вектора скорости в цилиндрических координатах связаны с V_ξ и V_η уравнениями

$$V_r = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_z = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi. \quad (12)$$

Уравнения (12) определяют вектор скорости на плоскости годографа V_r , V_z в соответствующих узловых точках сетки линий скольжения на плоскости r , z .

Линии скольжения. На рис. 2 показаны линии скольжения на плоскости r , z справа от оси симметрии с началом координат в нижней точке O сферической границы пуансона. При заданном радиусе пуансона $r_0 = d/2$ и матрицы $r_1 = D/2$, которые удовлетворяют неравенству (1), происходит пластическое течение в стенку стакана толщиной $h = r_1 - r_0$ при скольжении материала вдоль границ контакта с пуансоном AG и матрицей BE . В случае контактного трения $\mu > 0$ линии скольжения пересекают границы контакта под углом $\gamma = (1/2) \arccos 2\mu$, при $\gamma < \pi/4$. В точке F на оси симметрии $r = 0$, $\tau_{rz} = 0$ из четвертой формулы (11) следуют углы наклона линий скольжения $\pm\pi/4$. Условия $\gamma < \pi/4$ на контактных границах скольжения и $\varphi = -\pi/4$ на оси симметрии для ξ линии скольжения определяют границы EF с жесткой зоной заготовки и FG с центральной жесткой зоной на пуансоне. При отсутствии трения $\mu = 0$, $\gamma = \pi/4$; граница FG стягивается к центру O , пластическое скольжение происходит по всей границе контакта с пуансоном OA .

Граница OA сферического пуансона задается радиусом ρ_0 с центром на оси симметрии. Координаты этой границы на плоскости r , z вычисляются в параметрической форме в зависимости от угла наклона касательной α к оси r :

$$r = \rho_0 \sin \alpha, \quad z = \rho_0(1 - \cos \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_A, \quad \alpha_A = \arcsin \frac{r_0}{\rho_0}. \quad (13)$$

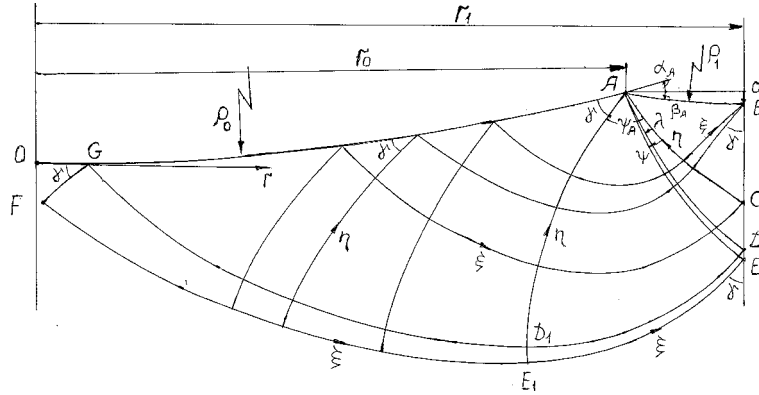


Рис. 2. Линии скольжения в пластической области

Граница OA конического пуансона определяется прямой, проходящей через центр O с заданным углом наклона α :

$$z = r \operatorname{tg} \alpha, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad \alpha \geq \frac{\pi}{4} - \gamma. \quad (14)$$

При выполнении неравенства (14) для угла α скольжение происходит по всей границе OA конического пуансона без образования центральной жесткой зоны. При низких значениях коэффициента трения μ неравенство (14) выполняется при малых углах α_A , применяемых, например, при холодном выдавливании стальных стаканов [2].

Задача является статически определяемой при известной свободной границе AB пластического течения в стенку стакана. На начальной стадии вдавливания жесткой сферы и конуса в заготовку образуется криволинейная граница вследствие наплыва материала над границей заготовки [14, 15, 16]. В настоящей модели свободная граница AB принимается дугой окружности с радиусом ρ_1 и центром на границе r_1 (рис. 2) при смещении a точки B относительно точки A по оси z . Величина a определяется условием положительности диссипативной функции (10) при вычислениях линий скольжения и поля скоростей. Радиус ρ_1 и угол β_A наклона касательной к границе AB в точке A определяются толщиной стенки h и смещением a по формулам

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \frac{h^2 + a^2}{a}, \quad \beta_A = -\arcsin \frac{2ha}{h^2 + a^2}. \quad (15)$$

Координаты границы AB на плоскости r, z вычисляются в параметрической форме в зависимости от угла наклона касательной β к оси r :

$$r = r_1 + \rho_1 \sin \beta, \quad z = z_A - a + \rho_1(1 - \cos \beta), \quad \beta_A \leq \beta \leq 0, \quad (16)$$

где координата z_A точки A вычисляется по формулам (13) или (14). Вдоль границы AB напряжения в (4) равны $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -1$; линии скольжения образуют углы $\pm\pi/4$ с нормалью, совпадающей с направлением σ_1 . Граничные условия для системы уравнений (5)–(7) на AB определяются уравнениями (16) границы AB и значениями σ и φ :

$$\sigma = -\frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \beta. \quad (17)$$

Сингулярная точка A пересечения контактной границы пуансона OA и свободной границы AB является вырожденной ξ линией скольжения с координатами, определяемыми уравнениями (13) при $\alpha = \alpha_A$, $r_A = r_0$, $z_A = \rho_0(1 - \cos \alpha_A)$ для сферического пуансона, или (14) при $r_A = r_0$, $z_A = r_0 \operatorname{tg} \alpha_A$ для конического пуансона. Эта точка является центром сходящихся η линий скольжения с углом веера

$$\psi_A = \frac{3\pi}{4} + \beta_A - \alpha_A - \gamma, \quad \gamma = \frac{1}{2} \arccos 2\mu. \quad (18)$$

Угол φ в точке A , удовлетворяющий граничному условию (17) на AB , определяется условием ортогональности ξ и η линий скольжения в пределах изменения угла веера ψ_A :

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \beta_A - \zeta, \quad 0 \leq \zeta \leq \psi_A. \quad (19)$$

Значения σ в этой точке с граничным условием $-1/2$ на AB определяются интегрированием уравнения (6), правая часть которого равна нулю:

$$\sigma = -\left(\frac{1}{2} + \zeta\right), \quad 0 \leq \zeta \leq \psi_A. \quad (20)$$

Значения σ и φ в точке A на границе контакта с пуансоном определяются из уравнений (18)–(20) при $\zeta = \psi_A$:

$$\sigma_A = -\left(\frac{1}{2} + \psi_A\right), \quad \varphi_A = \alpha_A + \gamma - \frac{\pi}{2}. \quad (21)$$

При $\mu > 0$ точка B является второй сингулярной точкой с вырожденной η линией скольжения, в которой образуется веер ξ линий скольжения с углом

$$\psi_B = \frac{\pi}{4} - \gamma \quad (22)$$

и угол φ изменяется от $\pi/4$ на границе AB до $\pi/2 - \gamma$ на границе матрицы по уравнению

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \zeta, \quad 0 \leq \zeta \leq \psi_B. \quad (23)$$

Значения σ в точке B с граничным условием $-1/2$ на AB определяются интегрированием уравнения (7), правая часть которого равна нулю:

$$\sigma = -\left(\frac{1}{2} + \zeta\right), \quad 0 \leq \zeta \leq \psi_B. \quad (24)$$

В точке B на границе матрицы значения σ и φ равны

$$\sigma_B = -\left(\frac{1}{2} + \psi_B\right), \quad \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \gamma. \quad (25)$$

Линии скольжения вычисляются программой на Фортране по следующему алгоритму. По уравнениям (15), (16) вычисляется граница AB и по граничным условиям (17) решается задача Коши в области, ограниченной линиями скольжения η и ξ , проходящими через точки A и B , с использованием численных процедур расчета r , z , σ , φ в регулярных узлах сетки линий скольжения [14]. Вычисляется веер ξ линий скольжения по значениям σ , φ в сингулярной точке B и известным значениям r , z , σ , φ на ξ

линии скольжения, проходящей через точку B на границе AB . Затем решается задача смешанного типа на границе BC по данным на ξ линии скольжения, проходящей через точку B на границе контакта с матрицей, и граничным условиям на BC

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad r = r_1. \quad (26)$$

Значения z и σ на границе BC вычисляются из конечно-разностных аппроксимаций уравнений (5), (7) для η линий скольжения и граничных условий (26):

$$z = z_\eta + \operatorname{ctg} \tilde{\varphi} \Delta r, \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_\eta + \varphi), \quad \Delta r = r_\eta - r_1, \quad (27)$$

$$\sigma = \sigma_\eta + \varphi_\eta - \varphi + \frac{1}{2} \frac{\Delta z - \Delta r}{\tilde{r}}, \quad \Delta z = z_\eta - z, \quad \tilde{r} = \frac{1}{2}(r_\eta + r_1), \quad (28)$$

где переменные с нижним индексом η известны в узловой точке пересечения ξ и η линий скольжения, ближайших к границе BC .

В области ACD решается задача Гурса по известным значениям r, z, σ, φ на η линии скольжения AC и значениям φ и σ в сингулярной точке A с углом веера $\lambda < \psi_A$, и задача смешанного типа по данным на ξ линии скольжения, проходящей через точку C , и граничным условиям (26) на CD . Затем решается задача Гурса в области ADD_1 по известным данным на η линии скольжения AC и значениям φ и σ в сингулярной точке A с углом веера $\psi_A - \lambda$.

В области AD_1G решается задача смешанного типа по известным данным на η линии скольжения AD_1 и граничным условиям на границе AG , которые в случае сферического пуансона определяются уравнениями границы (13) и переменным углом φ :

$$\varphi = \alpha + \gamma - \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \alpha < \alpha_A, \quad (29)$$

и в случае конического пуансона — уравнением (14) и постоянным углом φ :

$$\varphi = \alpha_A + \gamma - \frac{\pi}{2}. \quad (30)$$

При решении задачи смешанного типа используются конечно-разностные аппроксимации уравнений (5), (6) для ξ линии скольжения, проходящей через ближайший к границе AG узел на η линии скольжения и уравнения (13), (29) или (14), (30) в зависимости от формы контактной границы AG .

В случае сферической границы AG конечно-разностные уравнения для ξ линии скольжения и уравнения (13), (29) приводятся к трансцендентному уравнению для угла наклона касательной α в точке пересечения ξ линии скольжения с границей AG :

$$\cos \alpha + \left(\sin \alpha - \frac{r_\xi}{\tilde{\rho}} \right) \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_\xi + \frac{z_\xi}{\tilde{\rho}} - 1 = 0, \quad \tilde{\varphi}_\xi = \frac{1}{2} \left(\alpha + \gamma + \varphi_\xi - \frac{\pi}{2} \right), \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho_0}{r_0}, \quad (31)$$

где $r_\xi, z_\xi, \varphi_\xi$ — известные значения r, z, φ в узловой точке пересечения ξ и η линий скольжения около границы AG . Уравнение (31) решается итерационным методом Ньютона с точностью 10^{-3} с использованием в качестве начального приближения предыдущее значение угла α на границе AG , начиная с α_A в точке A . Затем по уравнениям (13) и (29) вычисляются координаты r, z и φ на границе AG , зависящие от угла α . Значение σ в этой точке находится из конечно-разностного уравнения для соотношения (6) вдоль ξ линии скольжения:

$$\sigma = \sigma_\xi + \varphi - \varphi_\xi + \frac{1}{2} \frac{\Delta r + \Delta z}{\tilde{r}}, \quad \Delta r = r_\xi - r, \quad \Delta z = z_\xi - z, \quad \tilde{r} = \frac{r + r_\xi}{2}, \quad (32)$$

где r_ξ , z_ξ , σ_ξ — известные значения r , z , σ в узловой точке пересечения ξ и η линий скольжения около границы AG .

В случае конической границы AG с углом наклона α_A координаты точки пересечения границы AG с ξ линией скольжения, проходящей через узловую точку на η линии скольжения около границы AG , определяются формулами

$$r = \frac{z_\xi - r_\xi \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_\xi}{\operatorname{tg} \alpha_A - \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_\xi}, \quad z = r \operatorname{tg} \alpha_A, \quad \tilde{\varphi}_\xi = \frac{\alpha_A + \gamma + \varphi_\xi}{2} - \frac{\pi}{4}. \quad (33)$$

Значения φ и σ в этой точке вычисляются по уравнениям (30), (32).

Приведенная выше последовательность вычислений линий скольжения в области $ACDD_1G$ от линии скольжения AC , зависящей от граничных условий (15)–(17) на свободной границе AB , определяет точку G на границе AG и линию скольжения DD_1G в зависимости от угла веера линий скольжения λ , который является неизвестным параметром задачи.

В случае гладкой сферической границы пуансона при $\mu = 0$, $\gamma = \pi/4$, и в случае конической границы с углом α , удовлетворяющим неравенству (14), центральная жесткая зона на пуансоне не образуется. Точка G совпадает с центром O и параметр λ удовлетворяет неявному уравнению для радиуса точки G , определяемому алгоритмом вычисления линий скольжения:

$$r_G(\lambda) = 0. \quad (34)$$

Параметр λ определяется варьированием значений в исходных данных программы при выводе на экран монитора сетки линий скольжения и радиуса r_G , удовлетворяющего уравнению (34) с точностью $r_G/r_0 \leq 0,02$.

При $\mu > 0$, $\gamma < \pi/4$ на сферической границе пуансона образуется центральная жесткая зона, ограниченная линией скольжения FG с точкой F на оси симметрии, которая зависит от углов веера λ и ψ в точке A :

$$r_F(\lambda, \psi) = 0, \quad \varphi_F(\lambda, \psi) = -\frac{\pi}{4}, \quad \lambda < \psi < \psi_A. \quad (35)$$

Линия скольжения FG определяется последовательностью решения краевых задач:

- 1) задачи Гурса по данным на η линии скольжения AD и на вырожденной ξ линии скольжения в точке A с углом веера $\psi - \lambda$;
- 2) задачи смешанного типа с условиями (26) на границе DE ;
- 3) задачи Гурса по данным на η линии скольжения, проходящей через точку E , и на ξ линии скольжения DG , зависящей от угла λ .

В этом случае в исходных данных программы задается начальное приближение угла λ , определяющее линию скольжения DG . Затем вычисляются угол ψ и линии скольжения в области $DEFG$ по условию $|\varphi_F + \pi/4| \leq 0,02$ и изменяется значение λ для выполнения первого равенства (35) с точностью $r_F/r_0 \leq 0,02$.

При условии положительности диссипативной функции (10), проверяемой при вычислениях поля скоростей, вычисляются контактные давления на границах скольжения AG и BE пуансона и матрицы:

$$p = \frac{1}{2} \sin 2\gamma - \sigma, \quad \gamma = \frac{1}{2} \arccos 2\mu, \quad (36)$$

и численным интегрированием нормальных и касательных напряжений на жестко-пластических границах FE или GD (при $\mu = 0$) определяются давление q и сила Q ,

действующая на пуансон:

$$q = \frac{8I}{d^2}, \quad Q = 2\pi I, \quad I = - \int_F^E r(\sigma dr + 0,5 dz) \text{ или } I = - \int_G^D r(\sigma dr + 0,5 dz). \quad (37)$$

Поле скоростей. После вычисления линий скольжения (рис. 2) определяются граничные условия для скоростей на жесткопластических границах EF и FG и на границах контакта AG и BE с инструментом, которые позволяют вычислить скорости V_ξ , V_η численным интегрированием уравнений (7), (8). Затем по формулам (12) вычисляются скорости V_r , V_z на плоскости годографа скоростей, соответствующие узловым точкам сетки линий скольжения на плоскости r , z . Скорость вдавливания пуансона при вычислениях поля скоростей принимается за единицу.

На жесткопластических границах EF и FG , пересекающих ось симметрии, скорости непрерывны [14, 19, 20]. Центральная жесткая область перемещается со скоростью пуансона $V_r = 0$, $V_z = -1$. Жесткая область ниже границы EF неподвижна. Из уравнений (12) находим

$$V_\xi = -\sin \varphi, \quad V_\eta = -\cos \varphi \quad \text{на } FG, \quad (38)$$

$$V_\xi = 0, \quad V_\eta = 0 \quad \text{на } EF. \quad (39)$$

В случае гладкой сферической границы пуансона точки F и G совпадают с центром O с граничным условием (39) на жесткопластической границе EF . Точка O при $\mu = 0$ и точка F при $\mu > 0$ являются сингулярными точками поля скоростей, так как в этих точках граничные условия меняются скачком при переходе от скорости пуансона к неподвижной жесткой области заготовки. Сингулярные поля скоростей в зависимости от полярного угла с центром в этих точках при $\varphi \rightarrow -\pi/4$ приведены в [18, 19, 20].

На границах контакта пластической области с пуансоном и матрицей непрерывность скорости по нормали к границам приводит к граничным условиям

$$V_\xi = V_\eta \operatorname{tg} \gamma + \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \quad \text{на } AG, \quad (40)$$

$$V_\xi = V_\eta \operatorname{tg} \gamma \quad \text{на } BE. \quad (41)$$

Сетка линий скольжения, вычисляемая по граничным условиям для напряжений на свободной границе AB и на контактных границах AG и BE , при угловом шаге $\Delta\varphi$ порядка 10^{-2} в сингулярных точках A и B содержит несколько тысяч узловых точек. Поэтому представление поля напряжений в пластической области в виде таблиц числовых значений r , z , σ , φ и напряжений (11) в цилиндрических координатах ни в статьях научных журналов, ни в монографиях для специалистов практически невозможно. Однако эта информация, представляющая интерес для инженеров-механиков и технологов, может быть получена в виде электронных файлов, выводимых оператором ФОРТРАН'а в процессе вычислений линий скольжения.

В алгоритме расчета линий скольжения используется возобновление данных на текущих линиях скольжения в процессе решения приведенных выше краевых задач для дифференциальных уравнений (5)–(7), необходимых для последующего расчета поля скоростей по уравнениям (8), (9). Поэтому при вычислении скоростей выполняется обратный расчет линий скольжения с использованием известных значений r , z , σ , φ на жесткопластических границах FG и EF при $\mu > 0$ или на границе OE при $\mu = 0$. В точках сферической границы AG или AO также сохраняются значения r , z , σ , φ , полученные с использованием угла α при приближенном решении уравнения (31).

В этом случае сохраняется полная идентичность линий скольжения, полученных по граничным условиям для напряжений, с линиями скольжения при обратном вычислении от жесткопластических границ с расчетами скоростей по уравнениям (8), (9) с граничными условиями для скоростей (38)–(39). При вычислениях скоростей V_ξ , V_η в регулярных точках линий скольжения процедура расчета переменных r , z , σ , φ дополняется решением линейных конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальные уравнения (8), (9) при известных значениях r , z , φ [14].

Для сферического пуансона при $\mu > 0$ вычисление поля скоростей начинается решением задачи Гурса по известным значениям r , z , σ , φ и граничным условиям (38), (39) для скоростей V_ξ , V_η , с последующим решением задачи смешанного типа по данным на η линии скольжения, проходящей через точку E , и граничным условиям (26) и (41) на BE . Значения r , z , σ , φ , V_ξ , V_η в точках пересечения ξ линий скольжения с границей BE определяются из конечно-разностных аппроксимаций дифференциальных уравнений (5), (6), (8) и граничных условий (26), (41) по формулам

$$r = r_1, \quad z = z_\xi + \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \Delta r, \quad \tilde{\varphi} = \frac{\varphi_\xi + \varphi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad \Delta r = r_1 - r_\xi, \quad (42)$$

$$\sigma = \sigma_\xi + \varphi - \varphi_\xi + \frac{1}{2} \frac{\Delta z + \Delta r}{\tilde{r}}, \quad \Delta z = z - z_\xi, \quad \tilde{r} = \frac{r_\xi + r_1}{2}, \quad (43)$$

$$V_\xi = V_{\xi\xi} \frac{1 + c_1 - c_2}{1 - c_1 + c_2}, \quad V_\eta = V_\xi \operatorname{ctg} \varphi, \quad c_1 = \frac{\varphi - \varphi_\xi}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta r - \Delta z}{\tilde{r}}, \quad (44)$$

где нижним индексом ξ обозначены известные значения переменных в точке η линии скольжения, ближайшей к границе BE .

Дальнейшие вычисления линий скольжения и поля скоростей выполняются по известным данным на ξ линии скольжения GD (сферический пуансон, $\mu > 0$) или на ξ линии скольжения OD (сферический пуансон, $\mu = 0$; конический пуансон, $\mu \geq 0$) с граничными условиями (39), где точка F совпадает с O , и с граничными условиями (40), (41) на AG и BE . Расчеты выполняются от границы AG к границе BE с возобновлением данных на ξ линиях скольжения от GD или OD к сингулярной точке A на выходе из пластической области.

При решении смешанной задачи в точках на границе AG используются данные α , r , z , σ , φ , сохранившиеся при вычислениях линий скольжения от свободной границы AB , а скорости V_ξ , V_η на границе AG определяются из конечно-разностного уравнения, аппроксимирующего дифференциальное уравнение (9), и граничного условия (40) по формулам

$$V_\xi = \frac{c_1}{c_2}, \quad V_\eta = V_\xi \operatorname{tg} \gamma + c_3, \quad (45)$$

$$c_1 = V_{\eta\eta} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta r}{\tilde{r}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\varphi - \varphi_\eta + \Delta z / \tilde{r}}{V_{\xi\eta} + c_3}, \quad c_2 = 1 + \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \gamma \left(\varphi - \varphi_\eta + \frac{\Delta z}{\tilde{r}} \right) + \frac{\Delta r}{\tilde{r}} \right),$$

$$c_3 = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}, \quad \Delta r = r - r_\eta, \quad \Delta z = z - z_\eta, \quad \tilde{r} = r_\eta + r,$$

где нижним индексом η обозначены известные значения переменных в точке ξ линии скольжения, ближайшей к границе AG .

Полученные значения r , z , σ , φ , V_ξ , V_η в точке на границе AG и известные данные в точках текущей ξ линии скольжения, начиная от GD или OD , используются при циклическом вычислении регулярных узлов с возобновлением ξ линии скольжения до границы BE , на которой вычисляются значения r , z , σ , φ , V_ξ , V_η по формулам

(42)–(44). Процесс вычислений ξ линий скольжения по уравнениям (45) и (42)–(44) на границах AG и BE продолжается до линии скольжения, проходящей через точку B границы BE . Затем выполняются вычисления по уравнениям (45) на границе AG с возобновлением числа $m = \text{int}(\psi_B/\Delta\varphi)$ ξ линий скольжения, проходящих через сингулярную точку B до свободной границы AB . Последующие вычисления ξ линий скольжения продолжаются от границы AG до свободной границы AB с определением скоростей в N заданных точках этой границы до сингулярной точки A .

При вычислениях линий скольжения и скоростей выполняется численная проверка неравенства (10) диссипативной функции. При нарушении этого неравенства в исходных данных программы увеличивается смещение a точки B свободной границы AB относительно точки A в уравнениях (15), (16). Кривизна свободной границы увеличивается и области с отрицательными значениями диссипативной функции, порождаемые этой границей, уменьшаются. При выполнении неравенства (10) при смещении a вычисленные линии скольжения и скорости пластического течения принимаются за решение задачи пластического течения, удовлетворяющего полной системе дифференциальных уравнений (5)–(9) и приведенным статическим и кинематическим граничным условиям. При малой толщине стенки стакана h область, ограниченная границей AB , уменьшается при малых значениях скорости окружной деформации V_r/r , приближаясь к плоскому течению с прямолинейной границей AB при $a \rightarrow 0$.

Численные результаты. В приводимых расчетах величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу пуансона r_0 ; величины, имеющие размерность напряжения, отнесены к напряжению текучести σ_Y материала заготовки. Методика оценки σ_Y с учетом влияния скорости деформации и накопленной пластической деформации приведена в [14, 17].

Пластическое течение при выдавливании стакана при заданной форме контактной границы пуансона определяется двумя параметрами — относительным изменением начальной площади сечения заготовки e и коэффициентом контактного трения μ . Радиус матрицы r_1 и толщина стенки стакана h при $r_0 = 1$ определяются параметром e из формул (1):

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{e}} - 1.$$

Ниже приведены расчеты для сферической формы пуансона с радиусом сферы $r_0 = 4$ и углом наклона касательной $\alpha_A = 0,2527$ в точке A , и для конической формы с углом наклона образующей $\alpha = 0,2618$ к оси r . В табл. 1 приведены расчетные значения параметров пластического течения при выдавливании стакана сферическим (1) и коническим (2) пуансонами для $e = 0,7$ и $\mu = 0,15$.

Таблица 1. Выдавливание стакана. $e = 0,7$, $\mu = 0,15$

Форма пуансона	r_1	h	a	q	λ	ψ	ψ_A	ψ_B
1	1,195	0,195	0,018	3,073	0,230	0,265	1,287	0,152
2	1,195	0,195	0,018	3,037	0,270	—	1,277	0,152

Линии скольжения с распределениями давления на границах контакта с инструментом и годографы скоростей при выдавливании стакана с параметрами, приведенными в табл. 1, показаны на рис. 3 для сферического и на рис. 4 для конического пуансона.

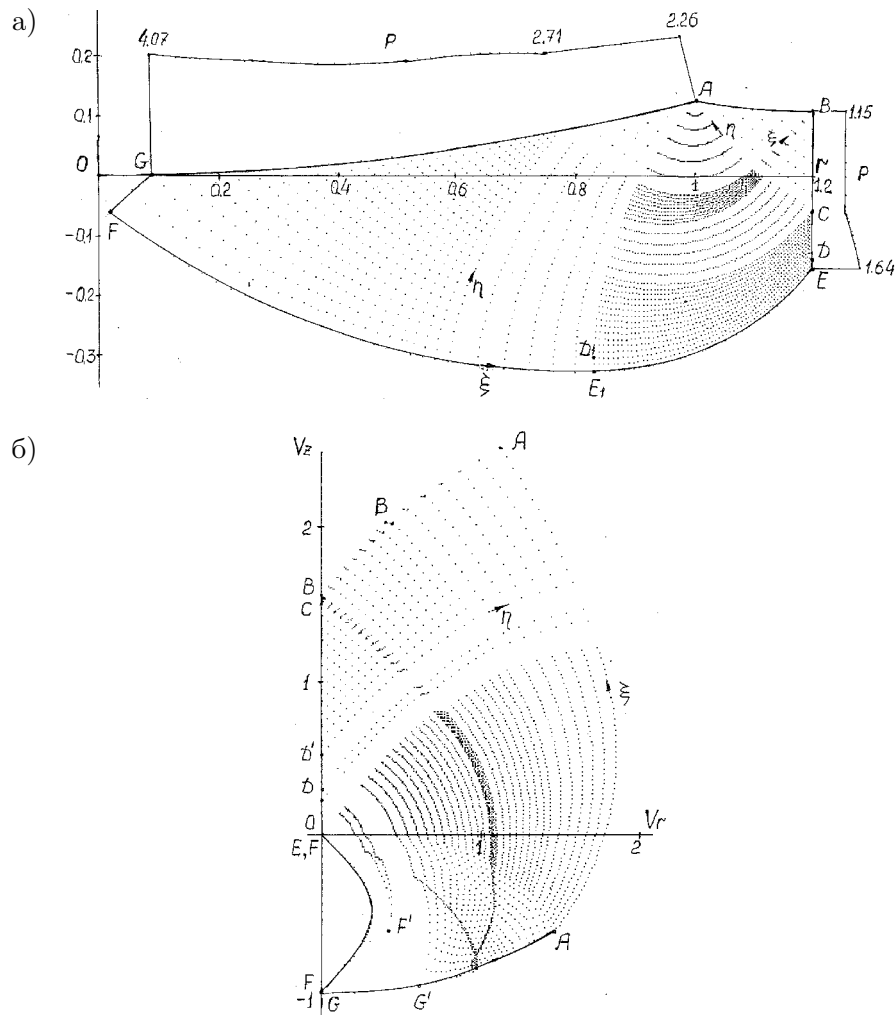


Рис. 3. Линии скольжения и контактные давления (а), годограф скоростей (б) при выдавливании сферическим пуансоном. $\rho_0 = 4$, $e = 0,7$, $\mu = 0,15$

При $e = 0,7$ и толщине стенки стакана $h = 0,195$ пластическое течение при положительной диссипативной функции получено при смещении $a = 0,018$ и малой кривизне свободной границы AB . Координаты линий скольжения на плоскости r, z и на плоскости годографа скоростей V_r, V_z выводятся пикселями на экран монитора графической программой ФОРТРАН'а.

Контактное трение при вдавливании сферического пуансона приводит к образованию малой центральной жесткой области на плоскости r, z на рис. 3а. Сетка линий скольжения с числом узлов $N = 7$ на свободной границе AB с углами веера $\psi_A = 1,287$ и $\psi_B = 0,152$ в сингулярных точках A и B вычислена с угловым шагом $\Delta\varphi = 0,0173$. Угловые параметры $\lambda = 0,230$ и $\psi = 0,265$ удовлетворяют уравнениям (35) с точностью $0,021$. Линии скольжения с малой кривизной, определяемые решением задачи Коши от свободной границы AB , отображаются на контактных границах с сингулярными точками A и B треугольными зонами с малой кривизной границ, которые

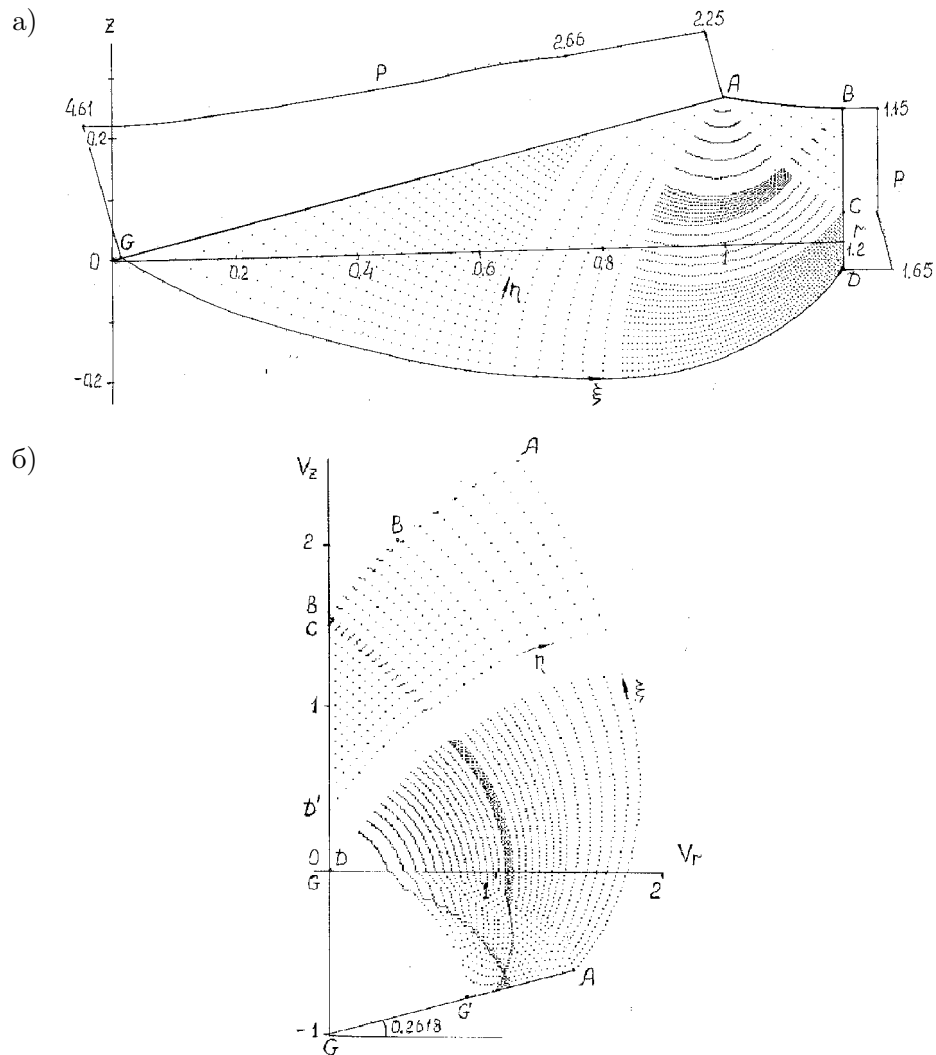


Рис. 4. Линии скольжения и контактные давления (а), годограф скоростей (б) при выдавливании коническим пуансоном. $\alpha = 0,2618$, $e = 0,7$, $\mu = 0,15$

распространяются от контактных границ широкими полосами в сетке линий скольжения.

На рис. 3б показано отображение сетки линий скольжения на плоскость годографа скоростей. Разрывное изменение граничных условий (38), (39) в точке F приводит к скачкообразному изменению скоростей на линиях скольжения, ближайших к жесткопластическим границам FG и FE , которое распространяется до границы матрицы и затем вдоль η линий скольжения, проходящих через точки E и D централизованного поля линий скольжения с сингулярной точкой A . Отображения линий скольжения в окрестности точки F приближаются к сингулярному полю скоростей при $r \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow -\pi/4$ [20], которое показано на рис. 3б сплошной линией. Широкие полосы линий скольжения с малой кривизной, распространяющиеся от свободной границы AB и от

контактных границ с инструментом на рис. 3а, отображаются на годографе узкими криволинейными полосами с малым изменением скоростей по ширине полосы.

Линии скольжения и годограф скоростей при вдавливании коническим пуансоном, показанные на рис. 4, вычислены для параметра $\lambda = 0,270$, при котором уравнение (34) выполняется с точностью 0,0143 и диссипативная функция пластического течения положительна. В этом случае имеется одна жесткопластическая граница DG и скачкообразное изменение скоростей в окрестности этой границы вследствие разрывного изменения граничных условий (39) и (40) в точке G , которое распространяется до границы матрицы и вдоль η линии скольжения, проходящей через точку D и сингулярную точку A . Распределения контактного давления на инструмент, линии скольжения (рис. 4а) и годограф скоростей (рис. 4б) близки к выдавливанию сферическим пуансоном на рис. 3 вследствие близости значений углов α и α_A .

Распределение давления p и касательного напряжения τ_c на контактной границе AG можно использовать для расчета напряжений и прочности пуансона при циклических нагрузках. Распределение давления и касательного напряжения на границе матрицы BE с пластическим скольжением и контактные напряжения на границах матрицы и выталкивателя с жесткой зоной заготовки ниже жесткопластической границы FE можно использовать для расчета циклической прочности матрицы и выталкивателя (рис. 1). В этой зоне пластические деформации малы и возможно использование метода конечных элементов для упругопластической модели заготовки [17] при известных нормальных $-\sigma$ и касательных $\tau = 1/2$ напряжениях на границе FE . В табл. 2 приведены данные для нечетных узлов жесткопластической границы FE из 93 узлов, показанных на рис. 3а с нумерацией от F к E . Числовые значения $r, z, \sigma, \varphi, V_\xi, V_\eta$ в узловых точках ξ линий скольжения от жесткопластической границы FE до сингулярной точки A могут быть выведены в виде таблиц в программе вычисления поля скоростей.

В табл. 3 и 4 приведены расчетные значения среднего давления q для сферического и конического пуансонов в зависимости от параметров e и μ . Увеличение параметра e приводит к уменьшению толщины стенки стакана и увеличению давления на пуансон. Увеличение коэффициента трения μ приводит к дополнительному увеличению давления. Давление на конический пуансон с углом наклона образующей $\alpha = 0,2618$ незначительно снижается по сравнению с давлением на сферический пуансон с радиусом сферы $\rho_0 = 4$ и углом наклона касательной $\alpha_A = 0,2527$ в точке A при малой кривизне контактной границы. Размерное значение силы, действующей на пуансон, определяется формулой $Q = \pi d^2 \sigma_Y q / 4$.

Заключение. Приведено численное решение задачи осесимметричного пластического течения при выдавливании тонкостенного цилиндрического стакана сферическим и коническим пуансонами. Рассматривается модель идеально пластического тела при условии полной пластичности на ребре призмы Треска с учетом контактного трения по Прандтлю.

Свободная граница пластической области при течении материала в стенку стакана при переходе к стационарной стадии процесса принимается криволинейной с малой кривизной, стремящейся к нулю при уменьшении толщины стенки стакана, при которой диссипативная функция пластического течения в пластической области положительна.

Условие равновесия при переходе к поступательному движению стенки стакана на стационарной стадии выполняется точно, а кинематическое условие выполняется в

Таблица 2. Жесткопластическая граница FE , рис. 3а

r	$-z$	$-\sigma$	φ	r	$-z$	$-\sigma$	φ
0,022	0,063	3,835	-0,688	0,939	0,320	2,042	0,227
0,075	0,105	3,639	-0,623	0,955	0,316	2,000	0,259
0,126	0,139	3,496	-0,563	0,969	0,312	1,958	0,291
0,175	0,168	3,376	-0,509	0,984	0,307	1,917	0,322
0,222	0,193	3,269	-0,459	0,998	0,302	1,876	0,354
0,268	0,214	3,171	-0,412	1,012	0,297	1,835	0,385
0,313	0,233	3,081	-0,367	1,025	0,291	1,795	0,416
0,347	0,245	3,032	-0,351	1,038	0,285	1,754	0,447
0,374	0,255	3,013	-0,355	1,051	0,279	1,714	0,478
0,404	0,266	2,988	-0,354	1,063	0,272	1,674	0,509
0,441	0,280	2,933	-0,328	1,075	0,265	1,635	0,540
0,483	0,293	2,852	-0,277	1,087	0,258	1,595	0,571
0,524	0,303	2,774	-0,230	1,098	0,251	1,556	0,601
0,563	0,312	2,699	-0,184	1,109	0,243	1,517	0,632
0,635	0,322	2,586	-0,122	1,119	0,235	1,478	0,663
0,722	0,330	2,468	-0,062	1,129	0,227	1,440	0,694
0,800	0,333	2,361	-0,004	1,138	0,219	1,401	0,724
0,840	0,332	2,299	0,033	1,148	0,211	1,363	0,755
0,858	0,332	2,255	0,066	1,157	0,202	1,325	0,785
0,875	0,330	2,212	0,099	1,165	0,193	1,287	0,816
0,891	0,328	2,169	0,131	1,173	0,184	1,249	0,846
0,908	0,326	2,126	0,163	1,181	0,175	1,211	0,877
0,924	0,323	2,084	0,195	1,188	0,166	1,174	0,907
				1,195	0,157	1,137	0,938

Таблица 3. Давление q на сферический пуансон, $\rho_0 = 4$

e	h	μ				
		0,0	0,05	0,10	0,15	0,20
0,70	0,19	2,645	2,797	2,942	3,073	3,193
0,75	0,15	2,705	2,870	3,024	3,163	3,293
0,80	0,12	2,810	2,984	3,148	3,301	3,440
0,85	0,08	2,971	3,160	3,335	3,498	3,653
0,90	0,05	3,266	3,480	3,681	3,869	4,047

интегральной форме вследствие пластической несжимаемости материала. При малой толщине стенки стакана пластическое течение в окрестности свободной границы приближается к плоскому течению, и кинематическое условие перехода к поступательному движению стенки стакана приближается к точному.

Таблица 4. Давление q на конический пуансон, $\alpha = 0,2618$

e	h	μ				
		0,0	0,05	0,10	0,15	0,20
0,70	0,19	2,593	2,753	2,899	3,073	3,164
0,75	0,15	2,661	2,832	2,992	3,141	3,277
0,80	0,12	2,766	2,948	3,119	3,274	3,426
0,85	0,08	2,937	3,133	3,323	3,479	3,641
0,90	0,05	3,226	3,447	3,656	3,858	4,042

Численное решение задачи с контролем условия положительности диссипативной функции пластического течения автоматизировано на ФОРТРАН'е. Приведены примеры расчета линий скольжения и годографа скоростей пластического течения с распределениями давления на контактных границах с инструментом и на жесткопластической границе с заготовкой, которые могут быть использованы для расчетов прочности инструмента при циклических нагрузках.

Приведены зависимости среднего давления на сферический и конический пуансоны от средней деформации заготовки, толщины стенки стакана и контактного трения. Полная информация о напряженном состоянии и скоростях пластического течения вдоль линий скольжения может быть выведена файлом с таблицами числовых значений ФОРТРАН-программой.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Машиностроение. Энциклопедия. Т. 3–2. Технология заготовительных производств. Москва: Машиностроение, 1996. 734 с.
- [2] Холодная объемная штамповка. Справочник / под ред. Г. А. Навроцкого. Москва: Машиностроение, 1973. 496 с.
- [3] Гофман О., Закс Г. Введение в теорию пластичности для инженеров. Москва: Машгиз, 1957. 280 с.
- [4] Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш. Механика пластических деформаций при обработке металлов. Москва: Машиностроение, 1968. 504 с.
- [5] Сторожев М. В., Попов Е. А. Теория обработки металлов давлением. Москва: Машиностроение, 1977. 423 с.
- [6] Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. Москва: Машиностроение, 1979. 567 с.
- [7] Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов. Москва: Металлургия, 1972. 408 с.
- [8] Степанский Л. Г. Расчеты процессов обработки металлов давлением. Москва: Машиностроение, 1979. 215 с.
- [9] Avitzur V. Handbook of Metal Forming Processes. New York: Wiley, 1983.
- [10] Osakada K., Nakano J., Mori K. Finite Element Method for Rigid-Plastic Analysis of Metal Forming — Formulation for Finite Deformation // Int. J. Mech. Sci. 1982. no. 24. p. 459.
- [11] Oh S. I. Finite Element Analysis of Metal Forming Problems with Arbitrary Shaped Dies // Int. J. Mech. Sci. 1982. no. 24. p. 479.
- [12] Mori K., Osakada K., Fukuda M. Simulation of Severe Plastic Deformation by Finite Element Method with Spatially Fixed Elements // Int. J. Mech. Sci. 1983. no. 25. p. 775.
- [13] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 704 с.
- [14] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU “STANKIN”, 2016. 310 p.

- [15] Непершин Р. И. О внедрении гладкого сферического штампа в идеально пластическое полупространство // Доклады РАН. 2003. Т. 389, № 5. С. 616–620.
- [16] Непершин Р. И. Внедрение сферического штампа в идеально пластическое полупространство при наличии контактного трения // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 3. С. 490–503.
- [17] Друянов В. А., Nepershin R. I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1994. 407 p.
- [18] Непершин Р. И. Сдавливание жесткопластической сферы плоскими штампами // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 1(35). С. 26–38.
- [19] Shield R. T. On the plastic flow of metals under condition of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. London. 1955. Vol. A 233, no. 1193. P. 267–287.
- [20] Eason G., Shield R. T. The plastic indentation of a semi-infinite solid by perfectly rough circular punch // Z. Angew. Math. Phys. 1960. Vol. 11, no. 1. P. 33–43.

R. I. Nepershin

ON THE PLASTIC EXTRUSION OF A THIN-WALLED CAN

Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia

Abstract. Ideal plastic flow analysis of a thin-walled cylindrical can extrusion by the rigid punch is given for Tresca full plasticity yield criterion. The slip lines, contact pressure and velocity hodographs of plastic flow are calculated for the sphere and cone punches, with Prandtl's contact friction consideration and positive plastic dissipation function control. Contact pressures and the punch mean pressure relations versus the punch contact boundary, friction and the can wall thickness are calculated.

Keywords: thin-walled can, extrusion, spherical punch, cone punch, ideal plasticity, Tresca full plasticity, contact friction, slip lines, contact stresses, velocity hodographs, dissipative function.

REFERENCES

- [1] Mechanical Engineering Encyclopedia. Vol. III-2. Blank production technology. Moscow: Mashinostroenie, 1996. 734 p. (in Russian).
- [2] Cold Forging Handbook / Ed. by G. A. Navrotsky. Moscow: Mashinostroenie, 1973. 496 p. (in Russian).
- [3] Hoffman O., Sachs G. Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [4] Thomsen E. G., Yang C. T., Kobayashi S. Mechanics of Plastic Deformation in Metal Processing. New York: Macmillan, 1965. 486 p.
- [5] Storojev M. V., Popov E. A. Theory of Metals Forming. Moscow: Mashinostroenie, 1977. 423 p. (in Russian).
- [6] Johnson W., Mellor P. B. Engineering Plasticity. London: Van Nostrand Reinhold, 1973.
- [7] Tomlenov A. D. The Theory of Plastic Deformation of Metals. Moscow: Metallurgy, 1972. 408 p. (in Russian).
- [8] Stepansky L. G. Analyses of the Metal Forming Processes. Moscow: Mashinostroenie, 1979. 215 p. (in Russian).
- [9] Avitzur B. Handbook of Metal Forming Processes. New York: Wiley, 1983.
- [10] Osakada K., Nakano J., Mori K. Finite Element Method for Rigid-Plastic Analysis of Metal Forming — Formulation for Finite Deformation // Int. J. Mech. Sci. 1982. no. 24. p. 459.

Nepershin Rostislav Ivanovich, Doctor of Eng. Sci., Professor, Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia.

-
- [11] Oh S. I. Finite Element Analysis of Metal Forming Problems with Arbitrary Shaped Dies // *Int. J. Mech. Sci.* 1982. no. 24. p. 479.
- [12] Mori K., Osakada K., Fukuda M. Simulation of Severe Plastic Deformation by Finite Element Method with Spatially Fixed Elements // *Int. J. Mech. Sci.* 1983. no. 25. p. 775.
- [13] Ishlinsky A. Y., Ivlev D. D. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian).
- [14] Nepershin R. I. *Applied Problems of Plasticity*. Moscow: MSTU "STANKIN", 2016. 310 p.
- [15] Nepershin R. I. On indentation of the ideal plastic half-space by the smooth spherical punch // *Doklady Akademii Nauk*. 2003. Vol. 389, no. 5. P. 616–620. (in Russian).
- [16] Nepershin R. I. Indentation of the ideal plastic half-space by the spherical punch with the contact friction account // *Appl. Math. And Mech.* 2006. Vol. 70. Iss. 3. P. 490–503. (in Russian).
- [17] Druyanov B. A., Nepershin R. I. *Problems of Technological Plasticity*. Amsterdam: Elsevier, 1994. 407 p.
- [18] Nepershin R. I. Compression of the rigid-plastic sphere by the flat dies // *Vestnik CGPU. Limit State Mechanics*. 2018. no. 1(35). P. 26–38. (in Russian).
- [19] Shield R. T. On the plastic flow of metals under condition of axial symmetry // *Proc. Roy. Soc. London*. 1955. Vol. A 233, no. 1193. P. 267–287.
- [20] Eason G., Shield R. T. The plastic indentation of a semi-infinite solid by perfectly rough circular punch // *Z. Angew. Math. Phys.* 1960. Vol. 11, no. 1. P. 33–43.