Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 4 (42). С. 21–24

А. Н. Спорыхин

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. На основе модели упрочняющегося упруговязкопластического тела исследовано напряженно-деформированное состояние сферической полости под действием нагрузок, постоянной внешней, и зависящей от времени внутренней. Получены точные аналитические решения для полей напряжений и перемещений в упругой области и пластической области, когда вязкость возрастает пропорционально времени процесса деформирования.

Ключевые слова: сферическая полость, пластичность, вязкость, упрочнение, динамическая нагрузка.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.002

УДК: 539.374

Известно [1], что подземные полости сферической формы являются ответственной конструкцией, используемой для хранения нефти, газа и т.д. Поэтому расчет их поведения при воздействии динамических нагрузок имеет большое значение при их проектировании и прогнозировании чрезвычайных ситуаций. Имеющиеся в литературе решения [2] аналогичной задачи получены в рядах.

В настоящей работе в квазистатической постановке рассматривается деформирование сферической полости радиуса a в невесомом полупространстве. По контуру полости равномерно распределена нагрузка P, например, давление газа на породный контур при взрыве, а на бесконечности действует нагрузка q, выражения для которых имеют вид

$$P = P_0 e^{\hat{a}t}, \quad q = q_0 = gh, \quad t_* \le t < t_0,$$

где g — средний объемный вес вышележащих пород; h — глубина заложения полости, $\hat{a}$ — известная константа. Напряженно-деформированное состояние массива в осесимметричном случае ($\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$) определяется уравнением равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \tag{1}$$

Спорыхин Анатолий Николаевич
e-mail: visloguzova99@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 10.09.2019

законом Гука и соотношениями Коши для упругой области. Решая эту систему уравнений, находим

$$u = \frac{c_1}{r^2}, \quad \sigma_r^e = -4\mu\frac{c_1}{r^3} + c_2, \quad \sigma_\theta^e = 2\mu\frac{c_1}{r^3} + c_2. \tag{2}$$

Из условия отсутствия объемного расширения в пластической зоне получаем

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} = 0,$$

откуда

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon_r}{2}, \quad u = \frac{B_1}{r^2}.$$

Из ассоциированного закона пластического течения [3]

$$e_{ij}^p = \psi(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta e_{ij}^p) \tag{3}$$

имеем

$$e_r^p = \psi(S_r - c\varepsilon_r^p - \eta e_r^p), \quad e_\theta^p = \psi(S_\theta - c\varepsilon_\theta^p - \eta e_\theta^p), \quad e_\varphi^p = \psi(S_\varphi - c\varepsilon_\varphi^p - \eta e_\varphi^p). \tag{4}$$

Так как $\varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\varphi^p$, то из этих равенств следует, что $S_\theta = S_\varphi$, $S_\theta = -S_r/2$. Функция нагружения [3]

$$(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta e_{ij}^p)(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta e_{ij}^p) = K^2 \tag{5}$$

принимает вид

$$(S_r - c\varepsilon_r^p - \eta e_r^p)^2 = \tilde{K}^2, \quad \tilde{K}^2 = \frac{2}{3}K^2. \tag{6}$$

Далее согласно [4] полагаем, что вязкость горных пород возрастает пропорционально времени процесса деформирования, т.е.

$$\eta = \eta_0 t. \tag{7}$$

Значение модуля η_0 для различных горных пород приведены в [4]. Учитывая (7), а также

$$\varepsilon_r^e = \varepsilon_r - \varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad S_r = 2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p),$$

из соотношения (6) выводим

$$\frac{d\varepsilon_r^p}{dt} + \frac{\alpha_0}{t}\varepsilon_r^p = -\left(\tilde{K} + \frac{4\mu B_1}{r^3}\right)\frac{1}{\eta_0 t}, \quad \alpha_0 = \frac{2\mu + c}{\eta_0}. \tag{8}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varepsilon_r^p = -\frac{1}{2\mu + c}\left[\left(\tilde{K} + \frac{4\mu B_1}{r^3}\right) + B_2 t^{-\alpha_0}\right]. \tag{9}$$

Из условия $\varepsilon_r^p = 0$ при $t = t_*$ определяем постоянную интегрирования B_2:

$$B_2 = \frac{1}{2\mu + c}\left(\tilde{K} + \frac{4\mu B_1}{r^3}\right)t_*^{\alpha_0}. \tag{10}$$

Вычисляя

$$\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta = \frac{3\mu}{2\mu + c}\left(\tilde{K} - \frac{2cB_1}{r^3} + B_2 t^{-\alpha_0}\right),$$

из уравнения (1) находим

$$\sigma_r^p = -2\mu_0\left[3\tilde{K}\ln r(1 + t_*^{\alpha_0}t^{-\alpha_0}) + \frac{2B_1}{r^3}(c - 2\mu t_*^{\alpha_0}t^{-\alpha_0})\right] + B_3,$$

$$\sigma_\theta^p = 3\mu_0 \left[\tilde{K} - \frac{2cB_1}{r^3} + \left(\tilde{K} + \frac{4\mu B_1}{r^3}\right) t_*^{\alpha_0} t^{-\alpha_0}\right] + \sigma_r^p, \quad \mu_0 = \frac{\mu}{\alpha_0\eta_0}.$$

Для определения констант интегрирования C_1, C_2, B_1, B_3 и радиуса поверхности раздела областей упругого и пластического деформирования γ имеем граничное условие $\sigma_r^p = -P_0 e^{\hat{a}t}$ при $r = a$, условие на "бесконечности" $\sigma_r^e = \sigma_\theta^e = q = -gh$ при $r \to \infty$ и условия сопряжения при $r = \gamma$: $\sigma_r^e = \sigma_r^p$, $u^e = u^p$. В предположении, что в момент начала пластического течения $t = t_*$ зарождение пластической области начинается от внутренней границы сферической полости, начальные условия задаются в форме $\gamma = a$ при $t = t_*$. Откуда находим

$$C_1 = B_1 = \frac{3\mu_0\tilde{K}(1+T)\ln(\gamma/a) + P_0 e^{\hat{a}t} - q}{2\mu_0[2\mu a^3(1+T) + \gamma^3(c - 2\mu T)]} a^3\gamma^3, \quad C_2 = q = -gh,$$

$$B_3 = -P_0 e^{\hat{a}t} + 2\mu_0 \left[3\tilde{K}(1+T)\ln a + \frac{2B_1}{a^3}(c - 2\mu T)\right], \quad T = t_*^{\alpha_0} t^{-\alpha_0}$$

и уравнение для определения радиуса упругопластической границы γ в массиве горных пород

$$\frac{3\mu_0\tilde{K}(1+T)\ln(\gamma/a) + P_0 e^{\hat{a}t} - q}{2[2\mu_0 a^3(1+T) + \gamma^3(c - 2\mu T)]}[2\mu a^3(1+T) - 2\gamma^3(c - 2\mu T)] +$$
$$+ 3\mu_0\tilde{K}(1+T)\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{\gamma}{a}\right) + P_0 e^{\hat{a}t} - q = 0. \quad (11)$$

Из уравнения (11) следует, что пластическое состояние возникает на поверхности выработки $\gamma = a$ при $t = t_*$ $(P = P_0 e^{\hat{a}t} = P_*)$ при $q = P_* + \tilde{K}$, что совпадает с результатами работы [1], полученными при решении аналогичной задачи при статическом деформировании.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики и горных пород. Москва: Физматлит, 2004. 232 с.

[2] Кривоченко А. В., Спорыхин А. Н. Динамическое деформирование упруговязкопластического полого шара // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 5. С. 169–175.

[3] Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Воронежский государственный университет, 1997. 360 с.

[4] Михайлюк А. В. Горные породы при неравномерных динамических нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. 153 с.

A. N. Sporykhin

DYNAMIC DEFORMATION OF A HALF-SPACE WITH A SPHERICAL CAVITY

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The stress-strain state of a spherical cavity under the action of loads, constant external and time-dependent internal, is investigated on the basis of the model of a hardening elastic-visco-plastic body. Exact analytical solutions are obtained for stress and displacement fields in the elastic region and the plastic region, when the viscosity increases proportionally to the time of the deformation process.

Keywords: spherical cavity, plasticity, viscosity, hardening, dynamic load.

REFERENCE

[1] Sporykhin A. N., Shashkin A. I. Stability of equilibrium of spatial bodies and problems of mechanics and rocks. Moscow: Fizmatlit, 2004. 232 p. (in Russian).

[2] Krivochenko A. V., Sporykhin A. N. Dynamic deformation of elastic-viscoplastic hollow ball // PMTF. 2009. Vol. 50, no. 5. P. 169–175. (in Russian).

[3] Sporykhin A. N. The perturbation method in problems of stability of complex environments. Voronezh: Voronezh state University, 1997. 360 p. (in Russian).

[4] Mikhaylyuk A. V. Rocks under uneven dynamic loads. Kiev: Science Dumka, 1980. 153 p. (in Russian).

Sporykhin Anatoly Nikolaevich, Doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia.