

С. В. Фирсов, А. Н. Прокудин

ПОЛЗУЧЕСТЬ И ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Изучается процесс деформирования вращающегося цилиндра, изготовленного из материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами. Рассматривается цилиндр как с закрепленными, так и свободными концами. Деформации в цилиндре предполагаются малыми. Скорость вращения сначала возрастает от нуля до заданного максимального значения, затем в течение некоторого промежутка времени остается постоянной, после чего снижается вплоть до полной остановки цилиндра. Угловое ускорение в течение всего процесса пренебрежимо мало. Первоначально рост необратимых деформаций вызван ползучестью материала, но при определенной скорости вращения в цилиндре зарождается и развивается область пластического течения. После возникает разгружающая упругопластическая граница: область течения при продвижении данной граничной поверхности по объему уменьшается. Упругопластические границы являются местом, где изменяется механизм производства необратимых деформаций. Определяющая система уравнений решается с помощью метода конечных разностей. Приведены и проанализированы результаты расчетов, в том числе для релаксации напряжений после остановки цилиндра.

Ключевые слова: вращение цилиндра, полый цилиндр, малые деформации, вязкопластичность, ползучесть, плоская деформации, обобщенная плоская деформация.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.005

УДК: 539.374

Введение

Расчёт напряжений и деформаций во вращающихся дисках и валов является одной из классических задач механики деформируемого твёрдого тела. Подобные расчёты приводятся во многих учебниках и монографиях. Среди подобных работ следует

© Фирсов С. В., Прокудин А. Н., 2019

Фирсов Сергей Викторович

e-mail: firsov.s.new@yandex.ru, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Прокудин Александр Николаевич

e-mail: sunbeam_85@mail.ru, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00038. Механизм накопления необратимых деформаций сформулирован в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН № 075-00414-19-00.

Поступила 20.03.2019

отметить работу С. П. Тимошенко [1], в которой впервые было предложено рассчитывать распределения напряжений с помощью решения соответствующей краевой задачи теории упругости. Ограничиваясь чисто упругими телами, данную задачу можно считать принципиально решённой после полученного А. И. Лурье [2] общего решения этой задачи с произвольной зависимостью упругого потенциала от инвариантов тензора конечных деформаций.

Чисто необратимое деформирование вращающихся цилиндров впервые было рассмотрено А. Надаи [3] в рамках жёсткопластического анализа. Ю. Н. Работновым [4] был рассмотрен случай, где в качестве источника необратимых деформаций в цилиндре выступала ползучесть. Упругопластическое деформирование впервые рассматривалось в [5]. Однако, как было позже показано в работе [6], данное решение имело неисправимый изъян, связанный с разрывом перемещений на упругопластической границе. Полное решение задачи упругопластического деформирования вращающегося сплошного цилиндра было рассмотрено в цикле работ [6–8]. В них приведено решение для стадий упругого деформирования, начала пластического течения, распространения пластического течения на весь цилиндр, последующего упругого деформирования при уменьшении скорости вращения и появления повторного пластического течения. В дальнейшем задачи упругопластического деформирования вращающихся цилиндров и дисков рассматривались неоднократно для различных граничных условий и кинематических постановок [9–15].

Постановка задачи

Пусть слой материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами занимает область, ограниченную круговыми цилиндрическими поверхностями $r = R_1$ и $r = R_2$ ($R_2 > R_1$). Далее рассмотрим случаи, когда такой слой длинный (бесконечно длинный) либо длина его является малой. Это позволит рассматривать одномерный случай деформирования. Примем, что область $r < R_1$ является полостью. Полагаем, что выбранный таким способом цилиндр с полостью вращается с угловой скоростью $\omega(t)$. При этом $\omega(0) = 0$ и первоначально цилиндр вращается ускоренно до достижения некоторой наибольшей скорости ω_{max} , после чего замедленно до полной остановки. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) одномерность процесса деформирования за счёт вращения цилиндра означает, что единственной независимой переменной оказывается r . Далее эту координату будем использовать в безразмерной форме

$$\xi = \frac{r}{R_2}, \quad \xi_0 = \frac{R_1}{R_2}, \quad 0 < \xi_0 \leq \xi \leq 1.$$

Деформации во вращающемся теле считаем малыми и складываемыми из обратимых и необратимых. Ненулевыми в рассматриваемом случае будут только компоненты d_{rr} , $d_{\varphi\varphi}$ и d_{zz} тензора полных деформаций

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u}{\xi}, \quad d_{zz} = e_{zz} + p_{zz}. \quad (1)$$

Здесь $e_{rr}, e_{\varphi\varphi}, e_{zz}$ — компоненты тензора обратимых (упругих) деформаций; $p_{rr}, p_{\varphi\varphi}, p_{zz}$ — необратимые деформации; $u = u_r/R_2$ — безразмерное перемещение.

Обратимые деформации задают напряжения $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{rr} &= \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_\tau} = (\alpha + 2\beta)(u_{,\xi} - p_{rr}) + \alpha(\xi^{-1}u - p_{\varphi\varphi}) + \alpha(d_{zz} - p_{zz}), \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma_\tau} = \alpha(u_{,\xi} - p_{rr}) + (\alpha + 2\beta)(\xi^{-1}u - p_{\varphi\varphi}) + \alpha(d_{zz} - p_{zz}), \\ \tilde{\sigma}_{zz} &= \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_\tau} = \alpha(u_{,\xi} - p_{rr}) + \alpha(\xi^{-1}u - p_{\varphi\varphi}) + (\alpha + 2\beta)(d_{zz} - p_{zz}).\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь σ_τ — предел текучести; $\alpha = \lambda\sigma_\tau^{-1}$, $\beta = \mu\sigma_\tau^{-1}$; λ, μ — параметры Ламе в законе Гука для упругой среды.

Рассматривая цилиндр бесконечно длинным, в (2) принимают $d_{zz} = 0$, что и задаёт плоские деформированные состояния. Иногда рассматривают случай так называемых обобщённых плоских состояний, когда d_{zz} находят согласно принимаемому ограничению на распределение σ_{zz}

$$2\pi \int_{\xi_0}^1 \xi \tilde{\sigma}_{zz} d\xi = 0. \quad (3)$$

Подстановка $\tilde{\sigma}_{zz}$ из (2) в (3) приводит к следующей зависимости

$$d_{zz} = \frac{2}{1 - \xi_0^2} \int_{\xi_0}^1 \xi \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} (p_{rr} + p_{\varphi\varphi}) + p_{zz} \right) d\xi - \frac{2\alpha}{\alpha + 2\beta} \frac{u(1) - \xi_0 u(\xi_0)}{1 - \xi_0^2}.$$

Будем считать угловое ускорение малым настолько, что бы имелась возможность пренебречь силой инерции, определяемой вращательным ускорением. Это упрощающее предположение позволяет рассматриваемой задаче оставаться одномерной. Единственное уравнение равновесия примет в таком случае форму

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{rr}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}}{\xi} = -\xi\psi^2, \quad \psi^2 = \frac{R_0^2}{\sigma_\tau} \rho \omega^2, \quad (4)$$

где ρ — плотность среды; ω — скорость вращения среды.

После подстановки в (4) компонент напряжений из (2) получаем дифференциальное уравнение для компоненты $u_r = u(\xi, t)$ перемещений

$$\begin{aligned}u_{,\xi\xi} + \xi^{-1}u_{,\xi} - \xi^{-2}u &= 2\xi^{-1} \frac{\beta}{\alpha + 2\beta} (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) + \\ &+ p_{rr,\xi} + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} (p_{\varphi\varphi,\xi} + p_{zz,\xi}) - \frac{\xi\psi^2}{\alpha + 2\beta}.\end{aligned}\quad (5)$$

В данном дифференциальном уравнении (5) время t является независимым параметром, то есть в любой фиксированный (рассматриваемый) момент времени уравнение (5) является обыкновенным дифференциальным уравнением.

Механизм накопления необратимых деформаций

В данной работе рассматриваются два механизма накопления необратимых деформаций — пластичность и ползучесть. В нашем случае формулы для определения ненулевых компонент тензора необратимых деформаций примут вид

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = \varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{rr}^v, \quad \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^v, \quad \frac{dp_{zz}}{dt} = \varepsilon_{zz}^p + \varepsilon_{zz}^v, \quad (6)$$

где $\varepsilon_{rr}^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p, \varepsilon_{zz}^p$ — скорости деформаций пластичности, $\varepsilon_{rr}^v, \varepsilon_{\varphi\varphi}^v, \varepsilon_{zz}^v$ — скорости деформаций ползучести. Если в рассматриваемой области напряжения не достигли предела текучести, то скорости деформаций пластичности равны нулю.

Для расчёта скоростей деформации ползучести использовалась теория типа течения [4]. Рассмотрим её наиболее простую и часто используемую вариацию — степенной закон Нортона. В качестве меры напряжений $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ возьмём интенсивность напряжений. В итоге получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^v &= \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{rr}}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^v = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}, \quad \varepsilon_{zz}^v = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{zz}}, \quad \Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \\ \Sigma^2 &= \frac{3}{2} \left((\sigma_{rr} - \sigma)^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma)^2 + (\sigma_{zz} - \sigma)^2 \right), \quad \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}), \end{aligned} \quad (7)$$

где B и n — параметры ползучести для среды.

Используя соотношения (7), а так же введя безразмерную переменную по времени $\tilde{t} = t/t^*$, где t^* — продолжительность всего процесса деформирования; получим в итоге соотношения для определения скорости деформаций ползучести

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{rr}^v &= \varepsilon_{rr}^v t^* = \frac{3}{2} \tilde{B} n \tilde{\Sigma}^{n-2} (\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}), \quad \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^v = \frac{3}{2} \tilde{B} n \tilde{\Sigma}^{n-2} (\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} - \tilde{\sigma}), \\ \tilde{\varepsilon}_{zz}^v &= \frac{3}{2} \tilde{B} n \tilde{\Sigma}^{n-2} (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}), \quad \tilde{B} = \sigma_\tau^{n-1} B t^*, \quad \tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma}{\sigma_\tau}. \end{aligned} \quad (8)$$

Скорости деформаций пластического течения, так же как и скорости деформаций ползучести, определяются уровнем и распределением по деформируемому телу напряжений. В качестве пластического потенциала принимаем обобщённый потенциал Мизеса в форме

$$\begin{aligned} f(\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \varepsilon_{rr}^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p, \varepsilon_{zz}^p) &= \\ &= (\sigma_{rr} - \sigma - \eta \varepsilon_{rr}^p)^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma - \eta \varepsilon_{\varphi\varphi}^p)^2 + (\sigma_{zz} - \sigma - \eta \varepsilon_{zz}^p)^2 - \frac{2}{3} \sigma_\tau^2. \end{aligned} \quad (9)$$

где η — коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению.

Пластическое течение происходит в условиях $f = 0$. Ассоциированный закон пластического течения запишем в виде

$$\varepsilon_{rr}^p = \theta \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rr}}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \theta \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}, \quad \varepsilon_{zz}^p = \theta \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}}, \quad \theta > 0. \quad (10)$$

После подстановки (9) в (10) получим выражение для скоростей. Для нахождения неизвестного коэффициента θ подставим полученные скорости в (9). Подставив найденное значение коэффициента в формулы скорости пластического течения, в итоге получим

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{rr}^p &= \varepsilon_{rr}^p t^* = \frac{1}{\tilde{\eta}} \frac{\tilde{\Sigma} - 1}{\tilde{\Sigma}} (\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}), \quad \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^p = \frac{1}{\tilde{\eta}} \frac{\tilde{\Sigma} - 1}{\tilde{\Sigma}} (\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} - \tilde{\sigma}), \\ \tilde{\varepsilon}_{zz}^p &= \frac{1}{\tilde{\eta}} \frac{\tilde{\Sigma} - 1}{\tilde{\Sigma}} (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}), \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sigma_\tau t^*}. \end{aligned} \quad (11)$$

Следует отметить, что при использовании модели вязкопластичности, интенсивности напряжений могут принимать значения больше предела текучести $\tilde{\Sigma} > 1$. При этом мы по прежнему будем находиться на поверхности нагружения (9). Из-за ненулевых значений скоростей пластической деформации (11) при $\tilde{\Sigma} > 1$ так же будет происходить смещение поверхности нагружения (9). Которая, при уменьшении скоростей до нуля, вернётся в положение $\tilde{\Sigma} = 1$.

Численный расчёт

Данная система уравнений в частных производных разрешалась методом конечных разностей. Полученная на таком пути конечно-разностная схема расчётов тестировалась решениями частных задач данного класса, где имеются аналитические решения. К последним относятся задачи об упругом деформировании [16], установившемся вязкопластическом течении [17] и об установившейся ползучести [18].

Функцию $\psi(t)$ из (4), обозначающую скорость вращения, зададим в виде

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi_{max} \left(1 - \cos\left(\pi \frac{\tilde{t}}{\tilde{t}_1}\right)\right), & 0 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_1, \\ \psi_{max}, & \tilde{t}_1 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_2, \\ \frac{1}{2}\psi_{max} \left(1 + \cos\left(\pi \frac{\tilde{t}-\tilde{t}_2}{\tilde{t}_3-\tilde{t}_2}\right)\right), & \tilde{t}_2 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_3, \\ 0, & \tilde{t}_3 \leq \tilde{t} \leq 1, \end{cases}$$

где $\tilde{t} = t/t^*$ — безразмерное время, $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3$ — назначаемые безразмерные моменты времени. Для удобства дальнейшего обращения дадим названия приведённым временным интервалам. 1 фаза: $0 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_1$ — нагрузка; 2 фаза: $\tilde{t}_1 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_2$ — выдержка; 3 фаза: $\tilde{t}_2 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_3$ — разгрузка; 4 фаза: $\tilde{t}_3 \leq \tilde{t} \leq 1$ — релаксация.

Таким образом, параметрами задачи наряду с теми, что задают конструктивную геометрию ξ_0 и свойства материала $\alpha, \beta, \tilde{\eta}, \sigma_\tau, \tilde{B}, n$, оказываются и безразмерные, отнесённые к t^* , моменты времени $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3$. При этом ψ_{max} играет роль интенсивности задаваемого воздействия на материал, а t^* — временное распределение такого воздействия. Остановимся на влиянии последних на эволюцию напряжённо-деформированных состояний и итоговое распределение остаточных напряжений.

При проведении расчётов постоянные материала и геометрические размеры зададим следующие:

$$R_1 = 0,02 \text{ м}; \quad R_2 = 0,1 \text{ м}; \quad \rho = 7700 \text{ кг/м}^3; \quad \lambda = 240,942 \text{ ГПа}; \quad \mu = 76,087 \text{ ГПа}; \\ B = 4,1 \cdot 10^{-22} \text{ с}^{-1} \cdot \text{Па}^{1-n}; \quad n = 3; \quad \sigma_\tau = 30 \text{ МПа}; \quad \eta = 84 \text{ ГПа}.$$

Такие параметры отвечают некоторым конструктивным маркам стали. Безразмерные параметры в этом случае примут значения

$$\xi_0 = 0,2; \quad \alpha = 8031,4; \quad \beta = 2536,2; \quad \tilde{B} = 3,69 \cdot 10^{-7} t^*; \quad \tilde{\eta} = 2800/t^*.$$

Временные назначаемые параметры принимаем следующими

$$\tilde{t}_1 = 0,015; \quad \tilde{t}_2 = 0,965; \quad \tilde{t}_3 = 0,98.$$

Протяжённость процесса менялась от одной секунды до одного часа с промежуточными значениями $t^* = 10$ секунд, $t^* = 1$ минута и $t^* = 10$ минут.

Граничные условия запишем в следующем виде

$$\tilde{\sigma}_{rr}(\xi_0, \tilde{t}) = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rr}(1, \tilde{t}) = 0.$$

Расчёты показывают, что пластическое течение в деформируемой части материала цилиндра неизменно начинается с граничной поверхности $\xi = \xi_0$. Скорость вращения, при которой впервые выполняется условие пластического течения, вычисляется из соотношения $\tilde{\Sigma} = 1$, следующего из (6)–(11). Значения такой скорости оказываются меньше тех значений, которые получаются в том случае, когда ползучесть материала не учитывается. Что, впрочем, предсказуемо, так как ползучесть снижает уровень напряжённых состояний.

При выбранных параметрах материала и геометрии получаем, что для обеспечения начала пластического течения необходимо принимать: $\psi_{max} > 1,123$ в случае плоских деформируемых состояний; $\psi_{max} > 1,116$ — в случае обобщённых плоских деформируемых состояний. Далее в расчётах в качестве ψ_{max} принимались значения больше приведённых с той целью, что бы область пластического течения заведомо присутствовала, а так же что бы наблюдалось повторное пластическое течение там, где это возможно. Для этого принималось $\psi_{max} = 1,7$.

Плоская деформация

Пластичность. Для целей сравнения первоначально отметим основные качественные особенности решения задачи без учёта ползучести материала. Примем в соотношении (6) скорости деформаций ползучести равными нулю: $\varepsilon_{rr}^v = \varepsilon_{\varphi\varphi}^v = \varepsilon_{zz}^v = 0$.

Пусть $t^* = 1$ час. При указанных параметрах задачи область пластического течения развивается от внутренней границы деформируемого слоя $\xi = \xi_0$. Упругопластическая граница продвигается к внешней граничной поверхности $\xi = 1$. После достижения своего максимального положения продвижение границы останавливается. Впоследствии наблюдается снижение интенсивности напряжений за счёт накопления необратимых деформаций, и в итоге напряжения достигают значения $\tilde{\Sigma} = 1$. После этого на внешней границе пластической области зарождается разгружающая упругопластическая граница, быстро достигающая внутренней граничной поверхности слоя $\xi = \xi_0$.

При разгрузке, когда угловая скорость вращения уменьшается, происходит повторное (обратное) пластическое течение. Оно возникает на внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$ и развивается, охватывая область, примыкающую к этой граничной поверхности. Исчезновение области пластического течения связано с разгружающей упругопластической границей, возникающей в некоторый последующий момент времени в месте остановившейся первоначальной упругопластической границы и распространяющийся к границе $\xi = \xi_0$ деформируемого материала.

Отмечаемые качественные особенности решения являются результатами расчётов, когда $t^* = 1$ час. Они так же соответствуют расчётам для случая $t^* = 10$ минут. В случае $t^* = 1$ минута наблюдаются небольшие отличия при повторном пластическом течении. При $t^* = 10$ секунд область пластического течения не успевает достигнуть своего максимального размера до начала стадии разгрузки, что приводит к немного меньшим значениям накопленных необратимых деформаций и небольшому уменьшению области повторного пластического течения. При $t^* = 1$ секунда интенсивности напряжений не успевают перераспределиться до начала стадии разгрузки, что приводит к значительному уменьшению размера области пластического течения и, соответственно, значительному уменьшению накопленных необратимых деформаций (чуть более чем в два раза). В связи с этим на стадии разгрузки интенсивности напряжений не достигают критических значений и область повторного пластического течения не появляется. Итоговые распределения интенсивностей напряжений представлено рис. 1а.

При увеличении скорости вращения до $\psi_{max} = 2,0$ область пластического течения распространяется на весь деформируемый слой. При этом после достижения максимальной скорости вращения не наблюдается снижения интенсивностей напряжений. Во всём деформируемом слое они принимают значения $\tilde{\Sigma} > 1$. Вследствие этого

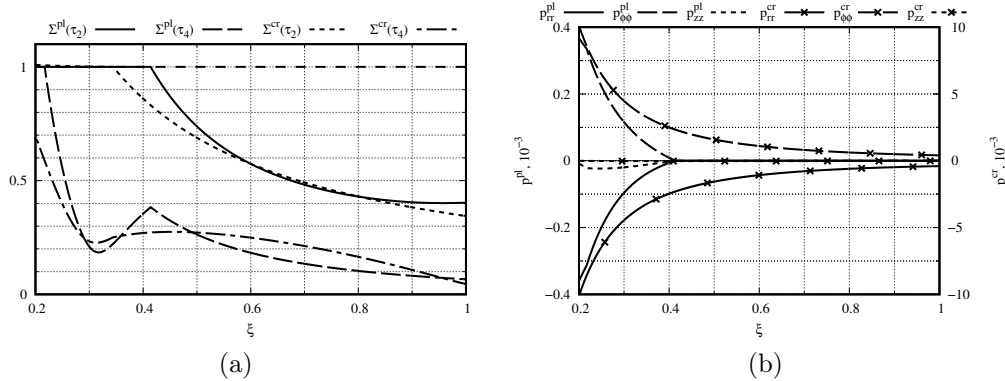


Рис. 1. Напряжённно-деформированное состояние (НДС) слоя в случае плоской деформации при $t^* = 1$ час: (а) интенсивности напряжений в моменты времени \tilde{t}_2 и \tilde{t}_4 . Σ^{pl} — без ползучести; Σ^{cr} — с учётом ползучести; (б) остаточные необратимые деформации в слое: p_{ij}^{pl} — без учёта ползучести; p_{ij}^{cr} — с учётом ползучести.

происходит интенсивное накопление необратимых деформаций на протяжении всего процесса. Однако это не оказывает сильного влияния на характер распределения остаточных напряжений в слое.

При скоростях вращения $\psi_{max} < 1,6$ область повторного пластического течения не появляется.

Ползучесть. Изучим влияние ползучести материала на его деформирование в этом случае. Примем, что скорости деформаций ползучести в формуле (6) определяются из соотношений (8).

Первоначальная область пластического течения распространяется почти на ту же область, что и в предыдущем случае. Однако после этого на месте нагружающей упругопластической границы зарождается разгружающая упругопластическая граница. В итоге после сокращения размера области пластического течения почти на треть данная граница останавливается. В отличие от предыдущего случая, интенсивности напряжений внутри оставшейся области пластического течения перестают уменьшаться. Что в свою очередь приводит к постоянному накоплению пластических деформаций внутри данной области до самого момента начала разгрузки. Тем временем происходит постепенное уменьшение интенсивностей напряжений вне области пластического течения, пока они не достигнут определённого значения. Такое поведение характерно для случаев $t^* = 1$ час и $t^* = 10$ минут. В случаях $t^* = 1$ минута и $t^* = 10$ секунд напряжения не успевают релаксировать до того же значения. При $t^* = 1$ секунда область пластического течения не успевает распространиться до своего максимального размера до начала стадии разгрузки.

На стадии разгрузки появляется область повторного пластического течения (за исключением случая $t^* = 1$ секунда). Однако чем больше значение t^* , тем меньше максимальный размер данной области. После достижения своего максимального размера, область повторного пластического течения начинает уменьшаться, пока полностью не исчезнет. После окончания пластического течения релаксация напряжений во всём

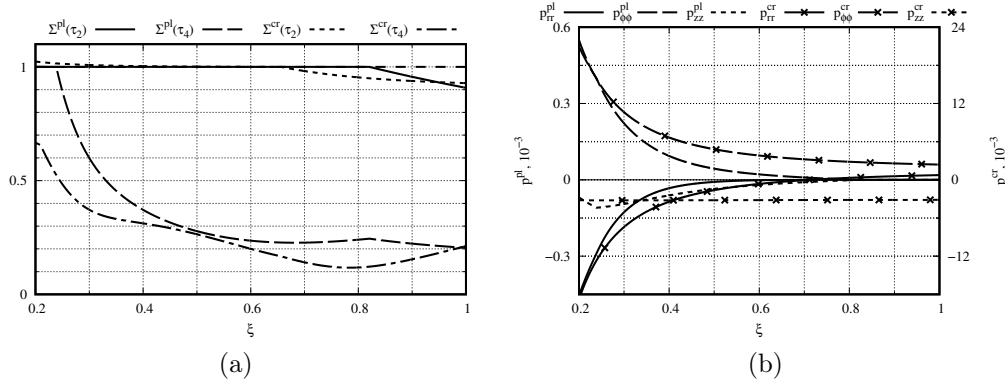


Рис. 2. НДС слоя в случае обобщённой плоской деформации при $t^* = 1$ час: (а) интенсивности напряжений в моменты времени t_2 и t_4 . Σ^{pl} — без ползучести; Σ^{cr} — с учётом ползучести; (б) остаточные необратимые деформации в слое: p^{pl} — без учёта ползучести; σ_{ij}^{cr} — с учётом ползучести.

деформируемом слое продолжается. При этом значения перемещений и необратимых деформаций остаются неизменными.

Обобщённая плоская деформация

Пластичность. Исключим влияние ползучести, полагая $\varepsilon_{rr}^v = \varepsilon_{\phi\phi}^v = \varepsilon_{zz}^v = 0$. Наблюдается картина, схожая со случаем плоской деформации. Только области пластического течения, как первичная, так и вторичная, достигают большего размера. Для случаев, когда протяженность процесса составляет $t^* = 1$ секунда и $t^* = 10$ секунд, область пластического течения не успевает достигнуть своего максимального размера до начала стадии разгрузки. Соответственно повторное пластическое течение занимает чуть меньшую область при $t^* = 10$ секунд и вовсе не появляется при $t^* = 1$ секунда. При остальных временных промежутках наблюдаются одинаковые результаты. Распределения интенсивностей напряжений представлены на рисунке 2а.

Ползучесть. Изучим влияние ползучести материала на его деформирование в данном случае. Скорости деформаций ползучести зададим в соответствии с (8). Зарождение области пластического течения так же происходит на внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$. Уругопластическая граница продвигается в направлении свободной граничной поверхности $\xi = 1$. Однако она останавливается раньше, чем в рассмотренном ранее случае. Причём, чем больше рассматриваемый промежуток времени, тем на меньшую область распространяется пластическое течение. За исключением случаев $t^* = 1$ секунда и $t^* = 10$ секунд, когда пластическая граница не успевает достигнуть своего максимального положения до начала стадии разгрузки.

Также после остановки уругопластической границы на её месте рождается разгружающая уругопластическая граница и движется в направлении внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$. После достижения определённого положения движение разгружающей границы практически прекращается. В оставшейся области пластического течения интенсивности напряжений принимают значения $\tilde{\Sigma} > 1$, что приводит

к постоянному пластическому течению. В случае $t^* = 1$ минута разгружающая граница не успевает дойти до заданного положения до начала стадии разгрузки.

На стадии разгрузки появляется повторное пластическое течение во всех случаях, кроме случая $t^* = 1$ секунда. Отметим, что чем больше продолжительность, тем меньше область повторного пластического течения. После снятия нагрузки значения необратимых деформаций и перемещений не меняются, в то время как напряжения постепенно релаксируют.

Заключение

На основе вышесказанного можно сделать вывод, что при нагрузке ползучесть приводит к небольшому перераспределению напряжений в слое (их оттоку от внешней границы слоя к внутренней границе) и непрерывному росту перемещений и необратимых деформаций. Причём в случае небольших увеличений нагрузки сверх критической (при которой начинается пластическое течение) происходит резкое увеличение скорости роста необратимых деформаций. Что касается релаксации напряжений после снятия нагрузки, она происходит, но с малой скоростью. При этом перемещения остаются, можно сказать, неизменными, когда необратимые деформации еле заметно уменьшаются.

Так же следует отметить, что перераспределение напряжений при ползучести приводит к уменьшению области как исходного пластического течения, так и повторного. Также увеличиваются напряжения на внутренней границе, что приводит в некоторых случаях к их увеличению и поддержанию выше поверхности нагружения и, соответственно, постоянному накоплению пластических деформаций рядом с внутренней границей. В то время как без учёта ползучести, при использовании модели вязкопластичности, напряжения со временем сходят с поверхности нагружения и пластическое течение прекращается (за исключением случая, когда пластическое течение распространяется на всю область).

*Авторы выражают благодарность Буренину Анатолию Александровичу за неизменное внимание к работе и высказанные замечания по её результатам.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1979. 576 с.
- [2] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
- [3] Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids, Volume One. 2nd Edition. McGraw Hill, 1950. 572 p.
- [4] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва: Наука, 1966. 752 с.
- [5] Hodge P. G., Balaban M. Elastic-plastic analysis of a rotating cylinder // International Journal of Mechanical Sciences. 1962. Vol. 4, no. 6. P. 465–476.
- [6] Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // ZAMP – Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik. 1984. Vol. 35, no. 5. P. 601–617.
- [7] Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // International Journal of Engineering Science. 1997. Vol. 35, no. 3. P. 253–267.
- [8] Linder T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation // ZAMM – Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1998. Vol. 78, no. 2. P. 75–86.
- [9] Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube // Acta Mechanica. 1983. Vol. 50, no. 1-2. P. 1–8.
- [10] Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends // Tech. Mech. 1991. no. 12. P. 119–124.
- [11] Mack W. Rotating Elastic-plastic tube with free ends // International Journal of Solids and Structures. 1991. Vol. 27, no. 11. P. 1461–1476.

- [12] Rees D. W. A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1999. Vol. 79, no. 4. P. 281–288.
- [13] Güven U. Elastic-Plastic Rotating Disk with Rigid Inclusion // Mechanics of Structures and Machines. 1999. Vol. 27, no. 1. P. 117–128.
- [14] Güven U., Parmaksizoglu C., Altay O. Elastic-Plastic Rotating Annular Disk with Rigid Casing // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1999. Vol. 79, no. 7. P. 499–503.
- [15] Aleksandrova N. Exact Deformation Analysis of a Solid Rotating Elastic-Perfectly Plastic Disk // International Journal of Mechanical Sciences. 2014. Vol. 88. P. 55–60.
- [16] Фирсов С. В. Необратимые деформации вращающегося цилиндра // Известия АлтГУ. Математика и механика. 2018. Т. 102, № 4. С. 114–117.
- [17] Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра // Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18, № 2. С. 242–260.
- [18] Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Расчёт ползучести вращающегося цилиндра со свободными концами // Вестник ЧГПУ им. И.Я.Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. Т. 35, № 1. С. 63–73.

S. V. Firsov, A. N. Prokudin

CREEP AND PLASTIC FLOW IN ROTATING HOLLOW CYLINDER

Institute of machinery and metallurgy of Far Eastern Branch of the RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. Deformation of a rotating hollow cylinder made of material with elastic, plastic and creep properties is studied. Cylinders with fixed and free ends are considered. It is assumed that strains in cylinder are small. Angular velocity firstly increases gradually from zero to specified maximum value. After that, it is maintained constant for some time interval. Finally, angular velocity decreases gradually until the cylinder stands still. It is supposed that the rotation speed varies slowly with time, so angular acceleration may be neglected. Initially, irreversible strains are caused only by the creep of the material but at a certain value of angular velocity the plastic region appears and develops in the cylinder. After that, an unloading elastoplastic boundary arises. The region of plastic flow decreases with the advancement of this boundary surface in media. Elastic-plastic boundaries are the place where the mechanism of production of irreversible deformations changes. The constitutive system of equations is solved by using the finite difference method. The results of numerical calculations including stress relaxation after stand-still of a cylinder are presented and analyzed.

Keywords: rotating cylinder, hollow cylinder, small strain, viscoplasticity, creep, plain strain, generalized plain strain.

REFERENCES

- [1] Timoshenko S. P., Gud'er D. Teoriia uprugosti. Moscow: Nauka, 1979. 576 p. (in Russian).
- [2] Lur'e A. I. Nelineinaia teoriia uprugosti. Moscow: Nauka, 1980. 512 p. (in Russian).
- [3] Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids, Volume One. 2nd Edition. McGraw Hill, 1950. 572 p.
- [4] Rabotnov I. N. Polzuchest' elementov konstruksii. Moscow: Nauka, 1966. 752 p. (in Russian).

Firsov Sergey Viktorovich, Junior Researcher, Institute of machinery and metallurgy of Far Eastern Branch of the RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Prokudin Alexander Nikolaevich, Candidate of Engineering Sciences, Leading Researcher, Institute of machinery and metallurgy of Far Eastern Branch of the RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

- [5] Hodge P. G., Balaban M. Elastic-plastic analysis of a rotating cylinder // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1962. Vol. 4, no. 6. P. 465–476.
- [6] Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // *ZAMP – Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik*. 1984. Vol. 35, no. 5. P. 601–617.
- [7] Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // *International Journal of Engineering Science*. 1997. Vol. 35, no. 3. P. 253–267.
- [8] Linder T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation // *ZAMM – Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1998. Vol. 78, no. 2. P. 75–86.
- [9] Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube // *Acta Mechanica*. 1983. Vol. 50, no. 1-2. P. 1–8.
- [10] Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends // *Tech. Mech.* 1991. no. 12. P. 119–124.
- [11] Mack W. Rotating Elastic-plastic tube with free ends // *International Journal of Solids and Structures*. 1991. Vol. 27, no. 11. P. 1461–1476.
- [12] Rees D. W. A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1999. Vol. 79, no. 4. P. 281–288.
- [13] Güven U. Elastic-Plastic Rotating Disk with Rigid Inclusion // *Mechanics of Structures and Machines*. 1999. Vol. 27, no. 1. P. 117–128.
- [14] Güven U., Parmaksizoğlu C., Altay O. Elastic-Plastic Rotating Annular Disk with Rigid Casing // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1999. Vol. 79, no. 7. P. 499–503.
- [15] Aleksandrova N. Exact Deformation Analysis of a Solid Rotating Elastic-Perfectly Plastic Disk // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014. Vol. 88. P. 55–60.
- [16] Firsov S. V. Irreversible Deformations of a Rotating Cylinder // *Izvestiya of Altai State University. Physical and Mathematical Sciences*. 2018. Vol. 102, no. 4. P. 114–117. (in Russian).
- [17] Prokudin A. N., Firsov S. V. Viscoplastic flow in a rotating hollow cylinder // *Far Eastern Mathematical Journal*. 2018. Vol. 18, no. 2. P. 242–260. (in Russian).
- [18] Prokudin A. N., Firsov S. V. Creep Analysis of Rotating Cylinder With Free Ends // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2018. Vol. 35, no. 1. P. 63–73. (in Russian).