

Ю. В. Немировский

РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ТАВРОВЫХ БАЛОК

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Аннотация. Тавровые однородные конструкции широко используются в различных отраслях машиностроения, судо-авиакосмической техники и в строительной индустрии. В связи с резким возрастанием требований к созданию экономически выгодной, надежной при длительной эксплуатации, мало затратной по ресурсам новой техники в последние годы интенсивно развиваются исследования по проблемам расчета и оптимального проектирования композитных изделий. Многочисленные, хорошо отработанные технологии склеивания, сварки взрывом, диффузионной сварки, холодного и плазменного газодинамического напыления позволяют сегодня создавать в больших масштабах нужные для практического использования гибридные слоистые конструкции из практически любых доступных конструкционных материалов. Главная и пока не решенная проблема здесь состоит в разработке принципов подбора и расстановки материалов для обеспечения наиболее эффективной работы создаваемых конструкций в требуемых условиях эксплуатации. В данной работе этот вопрос рассматривается применительно к одному из широко распространенных типов симметричных и несимметричных тавровых стержней.

Ключевые слова: рациональное проектирование, полиметаллические тавровые балки, изгибающий момент, деформация.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.007

УДК: 539.374

Симметричные двутавровые стержни. Рассмотрим полиметаллические гибридные стержни с защитными и подкрепляющими слоями типа, изображенные на рис. 1, 2.

Будем считать структуру расположения материалов в сечениях стержней симметричной относительно осей $z = 0$ и $y = 0$ и что стержни испытывают поперечный изгиб в плоскости $y = 0$, а все составляющие материалы одинаково сопротивляются при деформировании растяжению и сжатию. Тогда связь возникающих напряжений

© Немировский Ю. В., 2019
Немировский Юрий Владимирович
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №19-01-00038-а.

Поступила 01.09.2019

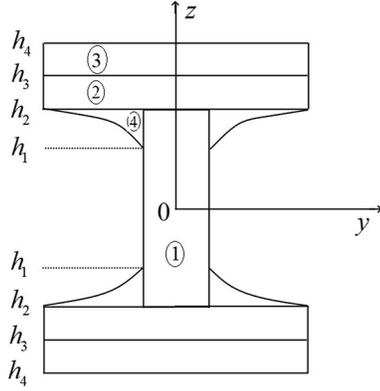


Рис. 1

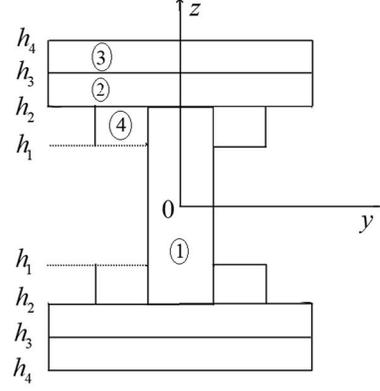


Рис. 2

в фазовых материалах с искривлением $\kappa(x)$ оси стержня будет иметь вид [9]

$$\sigma_i = A_i \kappa z + B_i \kappa^3 z^3, \quad (1)$$

$$\kappa(x) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$B_i = -\frac{4}{27} \frac{A_i^3}{(\sigma_i^*)^2}, \quad \varepsilon_i^* = \frac{3}{2} \frac{\sigma_i^*}{A_i}, \quad (3)$$

где A_i , σ_i^* — модуль упругости и предел прочности i -го фазового материала. Изгибающий момент связан с напряжениями в сечении стержня выражением

$$M = 4 \left[\Delta_1 \int_0^{h_2} \sigma_1 z dz + \Delta_2 \int_{h_2}^{h_3} \sigma_2 z dz + \Delta_2 \int_{h_3}^{h_4} \sigma_3 z dz + \int_{h_1}^{h_2} [b_4(z) - \Delta_1] \sigma_4 z dz \right],$$

где $b_4(z)$ — функция, определяющая закон изменения подкрепляющего слоя:

$$b_4^+(z) = \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)}{(h_2^\alpha - h_1^\alpha)} \left[z^\alpha + \frac{(\Delta_1 h_2^\alpha - \Delta_2 h_1^\alpha)}{\Delta_2 - \Delta_1} \right]. \quad (4)$$

При $\alpha = 1$ имеем линейный закон подкрепления, при $\alpha = 2$ — параболический и при $\alpha = -1$ — гиперболический. Для структуры на рис. 2 имеем

$$b_4^* = \Delta_3 - \Delta_1. \quad (5)$$

Здесь Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 — половина ширины сечения в соответствующем слое. Учитывая зависимости (1), (2), после интегрирования получим для M выражение

$$M = R_1 \kappa + R_2 \kappa^3, \quad (6)$$

где

$$R_1 = \frac{4}{3} [A_1 \Delta_1 h_2^3 + A_2 \Delta_2 (h_2^3 - h_1^3) + A_3 \Delta_2 (h_4^3 - h_3^3) + 3A_4 \phi_1(h_1, h_2)], \quad (7)$$

$$R_2 = \frac{4}{5} [\Delta_1 h_2^5 B_1 + \Delta_2 (h_3^5 - h_2^5) B_2 + \Delta_2 (h_4^5 - h_3^5) B_3 + 5\phi_2(h_1, h_2) B_4],$$

$$\phi_1(h_1, h_2) = \int_{h_1}^{h_2} b^+(z) z^2 dz, \quad \phi_2(h_1, h_2) = \int_{h_1}^{h_2} b^+(z) z^4 dz. \quad (8)$$

Далее рассмотрим два наиболее важных с точки зрения эксплуатации предельных состояния рассматриваемой конструкции.

Первое — предельно-упругое состояние, когда ни один из фазовых материалов не выходит за предел упругости. В этом случае следует принять всюду $B_i = 0$. Рациональной будем считать конструкцию, у которой максимальная по модулю деформация будет равна предельному упругому значению для соответствующего фазового материала:

$$\varepsilon_i^0 = \frac{\sigma_i^0}{A_i}, \quad (9)$$

где σ_i^0 — предел упругости i -го материала. Таким образом, при реализации первого предельного состояния для рассматриваемого рационального проекта должны выполняться требования

$$\kappa = \kappa_0 = \frac{\varepsilon_1^0}{h_3}, \quad h_2 = \frac{\varepsilon_4^0}{\varepsilon_1^0} h_3, \quad h_4 = \frac{\varepsilon_3^0}{\varepsilon_1^0} h_1 \quad (10)$$

и материалы должны располагаться в сечении балки по требованию

$$\varepsilon_1^0 > \varepsilon_4^0, \quad \varepsilon_3^0 > \varepsilon_1^0. \quad (11)$$

В этом случае предельный изгибающий момент M_0 будет равен

$$M_0 = R_1 \kappa_0. \quad (12)$$

Рассмотрим для сравнения в качестве эталона стандартный двутавр с шириной стенки и полки $2\Delta_1^0$, $2\Delta_2^0$, высотой стенки $2h_2^0$ из материала с пределом упругости σ_0^0 . Его предельный упругий момент будет равен

$$M_0^0 = R_0 \kappa_0^0, \quad R_0 = \frac{4}{3} A_0 [\Delta_2^0 h_2^{03} - (\Delta_2^0 - \Delta_1^0) h_1^{03}], \quad (13)$$

$$\kappa_0^0 = \frac{\varepsilon_0^0}{h_2^0} = \frac{\sigma_0^0}{A_0 h_2^0}. \quad (14)$$

При одинаковых условия нагружения и закрепления равенство

$$M_0 = M_0^0 \quad (15)$$

с учетом выражений (9)–(11) и (14) устанавливает связь между геометрическими и механическими параметрами, обеспечивающую одинаковую предельную несущую способность гибридной и эталонной балки. Тогда для оценки качественного гибридного проекта необходимо рассмотреть их относительные веса и стоимости:

$$\frac{B}{B_0} = \frac{\rho_1 [2h_1 \Delta_1 + (h_3 - h_2) \Delta_2] + \rho_3 \Delta_2 (h_4 - h_3) + \rho_4 \phi_4 (h_1, h_2)}{\rho_0 [\Delta_2^0 (h_2^0 - h_1^0) + h_1^0 \Delta_1^0]}, \quad (16)$$

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\rho_1 c_1 [2h_1 \Delta_1 + (h_3 - h_2) \Delta_2] + \rho_3 c_3 \Delta_2 (h_4 - h_3) + \rho_4 c_4 \phi_4 (h_1, h_2)}{\rho_0 c_0 [\Delta_2^0 (h_2^0 - h_1^0) + h_1^0 \Delta_1^0]}, \quad (17)$$

$$\phi_4 (h_1, h_2) = \int_{h_1}^{h_2} b_4(z) dz,$$

ρ_i , ρ_0 , c_i , c_0 — плотности и удельные стоимости соответствующих материалов.

Второе предельное состояние реализуется за пределами упругости, когда деформация в соответствующем материале будет достигать уровня предельной деформации

предразрушения ε_i^* . Будем считать рациональными проекты, для которых максимальные неупругие (при $B_i \neq 0$) деформации в каждом из материалов будут достигать соответствующих предельно допустимых значений [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]:

$$\varepsilon_i^* = \frac{3 \sigma_i^*}{2 A_i}.$$

Тогда

$$\kappa = \kappa^* = \frac{\varepsilon_1^*}{h_3}, \quad h_2 = \frac{\varepsilon_4^*}{\varepsilon_1^*} h_3, \quad h_4 = \frac{\varepsilon_3^*}{\varepsilon_1^*} h_1 \quad (18)$$

и материалы должны располагаться в сечении балки по требованию

$$\varepsilon_1^* > \varepsilon_4^*, \quad \varepsilon_3^* > \varepsilon_1^*. \quad (19)$$

Предельный момент предразрушения будет равен

$$M^* = R_1 \kappa^* + R_2 (\kappa^*)^3, \quad (20)$$

а соответствующий предельный момент предразрушения для эталонной балки будет равен

$$M_0^* = R_1^0 \kappa_0^* + R_2^0 (\kappa_0^*)^3, \quad (21)$$

$$R_1^0 = \frac{4}{3} A_0 [\Delta_2^0 h_2^{03} - (\Delta_2^0 - \Delta_1^0) h_1^{03}], \quad R_2^0 = \frac{4}{5} B_0 [\Delta_2^0 h_2^{05} - (\Delta_2^0 - \Delta_1^0) h_1^{05}], \quad (22)$$

$$\kappa_0^* = \frac{\varepsilon_0^*}{h_2^0}.$$

Равенство $M^* = M_0^*$ здесь также определит зависимость между физическими и геометрическими параметрами, при которых гибридная и эталонная конструкция будут иметь одинаковый уровень предельных нагрузок предразрушения. Варьируя остальными свободными параметрами материалов и геометрии слоев, можно получить широкий спектр проектов, которые для заданных уровней нагрузок несущей способности будут приемлемы по весовым и экономическим характеристикам.

Несимметричные двутавровые и однитавровые конструкции. В ряде случаев при нагружениях в плоскости тавровая конструкция в структуре поперечного сечения может иметь лишь одну плоскость симметрии, как показано, например, на рис. 3. Такие конструкции будем называть несимметричными двутавровыми или однитаврами (при отсутствии областей 5 и 6).

В выбранной системе координат для деформаций $\varepsilon(x, z)$ будем иметь выражение

$$\varepsilon(x, z) = e_0(x) + z \kappa(x), \quad e_0(x) = \frac{du_0(x)}{dx}, \quad \kappa = -\frac{d^2 w(x)}{dx^2}.$$

Закон деформирования в i -й зоне сечения:

$$\sigma_i(x, z) = A_i(\varepsilon_0 + z \kappa) + B_i(\varepsilon_0 + z \kappa)^3 \quad (23)$$

при $h_{i-1} \leq z \leq h_i$. Выражение (23) удобнее представить в эквивалентной форме:

$$\sigma_i = A_i \kappa (z - z_0) + B_i \kappa^3 (z - z_0)^3, \quad (24)$$

где

$$z_0(x) = -\frac{\varepsilon_0(x)}{\kappa} \quad (25)$$

— координата нейтральной линии в сечении. Это поле напряжений создает в поперечном сечении стержня продольное усилие N и изгибающий момент M :

$$N = 2\kappa[S_1(z_0) + \kappa^2 S_2(z_0)], \quad M = 2\kappa[\Phi_1(z_0) + \kappa^2 \Phi_2(z_0)], \quad (26)$$

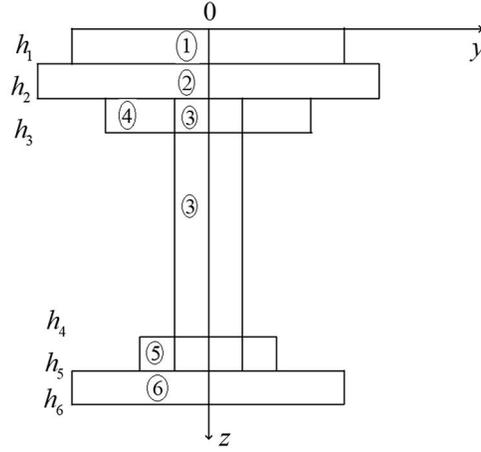


Рис. 3.

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^6 A_i \Delta_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} (z - z_0) dz, \quad S_2 = \sum_{i=1}^6 A_i \Delta_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} (z - z_0)^3 dz,$$

$$\Phi_1(z_0) = \sum_{i=1}^6 A_i \Delta_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} (z - z_0) z dz, \quad \Phi_2(z_0) = \sum_{i=1}^6 A_i \Delta_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} (z - z_0)^3 z dz$$

для изображенного на рис. 3 несимметричного двутавра. Для однитаврового сечения в этих формулах следует применять $\Delta_5 = \Delta_6 = 0$. В случае поперечного изгиба $N = 0$, $\kappa \neq 0$ двутаврового или однитаврового стержня получим связи между искривлением стержня и координатой нейтральной линии стержня z_0 :

$$S_1(z_0) + \kappa^2 S_2(z_0) = 0. \quad (27)$$

Рациональный проект несимметричного двутавра должен при $\kappa > 0$ соответствовать требованиям

$$e_0 = -\varepsilon_1^*, \quad e_0 + h_1 \kappa = -\varepsilon_2^*, \quad e_0 + h_2 \kappa = -\varepsilon_4^*, \quad e_0 + h_5 \kappa = \varepsilon_5^*, \quad e_0 + h_6 \kappa = \varepsilon_6^*. \quad (28)$$

Из этих соотношений получим

$$h_1 = \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\varepsilon_4^* + \varepsilon_6^*} h_6, \quad h_2 = \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_4^*}{\varepsilon_4^* + \varepsilon_6^*} h_6, \quad h_5 = \frac{\varepsilon_5^* + \varepsilon_1^*}{\varepsilon_6^* + \varepsilon_1^*} h_6, \quad z_0^* = \frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_6^* + \varepsilon_1^*} h_6, \quad (29)$$

$$\varepsilon_1^* > \varepsilon_2^*, \quad \varepsilon_2^* > \varepsilon_4^*, \quad \varepsilon_6^* > \varepsilon_5^*, \quad \kappa^* = \frac{\varepsilon_6^* + \varepsilon_1^*}{h_6}.$$

Соотношения (29) определяют геометрические и физические требования расстановки слоев в рассматриваемом рациональном проекте. В случае однитавровой конструкции (при $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 = 0$) в замен (28), (29) получим соотношения

$$e_0 = -\varepsilon_1^*, \quad \kappa^* = \frac{\varepsilon_1^* + \varepsilon_5^*}{h_5}, \quad z_0^* = \frac{\varepsilon_1^0}{\varepsilon_5^* + \varepsilon_1^*} h_5, \quad h_2^* = \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_4^*}{\varepsilon_5^* + \varepsilon_1^*} h_5, \quad h_1^* = \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\varepsilon_5^* + \varepsilon_1^*} h_5, \quad (30)$$

$$\varepsilon_1^* > \varepsilon_4^*, \quad \varepsilon_1^* > \varepsilon_2^*.$$

Соответствующие предельные изгибающие моменты M^* получим по формуле (29), подставляя соответствующие значения:

$$\kappa = \kappa^*, \quad z = z_0^*, \quad M^* = M(\kappa^*, z_0^*). \quad (31)$$

Решение задачи предельно допустимого состояния для несимметричных эталонных однородных двутавров или однотоавров, изображенных на рис. 4, 5, получим по выше-

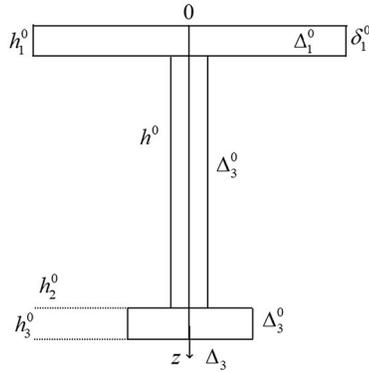


Рис. 4

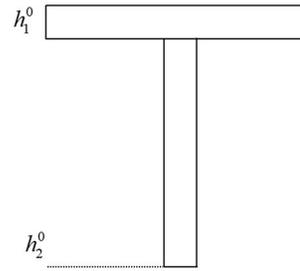


Рис. 5

написанным формулам, если для всех материалов примем характеристики диаграмм, описывающих деформированное состояние, и соответствующие геометрические параметры обозначим

$$A_i = A^0, \quad B_i = B^0, \quad \Delta_i = \Delta_i^0, \quad h_i = h_i^0, \quad b_i = b_i^0.$$

Тогда для сечений, изображенных на рис. 4, 5, будем иметь в предельном состоянии

$$e_0^* = -\varepsilon_0^*, \quad \kappa_0^* = \frac{2\varepsilon_0^*}{h_3^0}, \quad z_{00}^* = \frac{h_3^0}{2}, \quad h_3^0 = \delta_1^0 + \delta_2^0 + A_0$$

для несимметричного двутавра, и

$$e_0^* = -\varepsilon_0^*, \quad \kappa_0^* = \frac{2\varepsilon_0^*}{h_2^0}, \quad z_{00}^* = \frac{h_2^0}{2}, \quad h_2^0 = \delta_1^0 + h^0$$

для однотоавра. Тогда предельный эталонный момент M_0^* будет вычислен по формуле (29), если принять $M_0^* = M(\kappa_0^*, z_{00}^*)$. В этом случае равенство $M_* = M_0^*$ будет обеспечивать одинаковую несущую способность эталонных и гибридных рациональных конструкций, а их сравнительные относительные качества можно вычислить по формулам, подобным вышеприведенным для симметричных двутавров.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние однородных и композитных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 150–159.
- [2] Fleck J., Laber A., Leonard R. Explosive welding of composite materials // J. Compos. Mater. 1969. Vol. 3, no. 4. P. 669–701.
- [3] Король В. К., Гилленгорн М. С. Основы производства многослойных материалов. Москва: Металлургия, 1978. 277 с.
- [4] Дерibas А. А. Физика прочности и сварки взрывом. Новосибирск: Наука, 1977. 188 с.

- [5] Немировский Ю. В. Рациональное проектирование плоских преград при воздействии взрывных нагрузок // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф: тр. VII Всероссийской научной конференции. Красноярск, 2003. Т. 1. С. 191–194.
- [6] Немировский Ю. В. Равнопрочные слоистые арки и балки // Известия вузов. Строительство. 1996. № 8. С. 20–25.
- [7] Немировский Ю. В. Оптимальные и равнопрочные слоистые балки и арки в условиях ползучести // Проблемы оптимального проектирования сооружений: сб. докладов Всероссийского семинара. Новосибирск, 1997. С. 33–38.
- [8] Немировский Ю. В. Об определении времени допустимой эксплуатации конструкций в условиях ползучести // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела. Динамика сплошной среды. Новосибирск, 2001. Т. 119. С. 87–91.
- [9] Немировский Ю. В. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных материалов // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела: тр. II международной конференции. Казань, 2009. С. 261–263.

Yu. V. Nemirovskii

RATIONAL DESIGN OF HYBRID POLYMETALLIC T-BEAMS

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Abstract. Homogeneous structures are widely used in various branches of engineering, ship-and-aerospace engineering and in the construction industry. Due to the sharp increase in the requirements for creating an economically viable, reliable, long-term, low-resource new equipment, in recent years, research on the problems of calculation and optimal design of composite products has been intensively developing. Numerous, well-developed technologies of bonding, explosion welding, diffusion welding, cold and plasma gas-dynamic spraying allow today to create on a large scale hybrid layered structures necessary for practical use from practically any available structural materials. The main and not yet resolved problem here is to develop principles for the selection and placement of materials to ensure the most efficient operation of the created structures in the required operating conditions. In this paper, this question is considered in relation to one of the widespread types of symmetric and asymmetric T-bars.

Keywords: rational design, polymetallic T-beams, bending moment, deformation.

REFERENCES

- [1] Nemirovskii Y. V. Second extreme state of uniform and composite beams // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2009. no. 1. P. 150–159. (in Russian).
- [2] Fleck J., Laber A., Leonard R. Explosive welding of composite materials // J. Compos. Mater. 1969. Vol. 3, no. 4. P. 669–701.
- [3] King V. K., Gillengorn M. S. Basics of Production of Multilayer Materials. Moscow: Metallurgiya, 1978. 277 p. (in Russian).
- [4] Deribas A. A. Physics of Strength and Blast Welding. Novosibirsk: Nauka, 1977. 188 p. (in Russian).
- [5] Nemirovskii Y. V. Rational design of flat barriers under the impact of explosive loads // Sovremennye metody matematicheskogo modelirovaniya prirodnyh i antropogennyh katastrof: trudy VII Vserossijskoj nauchnoj konferencii. Krasnoyarsk, 2003. Vol. 1. P. 191–194. (in Russian).

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

-
- [6] Nemirovskii Y. V. Equal-strength layered arches and beams // *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo*. 1996. no. 8. P. 20–25. (in Russian).
 - [7] Nemirovskii Y. V. Optimal and equal-strength laminated beams and arches in creep conditions // *Problems of optimal design of structures: sb. dokladov Vserossijskogo seminar*. Novosibirsk, 1997. P. 33–38. (in Russian).
 - [8] Nemirovskii Y. V. On Determination of Time of Permissible Operation of Structures in Creep Conditions // *Sovremennye Problemy Mekhaniki Deformiruemogo Tverdogo Tela. Dinamika sploshnoj sredy*. Novosibirsk, 2001. Vol. 119. P. 87–91. (in Russian).
 - [9] Nemirovskii Y. V. Prediction of nonlinear deformation of hybrid composite materials // *Problems of nonlinear mechanics of deformable hard body: Works of the II International Conference*. Kazan, 2009. P. 261–263. (in Russian).