

Б. Г. Миронов¹, Ю. Б. Миронов²

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ИДЕАЛЬНОГО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

¹Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

²Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе исследовано кручение неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала. Получены интегралы, определяющие напряженное и деформированное состояния цилиндрического стержня при линеаризованном условии пластичности. Построено поле характеристик основных соотношений, найдены линии разрыва напряжений.

Ключевые слова: неоднородный цилиндрический стержень, идеальный жесткопластический материал, поле характеристик, линии разрыва напряжений.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.011

УДК: 539.735

Введение. Кручение представляет собой один из видов деформации тел, характеризующийся взаимным поворотом его поперечных сечений под влиянием моментов, действующих в этих сечениях. Кручение стержней довольно часто встречается в инженерной практике, особенно в машиностроении. Теория кручения изотропных и анизотропных стержней из идеального жесткопластического материала изложена в работах [1, 2, 3, 4]. Переход к случаю стержня из неоднородного материала приводит к определенным трудностям: задачу в общем случае невозможно проинтегрировать. Отдельные случаи кручения неоднородных и составных стержней рассмотрены в работах [5, 6, 7].

Основные результаты. Соотношения теории кручения неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y);\end{aligned}\tag{1}$$

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б., 2019

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mbg.chspu@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

Миронов Юрий Борисович

e-mail: mistiam@gmail.com, кандидат технических наук, декан, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 01.10.2019

— уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

— условие пластичности:

$$(\tau_{xz} - K_1)^2 + (\tau_{yz} - K_2)^2 = k_0; \quad (3)$$

— соотношения ассоциированного закона пластического течения:

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{\tau_{xz} - K_1} = \frac{\varepsilon_{yz}}{\tau_{yz} - K_2}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0, \quad (4)$$

где σ_{ij} — компоненты напряжения; ε_{ij} — компоненты скорости деформации; $K_1 = K_1(xy)$, $K_2 = K_2(xy)$, $k_0 = \text{const}$.

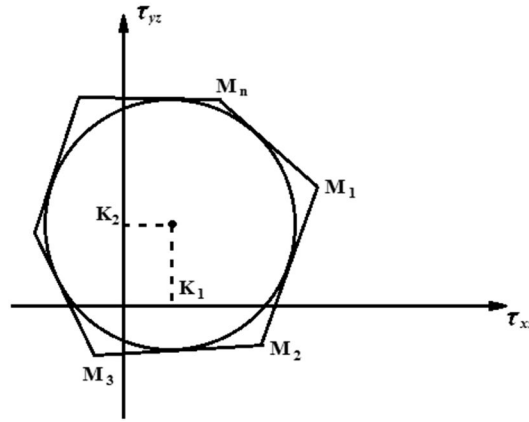


Рис. 1.

Условие пластичности (3) в плоскости τ_{xz} , τ_{yz} представляет окружность радиуса k_0 (рис. 1), центр которой находится в точке с координатами K_1 , K_2 . Предположим, что окружность условия текучести (3) заменена замкнутой ломанной $M_1M_2M_3...M_nM_1$ (рис. 1):

$$A_i(\tau_{xz} - K_1) + B_i(\tau_{yz} - K_2) = k_0, \quad (5)$$

где A_i , $B_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Условие (5) представляет на некотором отрезке линейаризованное условие пластичности (3). Рассматривая условие (5) в качестве пластического потенциала, получим вместо (4) соотношение

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{A_i} = \frac{\varepsilon_{yz}}{B_i}. \quad (6)$$

Интегрируя соотношение (6) и часть соотношений (4) и учитывая, что в начальный момент закручивания компоненты деформации e_{ij} равны 0, получим

$$\frac{e_{xz}}{A_i} = \frac{e_{yz}}{B_i}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0. \quad (7)$$

Из (7) следует

$$B_i e_{xz} - A_i e_{yz} = 0. \quad (8)$$

Предположим, что компоненты перемещения u , v , w имеют вид

$$u = \theta yz, \quad v = -\theta xz, \quad w = w(x, y), \quad (9)$$

где θ — крутка, w — деформация. Выражая компоненты деформации через компоненты перемещения, из (8), (9) получим

$$-B_i \frac{\partial w}{\partial x} + A_i \frac{\partial w}{\partial y} = \theta(A_i x + B_i y). \quad (10)$$

Из (10) следует, что прямые

$$A_i x + B_i y = C_{i1} \quad (C_{i1} = \text{const}) \quad (11)$$

являются характеристиками. Вдоль характеристик (11) имеют место соотношения

$$B_i w + \theta C_{i1} x = C_{i2} \quad \text{или} \quad A_i w - \theta C_{i1} y = C_{i3}, \quad (12)$$

где $C_{i2}, C_{i3} = \text{const}$ вдоль характеристики.

Для дальнейшего необходимы не столько выражения для деформации, сколько выражения для компонент деформации.

Дифференцируя соотношение (10) по переменной x , получим уравнение

$$-B_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + A_i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \theta A_i. \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует, что вдоль характеристик (11) справедливы соотношения

$$B_i \frac{\partial w}{\partial x} + \theta A_i x = C_{i4} \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \theta y = C_{i5}, \quad (14)$$

где $C_{i4}, C_{i5} = \text{const}$ вдоль характеристики. Аналогично дифференцируя соотношение (10) по переменной y , получим уравнение

$$-B_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + A_i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \theta B_i. \quad (15)$$

Из уравнения (15) следует, что вдоль характеристик (11) справедливы соотношения

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta x = C_{i6} \quad \text{или} \quad A_i \frac{\partial w}{\partial y} - \theta B_i y = C_{i7}, \quad (16)$$

где $C_{i6}, C_{i7} = \text{const}$ вдоль характеристики.

Используя второе соотношение (14) и первое соотношение (16) получим, что вдоль характеристик (11) справедливы соотношения

$$e_{xz} - \theta y = \frac{1}{2} C_{i5}, \quad e_{yz} + \theta x = \frac{1}{2} C_{i6}. \quad (17)$$

Следует отметить, что из соотношений (17), (11), (8) вытекает

$$A_i C_{i6} - B_i C_{i5} = 2\theta C_{i1}. \quad (18)$$

Дифференцируя уравнение (5) по переменной y , получим

$$A_i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + B_i \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = A_i \frac{\partial K_1}{\partial y} + B_i \frac{\partial K_2}{\partial y}. \quad (19)$$

С учетом (2) из уравнения (19) имеем

$$A_i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - B_i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = A_i \frac{\partial K_1}{\partial y} + B_i \frac{\partial K_2}{\partial y}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что вдоль характеристик (11) справедливы следующие соотношения для компонент напряжения:

$$A_i \tau_{xz} = A_i K_{11} + B_i K_{12}, \quad B_i \tau_{yz} = k_0 + A_i (K_1 - K_{11}) + B_i (K_2 - K_{12}), \quad (21)$$

где

$$K_{1s} = \int \frac{\partial K_s}{\partial y}(\alpha, y) dy, \quad \alpha = \frac{1}{A_i}(C_{i1} - B_i y), \quad (s = 1, 2). \quad (22)$$

Аналогично дифференцируя уравнение (5) по переменной x , с учетом (2) получим, что вдоль характеристик (11) справедливы следующие соотношения для компонент напряжения:

$$B_i \tau_{yz} = A_i K_{21} + B_i K_{22}, \quad A_i \tau_{xz} = k_0 + A_i(K_1 - K_{21}) + B_i(K_2 - K_{22}), \quad (23)$$

где

$$K_{2s} = \int \frac{\partial K_s}{\partial x}(x, \beta) dx, \quad \beta = \frac{1}{B_i}(C_{i1} - A_i x), \quad (s = 1, 2). \quad (24)$$

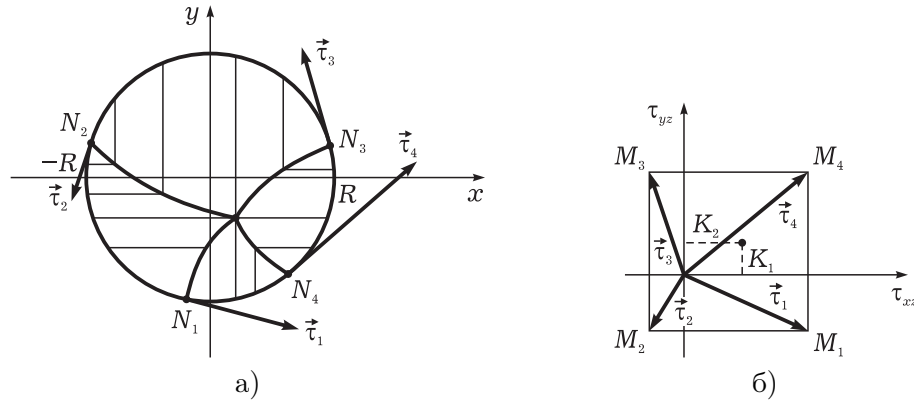


Рис. 2.

Рассмотрим кручение цилиндрического стержня с круговым сечением с центром в начале координат и радиуса R (рис. 2а). На контуре сечения вектор касательного напряжения $\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ направлен по касательной к контуру. В качестве линеаризованного условия пластичности (5) выберем контур $M_1M_2M_3M_4$ квадрата со стороной $2k_0$ (рис. 2б):

$$M_1M_2: \quad \tau_{yz} = K_2 - k_0, \quad (25)$$

$$M_2M_3: \quad \tau_{xz} = K_1 - k_0, \quad (26)$$

$$M_3M_4: \quad \tau_{yz} = K_2 + k_0, \quad (27)$$

$$M_4M_1: \quad \tau_{xz} = K_1 + k_0. \quad (28)$$

Здесь мы имеем четыре семейства характеристик

$$y = C_{11}, \quad x = C_{21}, \quad y = C_{31}, \quad x = C_{41}. \quad (29)$$

Из (18), (22), (24) и (29) следует

$$C_{15} = -2\theta C_{11}, \quad K_{12} = 0, \quad (30)$$

$$C_{26} = 2\theta C_{21}, \quad K_{21} = 0, \quad (31)$$

$$C_{35} = 2\theta C_{31}, \quad K_{12} = 0, \quad (32)$$

$$C_{46} = -2\theta C_{41}, \quad K_{21} = 0. \quad (33)$$

Тогда из (2) и (25), (26), (27), (28) соответственно вдоль характеристик (29) имеем

$$\tau_{yz} = K_2 - k_0, \quad \tau_{xz} = k_{11}(x, y), \quad (34)$$

$$\tau_{xz} = K_1 - k_0, \quad \tau_{yz} = k_{21}(x, y), \quad (35)$$

$$\tau_{yz} = K_2 + k_0, \quad \tau_{xz} = k_{12}(x, y), \quad (36)$$

$$\tau_{xz} = K_1 + k_0, \quad \tau_{yz} = k_{22}(x, y), \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 &= R^2, \\ k_{11} &= - \int \frac{\partial K_2}{\partial y}(x, y) dx, \quad k_{11}x_0 + (K_2 - k_0)y_0 = 0, \\ k_{21} &= - \int \frac{\partial K_1}{\partial x}(x, y) dy, \quad (K_1 - k_0)x_0 + k_{21}y_0 = 0, \\ k_{12} &= - \int \frac{\partial K_2}{\partial y}(x, y) dx, \quad k_{12}x_0 + (K_2 + k_0)y_0 = 0, \\ k_{22} &= - \int \frac{\partial K_1}{\partial x}(x, y) dy, \quad (K_1 + k_0)x_0 + k_{22}y_0 = 0. \end{aligned}$$

Особо следует остановиться на линиях разрыва напряжений. Линии разрыва напряжений являются следом исчезающих жестких областей. На них всегда выполняются соотношения

$$e_{xz} = e_{yz} = 0. \quad (38)$$

На контуре поперечного сечения стержня определим точки N_1, N_2, N_3, N_4 соответственно из условий

$$(K_1 + k_0)x + (K_2 - k_0)y = 0, \quad (39)$$

$$(K_1 - k_0)x + (K_2 - k_0)y = 0, \quad (40)$$

$$(K_1 - k_0)x + (K_2 + k_0)y = 0, \quad (41)$$

$$(K_1 + k_0)x + (K_2 + k_0)y = 0. \quad (42)$$

В точках N_1, N_2, N_3, N_4 вектор касательного напряжения соответственно имеет вид

$$\vec{\tau}_1 = (K_1 + k_0, K_2 - k_0) = \overrightarrow{OM}_1, \quad (43)$$

$$\vec{\tau}_2 = (K_1 - k_0, K_2 - k_0) = \overrightarrow{OM}_2, \quad (44)$$

$$\vec{\tau}_3 = (K_1 - k_0, K_2 + k_0) = \overrightarrow{OM}_3, \quad (45)$$

$$\vec{\tau}_4 = (K_1 + k_0, K_2 + k_0) = \overrightarrow{OM}_4. \quad (46)$$

Из (29) и (34), (35), (36), (37) имеем уравнения линий разрыва напряжений, выходящих соответственно из точек N_1, N_2, N_3, N_4 :

$$\frac{dx}{K_1 + k_0 - k_{11}} = \frac{dy}{k_{22} - K_2 + k_0}, \quad (47)$$

$$\frac{dx}{K_1 - k_0 - k_{11}} = \frac{dy}{k_{21} - K_2 + k_0}, \quad (48)$$

$$\frac{dx}{K_1 - k_0 - k_{12}} = \frac{dy}{k_{21} - K_2 - k_0}, \quad (49)$$

$$\frac{dx}{K_1 + k_0 - k_{12}} = \frac{dy}{k_{22} - K_2 - k_0}. \quad (50)$$

Заключение. Таким образом, в работе получены интегралы, определяющие напряженное и деформированное состояния неоднородного идеального жесткопластического стержня при кручении для линеаризованного условия пластичности, найдены

характеристики основных соотношений. Исследовано предельное состояние неоднородного идеального жесткопластического стержня с круговым сечением: построено поле характеристик основных соотношений, найдены соотношения вдоль характеристик и линии разрыва напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский В. В. Теория пластичности. Москва: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Москва: Наука, 1966. 232 с.
- [3] Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. Москва: ИЛ, 1956. 398 с.
- [4] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [5] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. Москва: Мир, 1964. 156 с.
- [6] Миронов Б. Г. К теории кручения неоднородных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 236–240.
- [7] Миронов Б. Г. О кручении цилиндрического неоднородного стержня с круговым сечением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 3(33). С. 95–100.

B. G. Mironov¹, Yu. B. Mironov²

ON THE TORSION OF INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL RODS
MADE OF AN IDEAL RIGID-PLASTIC MATERIAL

¹*Russian University of transport, Moscow, Russia*

²*Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

Abstract. The torsion of inhomogeneous rods made of an ideal rigid-plastic material is investigated. Integrals determining the stress and strain States of a cylindrical rod under a linearized plasticity condition are obtained. The field of characteristics of the basic relations is constructed, lines of a rupture of stresses are found.

Keywords: a nonuniform cylindrical rod, the perfect rigid-plastic material, the characteristics, break lines of stress.

REFERENCES

- [1] Sokolovskij V. V. Theory of plasticity. Moscow: Higher school, 1969. 608 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. Moscow: Science, 1966. 232 p. (in Russian).
- [3] Prager V., Hoge F. G. Theory of ideally plastic bodies. Moscow: IL, 1956. 398 p. (in Russian).
- [4] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [5] Olshak V., Ryhlevskiy Y., Urbanovskiy B. Theory of plasticity of inhomogeneous bodies. Moscow: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).
- [6] Mironov B. G. On the theory of torsion of inhomogeneous rods // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ja. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state. 2014. no. 4(22). P. 236–240. (in Russian).
- [7] Mironov B. G. On torsion of a cylindrical inhomogeneous rod with a circular cross section // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ja. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state. 2017. no. 3(33). P. 95–100. (in Russian).

Boris Gurjevich Mironov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of department, Russian University of transport, Moscow, Russia.

Yuri Borisovich Mironov, Candidate of technical Sciences, Dean, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.