Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 4 (42). С. 84–91

Ю. Н. Радаев

О КИНЕМАТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ ВДОЛЬ МГНОВЕННО НЕРАСТЯЖИМЫХ ЛИНИЙ В ТЕЧЕНИЯХ СЖИМАЕМЫХ СРЕД

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются течения сжимаемых сред с нулевым значением промежуточного главного приращения тензора деформации. Подобные течения характерны для неплотно связанных (сыпучих) сред Кулона—Мора и обобщенных идеально пластических тел Прандтля, находящихся в состоянии плоской деформации. Тела Прандтля имеют определяющую зависимость, связывающую максимальное касательное напряжение и среднее (точно медианное) напряжение. В случае сред Кулона—Мора указанная зависимость является линейной. Промежуточное главное нормальное напряжение не оказывает при этом никакого влияния на текучесть или переход в предельное состояние. В этих условиях удается установить гиперболичность системы дифференциальных уравнений кинематики и получить дифференциальные соотношения вдоль характеристических линий, которые состоят из элементов, не испытывающих мгновенные удлинения

Ключевые слова: среда Кулона—Мора, идеально пластическое тело Прандтля, сжимаемость, течение, главное напряжение, асимптотические директоры, сопряженные директоры, гиперболичность, характеристика

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.010

УДК: 539.374

1. Вводные замечания. В механике идеально пластических и обобщенных идеально пластических тел особую роль играют промежуточное главное нормальное напряжение и максимальное (минимальное) главное нормальное напряжение [1–6]. Занумеруем главные оси тензора напряжений так, чтобы для актуального напряженного состояния соответствующие главные нормальные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 расположились бы в порядке убывания

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \tag{1}$$

Радаев Юрий Николаевич
e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 „Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности“).

Поступила 10.10.2019

В терминах главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 критерий текучести Кулона—Мора для сыпучих сред с внутренним трением и сцеплением формулируется в следующем виде [7, 8]:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c\cos\gamma - \sin\gamma\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \tag{2}$$

где c, γ — определяющие постоянные.

Если воспользоваться значениями максимального касательного $\tau_{\max}$ и среднего (точного медианного) s напряжений

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \tag{3}$$

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \tag{4}$$

то критерий текучести Кулона—Мора приводится к форме

$$\tau_{\max} = c\cos\gamma - \sin\gamma s. \tag{5}$$

Наконец, критерий Кулона—Мора (2) можно также привести к следующему виду:

$$\sigma_1 - a\sigma_3 = 2k, \tag{6}$$

напоминающему по форме критерий текучести Треска.

Материальные постоянные a и k связаны с c и γ соотношениями

$$a = \frac{1 - \sin\gamma}{1 + \sin\gamma}, \quad k = \frac{c\cos\gamma}{1 + \sin\gamma}.$$

Если в среде отсутствует внутреннее трение ($\gamma \to 0$), то $a \to 1$, $k \to c$ и критерий текучести Кулона—Мора переходит в критерий максимального касательного напряжения Треска

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k. \tag{7}$$

Обобщенные идеально пластические тела Прандтля характеризуются нелинейной определяющей зависимостью максимального касательного напряжения от медианного напряжения:

$$\tau_{\max} = f(s). \tag{8}$$

2. Дифференциальные уравнения кинематики сжимаемого течения. Рассмотрим дифференциальные уравнения кинематики сжимаемых течений. Имея ввиду приложения к механике сыпучих и неплотно связанных сред удобнее вести речь о приращениях вектора перемещения $d\mathbf{u}$ и тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$.

Соотношения Коши связывают приращение тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$ с приращением вектора перемещений $d\mathbf{u}$ следующим тензорным уравнением:

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u}) + (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u})^{\mathrm{T}}. \tag{1}$$

Приращение вектора перемещений $d\mathbf{u}$ можно представить в виде разложения по векторам локального ортонормированного базиса в пространстве $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{<1>} + \mathbf{m}du_{<2>} + \mathbf{n}du_{<3>}. \tag{2}$$

В случае изотропных сред базис $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ удобнее всего ориентировать вдоль главных осей тензора напряжений (или тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$). Действительно в изотропных средах можно вести речь о, по крайней мере, одном общем триэдре главных осей тензоров

$\boldsymbol{\sigma}$ и $d\boldsymbol{\varepsilon}$, следовательно, спектральное представление приращения тензора деформации лучше всего взять в форме

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{l}\otimes\mathbf{l}(d\varepsilon_1) + \mathbf{m}\otimes\mathbf{m}(d\varepsilon_2) + \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}(d\varepsilon_3), \tag{3}$$

где $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — ортонормированный базис из собственных векторов, общих как для тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, так и для приращения тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$; $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ — главные приращения (пластической) деформации (собственные значения тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$). Для течений, для которых второй главной оси соответствуют промежуточные главное нормальное напряжение и главное приращение деформации, мы введем особую нумерацию осей главного триэдра так, чтобы наряду с (1) выполнялись неравенства

$$d\varepsilon_1 \geq d\varepsilon_2 \geq d\varepsilon_3. \tag{4}$$

Формулы Коши приводят к следующим весьма компактным матричным уравнениям:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \kappa_{13} & \kappa_{12} \\ \kappa_{23} & d_2 & \kappa_{21} \\ \kappa_{32} & \kappa_{31} & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ du_{<2>} \\ du_{<3>} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} -\kappa_{13}+d_2 & -\kappa_{23}+d_1 & 0 \\ -\kappa_{12}+d_3 & 0 & -\kappa_{32}+d_1 \\ 0 & -\kappa_{21}+d_3 & -\kappa_{31}+d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ du_{<2>} \\ du_{<3>} \end{pmatrix} = 0. \tag{6}$$

Здесь $d\varepsilon_1$ — собственные значения тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$; d_j — производные по направлению изостатических траекторий; κ_{ij} — кривизна проекции изостаты с номером i, причем проектирование осуществляется параллельно главному направлению j на плоскость, ортогональную этому направлению.

Переход от трехмерных уравнений кинематики к двумерным достаточно просто выполняется, если учесть, что

$$du_{<2>} = 0, \quad d\varepsilon_2 = 0, \quad d_2 = 0, \quad \kappa_{23} = 0, \quad \kappa_{21} = 0, \quad \kappa_{13} = 0, \quad \kappa_{31} = 0.$$

Введем также сокращенные обозначения для кривизн изостатических траекторий в плоскости течения

$$\kappa_1 = \kappa_{12}, \quad \kappa_3 = \kappa_{32}.$$

В результате приходим к с следующим матричным соотношениям:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1 \\ 0 \\ d\varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \kappa_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \kappa_3 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ 0 \\ du_{<3>} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & d_1 & 0 \\ -\kappa_1+d_3 & 0 & -\kappa_3+d_1 \\ 0 & d_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ 0 \\ du_{<3>} \end{pmatrix} = 0. \tag{8}$$

Оставляя в (7) и (8) независимые уравнения, получаем

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \kappa_1 \\ \kappa_3 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ du_{<3>} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$(-\kappa_1+d_3)du_{<1>} + (-\kappa_3+d_1)du_{<3>} = 0. \tag{10}$$

Замкнутая относительно физических компонент $du_{<1>}$, $du_{<3>}$ система дифференциальных уравнений получается, если к последнему уравнению присоединить еще одно кинематическое соотношение. Таким соотношением выступает следующее, уравнение, связывающее главные приращения деформации $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ и угол ${}^{\backprime\backprime}\iota$ между асимптотическими директорами тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$d\varepsilon_2 = \sin^2\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}\,d\varepsilon_1 + \cos^2\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}\,d\varepsilon_3. \tag{11}$$

Понятие об асимптотических директорах инкремента тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$ и его представление в терминах асимптотических директоров ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$ рассматривается в статьях [7–9]. Так, диадное представление инкремента тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$ имеет вид

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}(d\varepsilon_2) + (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\mathrm{sym}\,({}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}\otimes{}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}). \tag{12}$$

Угол между асимптотическими директорами ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$ вычисляется с помощью кинематического параметра Лоде

$$\cos{}^{\backprime\backprime}\iota = -\nu, \tag{13}$$

где

$$\nu = \frac{2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}. \tag{14}$$

С учетом кинематического ограничения $d\varepsilon_2 = 0$, выполняющегося для плоского деформированного состояния, кинематический параметр Лоде вычисляется согласно

$$\nu = -\frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}, \tag{15}$$

а уравнение (11) будет иметь вид

$$\sin^2\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}\,d\varepsilon_1 + \cos^2\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}\,d\varepsilon_3 = 0. \tag{16}$$

Подставляя в это уравнение главные приращения деформаций из (9), получим замыкающее дифференциальное уравнение

$$\sin^2\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}\,(d_1du_{<1>} + \kappa_1du_{<3>}) + \cos^2\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}\,(d_3du_{<3>} + \kappa_3du_{<1>}) = 0. \tag{17}$$

Таким образом разыскиваемая замкнутая система уравнений относительно приращений перемещений $du_{<1>}$, $du_{<3>}$ состоит из (10) и (17):

$$\begin{aligned}&(-\kappa_1 + d_3)du_{<1>} + (-\kappa_3 + d_1)du_{<3>} = 0,\\ &\sin^2\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}\,(d_1du_{<1>} + \kappa_1du_{<3>}) + \cos^2\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}\,(d_3du_{<3>} + \kappa_3du_{<1>}) = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

В случае течения среды Кулона—Мора угол ${}^{\backprime\backprime}\iota$ будет постоянным, поскольку

$$\cos{}^{\backprime\backprime}\iota = \frac{1-a}{1+a}.$$

В стандартных обозначениях теории поля система дифференциальных уравнений (18) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}&(-\kappa_1 + \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})du_{<1>} + (-\kappa_3 + \mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})du_{<3>} = 0,\\ &\sin^2\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}\,((\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})du_{<1>} + \kappa_1du_{<3>}) + \cos^2\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}\,((\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})du_{<3>} + \kappa_3du_{<1>}) = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Система дифференциальных уравнений (19) принадлежит к гиперболическому аналитическому типу. Характеристические направления совпадают с направлениями сопряженных директоров ${}''\mathbf{l}$, ${}''\mathbf{n}$. Сопряженные директоры — два направления в плоскости, ортогональной второй главной оси тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$, которые ортогональны направлениям асимптотических директоров ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$. Директор ${}''\mathbf{l}$ ортогонален асимптотическому директору ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$, а директор ${}''\mathbf{n}$ ортогонален ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$:

$$ {}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}\cdot{}''\mathbf{l}=0, \qquad {}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}\cdot{}''\mathbf{n}=0. \tag{20}$$

Если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора $\mathbf{m}$, то директор ${}''\mathbf{l}$ получается в результате поворота собственного вектора $\mathbf{l}$ в указанной плоскости на угол $\dfrac{\pi-{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}$ по ходу часовой стрелки, а директор ${}''\mathbf{n}$ — поворотом вектора $\mathbf{l}$ на тот же угол против хода часовой стрелки.

3. Дифференциальные соотношения вдоль характеристических линий. Сначала заметим, что линии, всюду касающиеся поля направлений ${}''\mathbf{l}$, ${}''\mathbf{n}$, обладают одним замечательным кинематическим свойством [7, 8]. Действительно, принимая во внимание (12) и (20), сразу же находятся мгновенные удлинения линейных элементов, направленных вдоль директоров ${}''\mathbf{l}$, ${}''\mathbf{n}$; все они оказываются равными промежуточному главному приращению деформации $d\varepsilon_2$:

$$\begin{aligned} {}''\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}''\mathbf{l}&=d\varepsilon_2,\\ {}''\mathbf{n}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}''\mathbf{n}&=d\varepsilon_2. \end{aligned} \tag{21}$$

Соотношения для мгновенных удлинений (21) при выполнении условия $d\varepsilon_2=0$ упрощаются:

$$\begin{aligned} {}''\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}''\mathbf{l}&=0,\\ {}''\mathbf{n}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}''\mathbf{n}&=0. \end{aligned} \tag{22}$$

На основании второго и третьего соотношения в (22) сразу же приходим к выводу о том, что в процессе течения линейные элементы, перпендикулярные направлениям асимптотических директоров ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$, не претерпевают мгновенных удлинений, т.е. материальные волокна, ориентированные вдоль директоров ${}''\mathbf{l}$, ${}''\mathbf{n}$, мгновенно не удлиняются и не укорачиваются. Таким образом, рассматриваемые линии образуют две мгновенно нерастяжимые системы.

Перейдем к выводу дифференциальных соотношений вдоль характеристических линий системы уравнений (18).

Прежде всего вместо физических компонент $du_{<1>}$, $du_{<3>}$ приращения вектора перемещения $d\mathbf{u}$ относительно базиса $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$ введем его ортогональные проекции на сопряженные направления ${}''\mathbf{l}$, ${}''\mathbf{n}$. Простые выкладки позволяют получить формулы, связывающие указанные величины:

$$\begin{aligned} du_{<\bar{1}>}&={}''\mathbf{l}\cdot d\mathbf{u}=-\cos\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}du_{<3>}+\sin\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}du_{<1>},\\ du_{<\bar{3}>}&={}''\mathbf{n}\cdot d\mathbf{u}=\cos\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}du_{<3>}+\sin\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}du_{<1>}. \end{aligned} \tag{23}$$

Полученные формулы можно обратить:

$$
\begin{aligned}
du_{<1>} &= \cos\frac{''\iota}{2}\,\frac{du_{<\bar{1}>} + du_{<\bar{3}>}}{\sin''\iota},\\
du_{<3>} &= \sin\frac{''\iota}{2}\,\frac{-du_{<\bar{1}>} + du_{<\bar{3}>}}{\sin''\iota}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Далее необходимо преобразовать d-операторы. Для этого применим формулы преобразования [6]. Предположим, что на плоскости имеется локальный ортонормированный базис $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, а другой локальный базис состоит из, вообще говоря, неортогональных единичных векторов $\bar{\mathbf{l}}$, $\overline{\mathbf{m}}$, первый из которых отклоняется от орта $\mathbf{l}$ на угол ψ_1 по ходу часовой стрелки, а второй отклоняется от орта $\mathbf{l}$ на угол ψ_2 против хода часовой стрелки. Мы считаем, что $\psi_1 > 0$, $\psi_2 > 0$, $\psi_1 + \psi_2 \neq \pi$. Углы ψ_1, ψ_2 могут, вообще говоря, изменяться при движении вдоль координатных линий локальной базисной системы $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$. Можно показать, что формулы преобразования дифференциальных операторов

$$
\begin{aligned}
d_1 = \mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla}, \quad d_3 = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla},\\
\overline{d_1} = \bar{\mathbf{l}}\cdot\boldsymbol{\nabla}, \quad \overline{d_3} = \bar{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}
\end{aligned}
$$

при переходе от одной локальной базисной системы к другой имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\cos\psi_1 - \cos\psi_2\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}\overline{d_1} + \frac{\cos\psi_2 - \cos\psi_1\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}\overline{d_3},\\
d_3 &= \frac{-\sin\psi_1 - \sin\psi_2\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}\overline{d_1} + \frac{\sin\psi_2 + \sin\psi_1\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}\overline{d_3}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

В рассматриваемом случае следует положить

$$
\bar{\mathbf{l}} = {}''\mathbf{l}, \quad \bar{\mathbf{n}} = {}''\mathbf{n}, \quad \psi_1 = \psi_2 = \frac{\pi - {}''\iota}{2},
$$

т.е. d-операторы дифференцирования вдоль изостатических d_1, d_3 и сопряженных направлений $\overline{d_1}$, $\overline{d_3}$ оказываются связанными между собой формулами

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{2\sin\dfrac{''\iota}{2}}\left(\overline{d_1} + \overline{d_3}\right),\\
d_3 &= \frac{1}{2\cos\dfrac{''\iota}{2}}\left(\overline{d_3} - \overline{d_1}\right).
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Если сейчас воспользоваться соотношениями между компонентами вектора приращения перемещения (24) и соотношениями для дифференциальных операторов (26), подставляя их в систему кинематических уравнений (18), то в результате ряда преобразований (умножая первое уравнение на $\sin\frac{''\iota}{2}\cos\frac{''\iota}{2}$, складывая со вторым, вычитая из второго уравнения и переставляя полученное уравнение со вторым) можно получить дифференциальные соотношения вдоль характеристических линий

$$
\begin{aligned}
\overline{d_1}du_{<\bar{1}>} - \frac{\cos''\iota\, du_{<\bar{1}>} + du_{<\bar{3}>}}{\sin''\iota}\overline{d_1}\left(\theta - \frac{''\iota}{2}\right) = 0,\\
\overline{d_3}du_{<\bar{3}>} + \frac{du_{<\bar{1}>} + \cos''\iota\, du_{<\bar{3}>}}{\sin''\iota}\overline{d_3}\left(\theta + \frac{''\iota}{2}\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{27}
$$

где θ — угол между некоторым фиксированным направлением в плоскости течения и собственным вектором $\mathbf{l}$.

Таким образом с точки зрения кинематики плоскость течения сжимаемой среды выглядит сотканной из двух семейств мгновенно нерастяжимых нитей; вдоль нитей выполняются кинематические соотношения (27).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.

[2] Надаи А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М., Л.: ОНТИ, 1936. 280 с.

[3] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. 648 с.

[4] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 864 с.

[5] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.

[6] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. 2-е изд. перераб. и доп. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 240 с.

[7] Радаев Ю.Н. Мгновенно-нерастяжимые директоры в кинематике трехмерных течений сред Кулона—Мора// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 467–483.

[8] Радаев Ю.Н. К теории неплотно связанных сред Кулона—Мора и обобщенных пластических тел Прандтля// Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. №4(38). С. 3-24.

[9] Радаев Ю.Н. Асимптотические оси тензоров напряжений и приращения деформации в механике сжимаемых континуумов// Изв. РАН. Мех. тверд тела. 2013. №5. С. 77-85.

Y. N. Radayev

KINEMATIC DIFFERENTIAL EQUATIONS ALONG THE INSTANTANEOUSLY NOT ELONGATING LINES IN COMPRESSIBLE FLOWS

Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper deals with flows of compressible media with the zero intermediate principal increment of the strain tensor. Such flows can be observed for loosely bonded Coulomb–Mohr media and the generalized Prandtl perfectly plastic solids in plane strain states. The Prandtl solids have the constitutive equation related the maximum tangent stress to the mean (exactly median) stress. In the case of Coulomb–Mohr media, the specified dependence is linear. The intermediate principal stress has no effect on yielding or transition to a limit state. Under these conditions, it is then possible to prove the hyperbolicity of the system of differential equations of kinematics and to obtain differential relations along the characteristic lines, which consist of linear elements which are not instantaneously elongate.

Keywords: Coulomb–Mohr media, Prandtl perfectly plastic media, compessibility, flow, principal stress, asymptotic directions, conjugate directors, hyperbolicity, characteristics

REFERENCES

[1] Ivlev D.D. The theory of perfect plasticity. M .: Nauka, 1966. 232 p.
[2] Nadai A. Plasticity. The mechanics of the plastic state of matter. M., L.: ONTI, 1936. 280 p.
[3] Nadai A. Plasticity and destruction of solids. V. 1. M .: Izd-vo inostr. lit-ry, 1954. 648 p.
[4] Nadai A. Plasticity and destruction of solids. V. 2. M.: Mir, 1969. 864 p.
[5] Radaev Yu.N. The spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Izd-vo Samarskogo gos. universiteta, 2004. 147 p.
[6] Radaev Yu.N. The spatial problem of the mathematical theory of plasticity. 2nd ed. Samara: Izd-vo Samarskogo gos. universiteta, 2006. 240 p.
[7] Radaev Yu.N. Instantly inextensible directors in the kinematics of three-dimensional flows of Coulomb media—Mora // Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2018. V. 18. No. 4. P. 467–483.
[8] Radaev Yu.N. On the theory of loosely coupled Coulomb media—Mora and generalized Prandtl plastic bodies // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit States. 2018. No 4 (38). P. 3-24.
[9] Radaev Yu. N. Asymptotic axes of stress tensors and strain increments in the mechanics of compressible continua // Izv. RAN. Mekhanika Tverdogo Tela. 2013. No 5. pp. 77-85.

Radayev Yuri Nickolaevich
`e-mail:` radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.