

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ d -ОПЕРАТОРОВ В МОДЕЛЯХ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Получены формулы преобразования дифференциальных d -операторов, с которыми приходится оперировать в двумерных и трехмерных задачах математической теории пластичности и механики растущих тел. Указанные преобразования вызваны изменением криволинейных координатных систем с целью упрощения дифференциальных уравнений (в частности, теории пластичности) и дифференциальных ограничений, накладываемых на поверхности роста, в теориях растущих тел. В работе выполнен вывод формул преобразования и рассмотрены соответствующие примеры.

Ключевые слова: d -оператор, пластическое течение, аддитивное производство, поверхностный рост, поверхность наращивания, дифференциальное ограничение

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.009

УДК: 539.374

1. Введение. Моделирование процессов деформирования и наращивания твердых тел связано с решением специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных [1, 2, 3]. Эти уравнения содержат операторы дифференцирования по пространственным направлениям [3]. Для краткости назовем их d -операторами. Иногда удастся упростить дифференциальные уравнения и дифференциальные ограничения, возникающие при описании поведения твердых тел, переходом к новым координатным сеткам. После введения, в разделе 2 настоящей работы выводятся формулы преобразования дифференциальных d -операторов от текущей ортогональной сетки к произвольной криволинейной (не обязательно ортогональной) координатной сетке. В

© Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. 2019

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 18-01-00844, 19-51-60001, 17-01-00712) и по теме государственного задания министерства науки и высшего образования Российской Федерации (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8).

Поступила 19.11.2019

разделе 3 работы показано важное применение, полученных в разделе 2 формул преобразования d -операторов, к задачам механики растущих тел. Речь идет об основном элементе теории — дифференциальном ограничении на поверхности наращивания. В этом случае, удобно связать один из ортов координатной сетки с вектором нормали к поверхности наращивания, а два других — с базисными ортами, расположенными в касательной плоскости. В теории идеальной пластичности применение формул преобразования d -операторов позволяет в простой и удобной форме получить интегрируемые соотношения Генки в задаче о плоской деформации идеально пластического тела [3], что и продемонстрировано в разделе 4. В разделе 5 приводятся формулы для пересчета компонент несимметричного тензора напряжений при переходе к неортогональной сетке на поверхности наращивания. Эти формулы необходимы для постановки граничных условий на поверхности наращивания.

2. Преобразование операторов дифференцирования вдоль координатных направлений на плоскости.

Ниже дается вывод формул преобразования операторов d_k дифференцирования вдоль координатных направлений на плоскости при переходе от ортогональной сетки к произвольной (необязательно ортогональной) криволинейной сетке.

Предположим, что на плоскости имеется локальный ортонормированный базис $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, а другой локальный базис состоит из, вообще говоря, неортогональных единичных векторов $\bar{\mathbf{l}}$, $\bar{\mathbf{m}}$, первый из которых отклоняется от орта $\mathbf{l}$ на угол ψ_1 по ходу часовой стрелки, а второй отклоняется от орта $\mathbf{l}$ на угол ψ_2 против хода часовой стрелки. Мы считаем, что $\psi_1 > 0$, $\psi_2 > 0$, $\psi_1 + \psi_2 \neq \pi$. Углы ψ_1 , ψ_2 могут, вообще говоря, изменяться при движении вдоль координатных линий локальной базисной системы $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$.

Найдем формулы преобразования дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} d_1 &= \mathbf{l} \cdot \nabla, & d_2 &= \mathbf{m} \cdot \nabla, \\ \bar{d}_1 &= \bar{\mathbf{l}} \cdot \nabla, & \bar{d}_2 &= \bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla \end{aligned}$$

при переходе от одной локальной базисной системы к другой. Эти операторы, как следует из их определения, представляют собой производные вдоль соответствующих координатных линий.

Коэффициенты в разложении

$$\mathbf{l} = \bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2 \tag{1}$$

на основании

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}} &= \cos \psi_1 = k_1 + k_2 \cos(\psi_1 + \psi_2), \\ \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{m}} &= \cos \psi_2 = k_2 + k_1 \cos(\psi_1 + \psi_2) \end{aligned}$$

вычисляются в следующем виде

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}, \\ k_2 &= \frac{\cos \psi_2 - \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Аналогично для разложения

$$\mathbf{m} = \bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2 \tag{3}$$

с помощью

$$\begin{aligned}\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{l}} &= -\sin \psi_1 = s_1 + s_2 \cos(\psi_1 + \psi_2), \\ \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} &= \sin \psi_2 = s_2 + s_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)\end{aligned}$$

можно получить

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{-\sin \psi_1 - \sin \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}, \\ s_2 &= \frac{\sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}.\end{aligned}\tag{4}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}d_1 &= \mathbf{l} \cdot \nabla = (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \cdot \nabla = k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2, \\ d_2 &= \mathbf{m} \cdot \nabla = (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \cdot \nabla = s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2,\end{aligned}$$

то в итоге искомые формулы преобразования имеют вид

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_1 + \frac{\cos \psi_2 - \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_2, \\ d_2 &= \frac{-\sin \psi_1 - \sin \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_1 + \frac{\sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_2.\end{aligned}\tag{5}$$

В случае преобразования поворота исходного базиса $\mathbf{l}, \mathbf{m}$, т.е. когда

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} - \psi, \quad \psi_2 = \psi,$$

полученные формулы упрощаются

$$\begin{aligned}d_1 &= \sin \psi \bar{d}_1 + \cos \psi \bar{d}_2, \\ d_2 &= -\cos \psi \bar{d}_1 + \sin \psi \bar{d}_2.\end{aligned}\tag{6}$$

Обратное по отношению к (6) преобразование есть

$$\begin{aligned}\bar{d}_1 &= \sin \psi d_1 - \cos \psi d_2, \\ \bar{d}_2 &= \cos \psi d_1 + \sin \psi d_2.\end{aligned}\tag{7}$$

Полученные выше формулы преобразования дифференциальных d -операторов оказываются весьма удобным средством при исследовании систем уравнений в частных производных, с которыми приходится сталкиваться в двумерных задачах математической теории пластичности. То же самое можно сказать о задачах механики растущих тел [4, 5, 6, 7]. Соответствующий круг вопросов рассмотрен в следующих разделах работы.

3. Дифференциальное ограничение на растущей поверхности, сформулированное в эйлеровых переменных.

Можно показать [8, 9, 10], что дифференциальное ограничение на поверхности наращивания можно записать в виде

$$c[\nabla_j \tau^{ji}(x^k) + \nabla_j \mathfrak{J}^{ji} + \dot{X}^i(x^k)] - [n_j \partial_t \tau^{ji}(x^k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x^s)+0} = 0 \quad (t = \tau^* + 0).\tag{8}$$

где ∇_j — ковариантное дифференцирование по эйлеровой метрике, c — линейная скорость поверхности наращивания в направлении нормали, τ^{ij} — тензор напряжений (вообще говоря несимметричный), ∂_t — производная по времени при фиксированных координатах x^k , $\dot{X}^i(x^k) = X^i(x^k, t)|_{t=\tau^*(x^s)-0}$, $X^i = X^i(x^k, t)$, — объемные силы, $\mathfrak{J}^{ji}$ —

интеграл скачков напряжений, $\tau^{ij}(x^k) = \tau^{ij}(x^k, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$, $t = \tau(x^s) - 0$ момент времени непосредственно перед моментом включения элемента в состав основного тела (Рис. 2). Момент времени $t = \tau(x^s) + 0$ соответствует моменту непосредственно после присоединения элемента к поверхности наращивания.

Заметим, что

$$\mathfrak{T}^{ij} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial \tau^{ij}(x^k, t')] dt'.$$

Дифференциальное ограничение (8) для напряжений на поверхности наращивания в ортогональной системе координат, можно представить в форме (в отсутствие массовых сил и скачков напряжений)

$$[cd_j \tau_{<ji>}^* - n_{<j>} \partial \tau_{<ji>}(x_k, t)] \Big|_{t=\tau(x_s)+0} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (9)$$

В (9) индекс 3 соответствует направлению нормали, а индексы 1 и 2 — касательным направлениям к поверхности наращивания. Выпишем соотношение (9) в криволинейной системе координат, воспользовавшись преобразованием (5) при условии, что орт, соответствующий индексу 3, направлен вдоль нормали $\mathbf{n}$ к поверхности наращивания.

После подстановки соотношений (5) в дифференциальное ограничение (9) с учетом обозначений (2), (4) и равенства (11) получим

$$\begin{aligned} & [c(k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2) \tau_{<11>}^* + (s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2) \tau_{<21>}^* + d_3 \tau_{<31>}^* - \\ & - n_{<1>} \partial \tau_{<11>}(x_k, t) - n_{<2>} \partial \tau_{<21>}(x_k, t) - n_{<3>} \partial \tau_{<31>}(x_k, t)] \Big|_{t=\tau(x_s)+0} = 0, \\ & [c(k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2) \tau_{<12>}^* + (s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2) \tau_{<22>}^* + d_3 \tau_{<32>}^* - \\ & - n_{<1>} \partial \tau_{<12>}(x_k, t) - n_{<2>} \partial \tau_{<22>}(x_k, t) - n_{<3>} \partial \tau_{<32>}(x_k, t)] \Big|_{t=\tau(x_s)+0} = 0, \\ & [c(k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2) \tau_{<13>}^* + (s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2) \tau_{<23>}^* + d_3 \tau_{<33>}^* - \\ & - n_{<1>} \partial \tau_{<13>}(x_k, t) - n_{<2>} \partial \tau_{<23>}(x_k, t) - n_{<3>} \partial \tau_{<33>}(x_k, t)] \Big|_{t=\tau(x_s)+0} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь учтено, что

$$d_3 = \bar{d}_3 = \mathbf{n} \cdot \nabla. \quad (11)$$

За счет выбора углов ψ_1, ψ_2 можно упростить вид дифференциальных ограничений (10). Вообще говоря, в соотношениях (10) компоненты тензора напряжений $\tau_{<ji>}^*$ необходимо преобразовать к новому базису. Соотношения для преобразования компонент тензора напряжений будут даны в разделе 5 работы.

4. Идеальная пластичность. Плоская деформация. Рассмотрим пример использования полученных формул преобразования в модели идеально пластического тела в условиях плоского деформированного состояния [3]. Плоское деформированное состояние характеризуется условием $\varepsilon_{33} = 0$. Любое условие пластичности в случае плоского деформированного состояния приводится к виду $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, σ_1, σ_2 — собственные значения симметричного тензора напряжений, k предел текучести при чистом сдвиге. В плоскости течения x_1, x_2 имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий. Одно из семейств будем идентифицировать номером

1, другое — номером 2. Обозначая через θ угол наклона к оси x_1 изостаты первого семейства, а через κ_1, κ_2 — кривизны изостат, имеем

$$\kappa_1 = -d_1\theta, \quad \kappa_2 = d_2\theta. \quad (12)$$

Уравнения равновесия, сформулированные в изостатической координатной сетке, сводятся к двум соотношениям Ламе–Максвелла

$$\begin{aligned} d_1\sigma_1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} &= 0, \\ d_2\sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где ρ_1, ρ_2 радиусы кривизны линий главных напряжений, причем эти величины считаются положительными, если с возрастанием натурального параметра вдоль кривой касательная вращается против часовой стрелки, при этом положительное направление вдоль первой траектории выбирается произвольно, а положительное направление вдоль второй траектории определяется вращением против хода часовой стрелки положительного направления первой траектории. Так как в случае плоской пластической деформации $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, то уравнения (13) приобретают следующий вид:

$$d_1\sigma_1 + \frac{2k}{\rho_1} = 0, \quad d_2\sigma_2 + \frac{2k}{\rho_2} = 0, \quad (14)$$

Эта система гиперболична. Характеристики делят пополам угол между главными направлениями напряжений. Вводя в систему (14) на основании формулы (7) производные вдоль характеристических направлений (примем, что первая характеристика отклоняется от первого главного направления напряжений, соответствующего наибольшему главному напряжению, на угол $\pi/4$ по ходу часовой

$$\bar{d}_1 = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{d}_2 = \frac{d_1 + d_2}{\sqrt{2}}, \quad (15)$$

складывая, а затем вычитая одно из другого уравнения системы 15, получим интегрируемые соотношения Генки вдоль характеристик:

$$\bar{d}_1(\sigma_1 - 2k\theta) = 0, \quad \bar{d}_2(\sigma_1 + 2k\theta) = 0. \quad (16)$$

5. Преобразование несимметричного тензора напряжений при переходе к неортогональному базису. Несимметричный тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ можно записать как линейную комбинацию базисных тензорных произведений с сомножителями $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \tau_{\langle 11 \rangle} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \tau_{\langle 12 \rangle} \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} + \tau_{\langle 21 \rangle} \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} + \tau_{\langle 22 \rangle} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \tau_{\langle 23 \rangle} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \\ & + \tau_{\langle 32 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 13 \rangle} \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 31 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (17)$$

Найдем диадное представление тензора $\boldsymbol{\tau}$ после замены базиса $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ на новый базис $\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{n}}$. Подставив в формулу (17) формулы (1) и (3), получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \tau_{\langle 11 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) + \tau_{\langle 12 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \\ & + \tau_{\langle 21 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) + \tau_{\langle 22 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \\ & + \tau_{\langle 23 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 32 \rangle} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \\ & + \tau_{\langle 13 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 31 \rangle} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2), \end{aligned} \quad (18)$$

кроме того, имеем:

$$\begin{aligned}
 \tau = & \tau_{<11>}(\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}}k_1^2 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}}k_1k_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}}k_2k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}}k_2^2) + \\
 & + \tau_{<12>}(\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}}k_1s_1 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}}k_1s_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}}k_2s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}}k_2s_2) + \\
 & + \tau_{<21>}(\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}}s_1k_1 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}}s_1k_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}}s_2k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}}s_2k_2) + \\
 & + \tau_{<22>}(\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}}s_1^2 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}}s_1s_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}}s_2s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}}s_2^2) + \\
 & + \tau_{<23>}(\bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n}s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n}s_2) + \tau_{<32>}(\mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}}s_1 + \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}}s_2) + \\
 & + \tau_{<33>}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{<13>}(\bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n}k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n}k_2) + \tau_{<31>}(\mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}}k_1 + \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}}k_2).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Соберем затем слагаемые с одинаковыми диадами базисных директоров $\bar{\mathbf{l}}$, $\bar{\mathbf{m}}$, $\mathbf{n}$. После ряда преобразований приходим к:

$$\begin{aligned}
 \tau = & (k_1^2\tau_{<11>} + k_1s_1\tau_{<12>} + k_1s_1\tau_{<21>} + s_1^2\tau_{<22>})\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \\
 & + (k_1k_2\tau_{<11>} + k_1s_2\tau_{<12>} + s_1k_2\tau_{<21>} + s_1s_2\tau_{<22>})\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\
 & + (k_1k_2\tau_{<11>} + k_2s_1\tau_{<12>} + s_2k_1\tau_{<21>} + s_1s_2\tau_{<22>})\bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \\
 & + (k_2^2\tau_{<11>} + k_2s_2\tau_{<12>} + k_2s_2\tau_{<21>} + s_2^2\tau_{<22>})\bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\
 & + (k_2\tau_{<13>} + s_2\tau_{<23>})\bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} + (k_2\tau_{<31>} + s_2\tau_{<32>})\mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\
 & + \tau_{<33>}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + (k_1\tau_{<13>} + s_1\tau_{<23>})\bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} + (k_1\tau_{<31>} + s_1\tau_{<32>})\mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Откуда, окончательно, формулы преобразования компонент тензора напряжений τ от исходного базиса к искаженному примут вид:

$$\begin{aligned}
 \tau_{<\bar{1}\bar{1}>} &= k_1^2\tau_{<11>} + k_1s_1\tau_{<12>} + k_1s_1\tau_{<21>} + s_1^2\tau_{<22>}, \\
 \tau_{<\bar{1}\bar{2}>} &= k_1k_2\tau_{<11>} + k_1s_2\tau_{<12>} + s_1k_2\tau_{<21>} + s_1s_2\tau_{<22>}, \\
 \tau_{<\bar{2}\bar{1}>} &= k_1k_2\tau_{<11>} + k_2s_1\tau_{<12>} + s_2k_1\tau_{<21>} + s_1s_2\tau_{<22>}, \\
 \tau_{<\bar{2}\bar{2}>} &= k_2^2\tau_{<11>} + k_2s_2\tau_{<12>} + k_2s_2\tau_{<21>} + s_2^2\tau_{<22>}, \\
 \tau_{<\bar{2}\bar{3}>} &= k_2\tau_{<13>} + s_2\tau_{<23>}, \\
 \tau_{<\bar{3}\bar{2}>} &= k_2\tau_{<31>} + s_2\tau_{<32>}, \\
 \tau_{<\bar{3}\bar{3}>} &= \tau_{<33>}, \\
 \tau_{<\bar{1}\bar{3}>} &= k_1\tau_{<13>} + s_1\tau_{<23>}, \\
 \tau_{<\bar{3}\bar{1}>} &= k_1\tau_{<31>} + s_1\tau_{<32>}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Далее рассмотрим обращение формул (21). Формулы преобразования базисных директоров $\bar{\mathbf{l}}$, $\bar{\mathbf{m}}$, $\mathbf{n}$ в директоры $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ можно принять как

$$\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{l}\bar{k}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2, \tag{22}$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{l}\bar{s}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2, \tag{23}$$

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{n}. \tag{24}$$

Тогда коэффициенты в разложении (22), (23) легко получить на основании соотношений

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{l} &= \cos \psi_1 = \bar{k}_1, \\ \bar{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{m} &= -\sin \psi_1 = \bar{k}_2, \\ \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{l} &= \cos \psi_2 = \bar{s}_1, \\ \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} &= \sin \psi_2 = \bar{s}_2.\end{aligned}\tag{25}$$

Снова запишем тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ как линейную комбинацию базисных тензорных произведений

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} = & \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \tau_{\langle \bar{2}\bar{3} \rangle} \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} + \\ & + \tau_{\langle \bar{3}\bar{2} \rangle} \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \tau_{\langle \bar{3}\bar{3} \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle \bar{1}3 \rangle} \bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle \bar{3}1 \rangle} \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}}.\end{aligned}\tag{26}$$

Подставляя в формулу (26) разложения (22), (23), получим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} = & \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) + \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) + \\ & + \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) + \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) + \\ & + \tau_{\langle \bar{2}\bar{3} \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle \bar{3}\bar{2} \rangle} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) + \tau_{\langle \bar{3}\bar{3} \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \\ & + \tau_{\langle \bar{1}3 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle \bar{3}1 \rangle} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2).\end{aligned}\tag{27}$$

Раскроем скобки в (27). в результате приходим к:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} = & \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{k}_1^2 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_1\bar{k}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{k}_2\bar{k}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_2^2) + \\ & + \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{k}_1\bar{s}_1 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_1\bar{s}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{k}_2\bar{s}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_2\bar{s}_2) + \\ & + \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{s}_1\bar{k}_1 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_1\bar{k}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{s}_2\bar{k}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_2\bar{k}_2) + \\ & + \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{s}_1^2 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_1\bar{s}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{s}_2\bar{s}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_2^2) + \\ & + \tau_{\langle \bar{2}\bar{3} \rangle} (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}\bar{s}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}\bar{s}_2) + \tau_{\langle \bar{3}\bar{2} \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{s}_1 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_2) + \\ & + \tau_{\langle \bar{3}\bar{3} \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle \bar{1}3 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}\bar{k}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}\bar{k}_2) + \tau_{\langle \bar{3}1 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{k}_1 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_2).\end{aligned}\tag{28}$$

Соберем слагаемые с одинаковыми диадами, состоящими из векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$. После ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} = & (\bar{k}_1^2\tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_1\bar{s}_1\tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{k}_1\bar{s}_1\tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1^2\tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}) \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \\ & + (\bar{k}_1\bar{k}_2\tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_1\bar{s}_2\tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{s}_1\bar{k}_2\tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1\bar{s}_2\tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}) \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} + \\ & + (\bar{k}_1\bar{k}_2\tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_2\bar{s}_1\tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{s}_2\bar{k}_1\tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1\bar{s}_2\tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}) \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} + \\ & + (\bar{k}_2^2\tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_2\bar{s}_2\tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{k}_2\bar{s}_2\tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_2^2\tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \\ & + (\bar{k}_2\tau_{\langle \bar{1}3 \rangle} + \bar{s}_2\tau_{\langle \bar{2}3 \rangle}) \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + (\bar{k}_2\tau_{\langle \bar{3}1 \rangle} + \bar{s}_2\tau_{\langle \bar{3}2 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \\ & + \tau_{\langle \bar{3}\bar{3} \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + (\bar{k}_1\tau_{\langle \bar{1}3 \rangle} + \bar{s}_1\tau_{\langle \bar{2}3 \rangle}) \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + (\bar{k}_1\tau_{\langle \bar{3}1 \rangle} + \bar{s}_1\tau_{\langle \bar{3}2 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}.\end{aligned}\tag{29}$$

Откуда, окончательно формулы преобразования компонент тензора напряжений τ от искаженного базиса к исходному запишем в форме:

$$\begin{aligned}
 \tau_{\langle 11 \rangle} &= \bar{k}_1^2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1^2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 12 \rangle} &= \bar{k}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{s}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 21 \rangle} &= \bar{k}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{s}_2 \bar{k}_1 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 22 \rangle} &= \bar{k}_2^2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_2^2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 23 \rangle} &= \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{3} \rangle} + \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{3} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 32 \rangle} &= \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{3}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{3}\bar{2} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 33 \rangle} &= \tau_{\langle \bar{3}\bar{3} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 13 \rangle} &= \bar{k}_1 \tau_{\langle \bar{1}\bar{3} \rangle} + \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{2}\bar{3} \rangle}, \\
 \tau_{\langle 31 \rangle} &= \bar{k}_1 \tau_{\langle \bar{3}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{3}\bar{2} \rangle}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Таким образом, формулы преобразования дифференциальных d -операторов могут выступить как эффективный инструмент преобразования дифференциальных уравнений и граничных условий в различных разделах механики деформируемого твердого тела [11, 12, 13].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупруго-пластических тел. 1987.
- [2] Ковалев В. А. Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
- [3] Ю.Н. Радаев. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара СамГУ, 2007. 142 с.
- [4] Арутюнян Н.Х. Наумов В.Э. Радаев Ю.Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 1. Движение потока осаждаемых частиц с переменной скоростью // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 5. С. 6–24.
- [5] Арутюнян Н.Х. Наумов В.Э. Радаев Ю.Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 2. Случай падения приращиваемых частиц с постоянной скоростью // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 6. С. 99–112.
- [6] Stadnik N.E. Dats E.P. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. 2018. Т. 991, № 1. с. 012075.
- [7] Stadnik N. E. Murashkin E. V. Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // AIP Conference Proceedings. 2019. Т. 2116. с. 380013.
- [8] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об одном дифференциальном ограничении в асимметричных теориях механики растущих тел // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 38–46.
- [9] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. Т. 23.
- [10] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // Вестник Чувашиского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3(41). С. 11–29.
- [11] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Математические модели и современные физические теории поля // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9:4(2). С. 41–94.
- [12] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Точно сохраняющиеся инварианты связанного микрополярного термоупругого поля // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12:4. С. 71–79.

- [13] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Полевые уравнения и d -тензоры термоупругого континуума с “тонкой” микроструктурой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13:2(1). С. 60–68.

Yu. N. Radayev, E. V. Murashkin

TRANSFORMATION FORMULAE FOR d -OPERATORS IN MECHANICS OF SOLIDS

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
pr. Vernadskogo 101 korp. 1, Moscow, 119526 Russian Federation*

Abstract. The transformation formulae for differential d -operators are obtained. Such operators can be found in two-dimensional and three-dimensional problems of the mathematical theory of plasticity and the mechanics of growing solids. These transformations are caused by in the course of varying in the coordinate systems in order to simplify the differential equations (in particular, in the theory of plasticity) and the differential constraints imposed on the growing surface known in mechanics of growing solids. In the paper, the transformation formulae are derived and the corresponding examples are considered and discussed.

Keywords: d -operator, plastic flow, additive manufacturing, growing surface, differential constraint

REFERENCES

- [1] Arutyunyan N.Kh., Drozdov A.D., Naumov V.E. Mechanics of growing viscoelastic-plastic solids. 1987.
- [2] Kovalev V.A., Radayev Yu.N. Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics. Saratov: SSU, 2010. 328 c.
- [3] Radayev Yu.N. Three-dimensional Problem of the Mathematical Theory of Plasticity. Samara: SamSU, 2007. 142 c.
- [4] Harutyunyan N.Kh., Naumov V.E., Radaev Yu.N. Dynamic accretion of the elastic layer. Part 1. The motion of the flow of deposited particles with a variable velocity // *Izv. USSR AS. MTT.* 1992. № 5. C. 6–24.
- [5] Harutyunyan N.Kh., Naumov V.E., Radaev Yu.N. Dynamic accretion of the elastic layer. Part 2. The case of deposition of incremental particles at a constant velocity // *Izv. USSR AS. MTT.* 1992. № 6. C. 99–112.
- [6] Stadnik N.E. Dats E.P. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // *Journal of Physics: Conference Series.* IOP Publishing. 2018. T. 991, № 1. c. 012075.
- [7] Stadnik N. E. Murashkin E. V. Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // *AIP Conference Proceedings.* 2019. T. 2116. c. 380013.
- [8] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in asymmetric theories of mechanics of growing solids // *Izv. Ros. Akad. Nauk Mekh. Tv. Tela.* 2019. № 6. C. 38–46.
- [9] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a class of constitutive equations on a growing surface // *Vestn. ChGPU I.Ya. Yakovleva. Ser. Lim. St. Mech.* 2019. № 3(41). C. 11–29.
- [10] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* T. 23.
- [11] Kovalev V., Radayev Y. Mathematical models and contemporary theories of physical fields // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2009. Vol. 9:4(2). P. 41–94.
- [12] Kovalev V., Radayev Y. On precisely conserved quantities of coupled micropolar thermoelastic field // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2012. Vol. 12:4. P. 71–79.

Yuri N. Radayev, D.Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Evgenii V. Murashkin, Cand.Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- [13] Kovalev V., Radayev Y. Covariant field equations and d -tensors of hyperbolic thermoelastic continuum with fine microstructure // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2013. Vol. 13:2(1). P. 60–68.