

Э. Т. Акинлаби, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин, Н. Э. Стадник

ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО–ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Институт прикладной математики ДВО РАН г. Владивосток, Россия

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН г. Москва, Россия

Университет Йоханнесбурга, г. Йоханнесбург, Южная Африка

Аннотация. Исследовано напряженно-деформированное состояния многослойного упруго-пластического материала в условиях неравномерного теплового расширения. Исследованы особенности необратимого деформирования при произвольном выборе параметров Ламе в каждом слое. Получены решения для напряжений и перемещений в одномерной задаче о нагреве многослойной сферы.

Ключевые слова: температурное напряжение, функционально–градиентный материал, пластичность, крип, температура, упругость, сферическая симметрия

DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.008

УДК: 539.374

1. Введение. В настоящее время существует обширная литература по функционально-градиентным материалам, конструкциям и покрытиям, посвященная их свойствам, методам исследования и расчета, а также технологиям изготовления

© Акинлаби Э. Т., Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Стадник Н. Э. 2019

Акинлаби Эшер Титилайо

e-mail: etakinlabi@uj.ac.za, профессор, кафедра машиностроения науки, факультет инженерии и строительства, Университет Йоханнесбурга, Южная Африка

Дац Евгений Павлович

e-mail: dats@dvo.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Стадник Никита Эдуардович, младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Работа выполнена по теме государственного задания министерства науки и высшего образования РФ (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №17-01-00712, 19-51-60001, 18-01-00844).

Поступила 19.07.2019

[1, 2, 3]. Во всех приведенных работах рассматриваются в основном упругие материалы, что ограничивает классы используемых в космической промышленности структур. Зависимость свойств предполагается от одной координаты, не учитывается возможность изменения свойств с течением времени. Анализ аддитивных технологий не основан на современных методах механики аддитивных технологий и процессов роста, что может привести к принципиальным ошибкам.

Существует несколько способов математического задания градиентного распределения механических характеристик внутри упругопластического материала. Одним из наиболее простых подходов в задании градиента для физических параметров является представление материала в виде многослойной структуры, где в каждом слое заданы различные значения параметров Ламе, коэффициента теплового расширения, предела текучести и др. М Переход к дискретному распределению таких характеристик с последующим описанием деформирования многослойного материала позволяет определить способность такого подхода качественно описывать напряженно-деформированное состояние в рамках моделей непрерывного распределения параметров (заданных при помощи непрерывных функций координат) в функционально-градиентных средах. Несомненным преимуществом дискретного задания градиента является возможность строить точные решения для напряженно-деформированного состояния материала с учетом нелинейных эффектов.

В условиях температурного воздействия, проявляющего свойства осевой симметрии, были получены аналитические решения ряда краевых задач термоупругопластического деформирования. Так, в работах [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] рассматривались решения краевых задач расчета полей остаточных деформаций и напряжений в условиях центральной (сферической) симметрии для упругопластического материала, определены особенности решения при нестационарном тепловом градиенте. Работы [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] посвящены проблемам построения решений для напряжений и перемещений в упругопластическом материале в условиях осевой симметрии в цилиндрических координатах. Были выявлены особенности расчета напряженного состояния в случае плоского напряженного и плоского деформированного состояния материала с учетом зависимости предела текучести от температуры.

2. Определяющие модельные соотношения и основные уравнения. Для описания деформирования многослойного объекта воспользуемся моделью малых упруго-пластических деформаций, в которой тензор деформаций d_{ij} состоит из упругой(обратимой) e_{ij} и пластической (необратимой) p_{ij} составляющей:

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad (1)$$

где u_i — компоненты вектора перемещений, ∂_j — оператор частного дифференцирования по пространственной координате. Определяющие уравнение между упругими компонентами тензора деформаций и компонентами тензора напряжений Коши примем в форме подобной термоупругому закону Дюамеля–Неймана:

$$\sigma_{ij}^{(v)} = 2\mu_v e_{ij}^{(v)} + (\lambda_v e_{kk}^{(v)} - (3\lambda_v + 2\mu_v)\alpha_v \Delta)\delta_{ij} \quad (2)$$

Здесь и далее верхний и/или нижний индекс $v = 1 \dots n$ определяет порядковый номер материального слоя в диапазоне от 0 до n , считая от начала координат; λ_v , μ_v , α_v — параметры ламе и коэффициент линейного теплового расширения в каждом слое, Δ — разница между начальной (комнатной) и текущей (повышенной) температурой,

определяющая степень нагрева. В этом случае, тепловое расширение материала определяется зависимостью

$$e_T^{(v)} = \alpha_v \Delta = \alpha_v (T - T_0).$$

Начало процесса необратимого деформирования свяжем с выполнением условия пластичности Треска в окрестности нагрева пластины

$$f^{(v)}(\sigma_{ij}) = 0, \quad (3)$$

В условиях принципа максимума Мизеса поверхность (3) оказывается пластическим потенциалом. И ассоциированный закон пластического течения записывается в виде

$$\partial_t \varepsilon_{ij}^{(v)} = \xi^{(v)} \frac{\partial f^{(v)}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \xi^{(v)} = \sqrt{\partial_t \varepsilon_{kl}^{(v)} \partial_t \varepsilon_{lk}^{(v)}} \left(\frac{\partial f^{(v)}}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f^{(v)}}{\partial \sigma_{nm}} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (4)$$

В областях обратимого и необратимого деформирования справедливы уравнения равновесия, которые в условиях отсутствия массовых сил можно записать в виде

$$\partial_j \sigma_{ji} = 0. \quad (5)$$

Систему уравнений (1)–(5) следует дополнить краевыми условиями, характерными для конкретной краевой задачи.

3. Деформирования слоистого материала при изменении температурного поля. Рассмотрим термоупругопластическую полую сферическую конструкцию, состоящую из n слоев, имеющих различные термо-механические характеристики. Будем полагать, что основным механизмом деформирования материала сферы является возникновение температурных деформаций вследствие равномерного нагрева материала сферического слоя. Очевидно, что если принять различные значения коэффициента теплового расширения для каждого слоя, то возникающий градиент деформаций приведет к появлению температурных напряжений.

Интегрирование уравнений равновесия (5) при подстановке определяющих соотношений (1)–(4) приводит к формулам для компонент тензора напряжений и вектора перемещений справедливым в каждом слое в условиях центральной симметрии в сферической системе координат

$$\sigma_{rr}^v = A_v + \frac{1}{B_v^3}, \quad \sigma_{\theta\theta}^v = \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)} = A_v - \frac{1}{2B_v^3}, \quad u_r^{(v)} = r\alpha_v \Delta + \frac{A_v r}{3\lambda_v + 2\mu_v} - \frac{B_v}{4\mu_v r^2}. \quad (6)$$

Здесь A_v , B_v — неизвестные константы интегрирования, определяемые из краевых условий задачи. В общем случае размер каждого слоя может быть различным, а радиальная координата слоя под номером v изменяется в диапазоне $R_{v-1} \leq r \leq R_v$, где R_{v-1} , R_v — внутренняя и внешняя поверхность v -слоя.

Для определения констант интегрирования в (6) воспользуемся граничными условиями, которые на контактных поверхностях и на внешней поверхности сферы можно принять в форме:

$$\sigma_{rr}^v(R_v) = \sigma_{rr}^{v+1}(R_v), \quad u_r^v(R_v) = u_r^{v+1}(R_v), \quad \sigma_{rr}^{(n)}(R_n) = 0, \quad v = 1 \dots (n-1). \quad (7)$$

Возникающий при неравномерном тепловом расширении градиент напряжений способен вызывать процесс необратимого деформирования материала. В этом случае в условиях сферической симметрии при выполнении условия пластичности

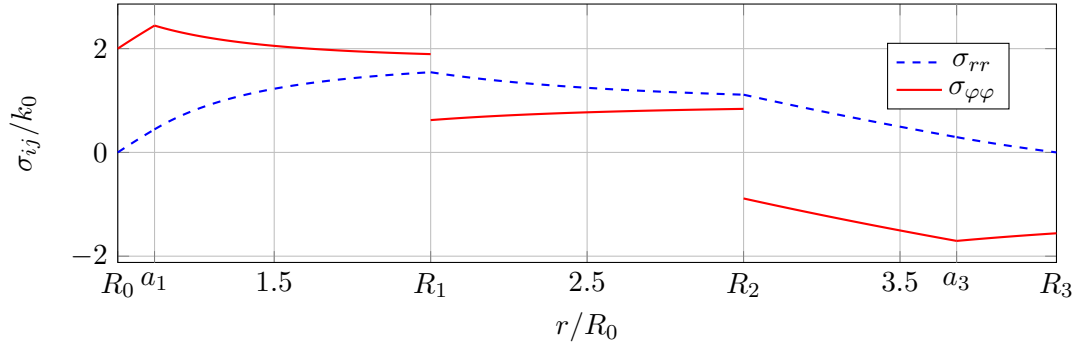


Рис. 1. Напряжения при неравномерном тепловом расширении композитного сферического слоя. $R_0 = 0.05$ см, $R_1/R_0 = 2$, $R_2/R_0 = 3$, $R_3/R_0 = 4$, $\alpha_1 = \alpha_0$, $\alpha_1 = 2\alpha_0$, $\alpha_1 = 3\alpha_0$, $\mu_1 = \mu_0$, $\mu_2 = 2\mu_0$, $\mu_3 = 3\mu_0$, $\Delta T = 120^\circ C$.

$(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 = 4k^2$ (где k — предел текучести при чистом сдвиге) в материале формируются области необратимого деформирования (пластического течения). Напряженно-деформированное состояние в таких областях соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr}^{(v)} &= F_v - 4s_v k_v \ln(r), & \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(v)} = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(v)} &= F_v - 4s_v k_v \ln(r) - 2s_v k_v, \\ \bar{u}_r^{(v)} &= \frac{G_v}{r^2} - \frac{4s_v k_v}{3\lambda_v + 2\mu_v} r \ln(r) + r \left(\frac{F_v}{3\lambda_v + 2\mu_v} + \alpha_v \Delta \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и далее черта над функцией означает ее принадлежность к области пластического течения. Константы интегрирования F_v , G_v наряду с константами (6) находятся из системы граничных условий (7) с учетом условий непрерывности напряжений и перемещений ну уругопластических границах a_v :

$$\bar{\sigma}_{rr}^{(v)}(a_v) = \sigma_{rr}^{(v)}(a_v), \quad \bar{u}_r^{(v)}(a_v) = u_r^{(v)}(a_v), \quad v = 0 \dots m, \quad (9)$$

где m - количество областей необратимого деформирования. Значения уругопластических границ a_v определяются из численного решения системы уравнений, задающих непрерывность на них окружных напряжений:

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(a_v) = \sigma_{\theta\theta}(a_v), \quad v = 0 \dots m. \quad (10)$$

Таким образом, для n слоев с m областями пластического течения имеем систему из $n + m + 1$ уравнений для определения неизвестных параметров A_v , B_v , F_v , G_v , a_v .

В следующем разделе рассмотрим задачу о расчете напряженно-деформированного состояния трехслойной уругопластической сферы, подверженной нестационарному тепловому воздействию. Постановка задачи может быть осуществлена с различными граничными условиями, которые определяют особенности деформирования неоднородного слоя с разными свойствами: 1) свободная внешняя и внутренняя поверхность сферы; 2) зафиксированная внутренняя и свободная внешняя поверхность сферы. Различные граничные условия на внутренней поверхности позволяют оценить влияние неравномерного теплового расширения и механических характеристик материала на его напряженно-деформированное состояние.

4. Деформирование в условиях свободного теплового расширения внутренней и внешней поверхности трехслойной сферы. Рассмотрим процесс

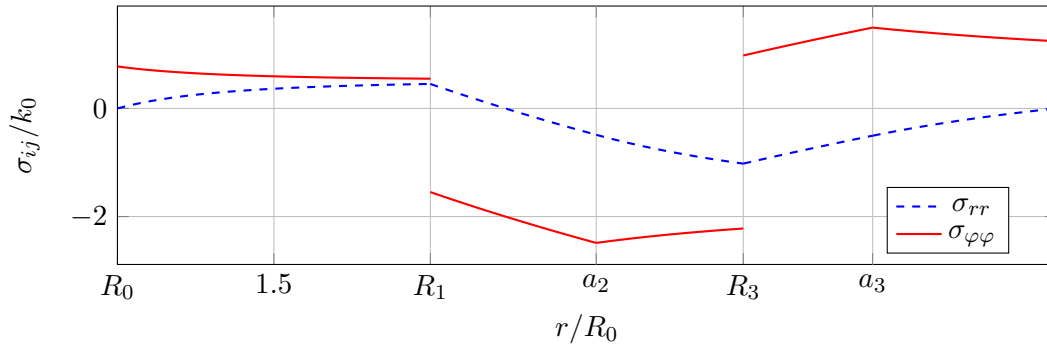


Рис. 2. Напряжения при неравномерном тепловом расширении композитного сферического слоя. $R_0 = 0.05$ см, $R_1/R_0 = 2$, $R_2/R_0 = 3$, $R_3/R_0 = 4$, $\alpha_1 = \alpha_0$, $\alpha_2 = 2\alpha_0$, $\alpha_3 = \alpha_0$, $\mu_1 = \mu_0$, $\mu_2 = \mu_0$, $\mu_3 = \mu_0$, $\Delta T = 420^\circ C$.

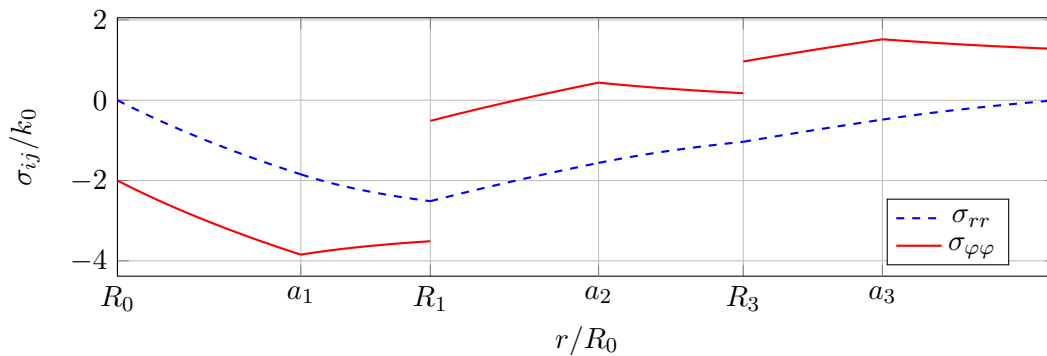


Рис. 3. Напряжения при неравномерном тепловом расширении композитного сферического слоя. $R_0 = 0.05$ см, $R_1/R_0 = 2$, $R_2/R_0 = 3$, $R_3/R_0 = 4$, $\alpha_1 = 3\alpha_0$, $\alpha_2 = 2\alpha_0$, $\alpha_3 = \alpha_0$, $\mu_1 = 3\mu_0$, $\mu_2 = 2\mu_0$, $\mu_3 = \mu_0$, $\Delta T = 520^\circ C$.

деформирования материала, подверженного равномерному температурному воздействию при свободном расширении внутренней и внешней поверхности сферического слоя.

В таком случае решение термоупругой задачи описывается соотношениями (6), (7). Отметим что, в условиях одинакового теплового расширения ($\alpha_i = \alpha_{i+1}$) константы интегрирования в соотношениях (6) принимают нулевые значения, и следовательно напряжения в многослойном материале при нагреве не возникают, несмотря на различия в параметрах ламы у каждого слоя. Таким образом, уровень градиента коэффициента линейного теплового расширения при переходе от слоя к слою в данной постановке задачи оказывает решающего влияния.

На рис. 1–3 изображены характерные распределения полей формирующихся температурных напряжений при повышенной температуре.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Akinlabi E., Akinlabi S. Effect of heat input on the properties of dissimilar friction stir welds of aluminium and copper // *American Journal of Materials Science*. 2012. Vol. 2, no. 5. P. 147–152.
- [2] Scanning velocity influence on microstructure, microhardness and wear resistance performance of laser deposited Ti6Al4V/TiC composite / R. Mahamood, E. Akinlabi, M. Shukla et al. // *Materials & design*. 2013. Vol. 50. P. 656–666.
- [3] Mahamood RM, Akinlabi ET. *Functionally graded materials*. Springer, 2017.
- [4] Dats E. P., Murashkin E. V., Velmurugan R. Calculation of Irreversible Deformations in a Hollow Elastic-Plastic Sphere under Nonsteady Thermal Action // *Bulletin of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2015. Vol. 25, no. 3. P. 168–175.
- [5] Дац Е. П., Мокрин С. Н., Мурашкин Е. В. Расчет накопленной остаточной деформации в процессе «нагрева-охлаждения» упругопластического шара // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2012. № 4. С. 250–264.
- [6] Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in AM fabricated ball during a heating process // *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1959. p. 070008.
- [7] Murashkin E., Dats E. Thermal Residual Stresses Computing in Elastic-Plastic Ball with Rigid Inclusion under Heat Treatments // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. 2018. Vol. 2235. P. 811–814.
- [8] Murashkin E., Dats E. Applications of Multi-Physics Modelling for Simulations of Thermo-Elastic-Plastic Materials // *Fourth International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry*. Corfu Island, Greece, 24 - 27 Aug, 2017: Conference Publishing Services of IEEE, 2018. P. 76–80.
- [9] Murashkin E., Dats E. Thermoelastoplastic Deformation of a Multilayer Ball // *Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 52, no. 5. P. 30–36.
- [10] Murashkin E. V., Dats E. P., Klindukhov V. V. Numerical Analysis of the Elastic-Plastic Boundaries in the Thermal Stresses Theory Frameworks // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2017. Vol. 937. p. 012060.
- [11] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // *Mechanics of Solids*. 2014. Mar. T. 49, № 2. С. 218–224. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654414020113>.
- [12] Дац Е. П., Мокрин С. Н., Мурашкин Е. В. Расчет остаточных напряжений полого цилиндра из термоупругопластического материала // *Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам*. Алушта: МАИ, 2013. С. 18–22.
- [13] Dats E. P., Murashkin E. V., Gupta N. K. On Yield Criterion Choice in Thermoelastoplastic Problems // *Procedia IUTAM*. 2017. Vol. 23. P. 187–200.
- [14] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On a Multi-Physics Modelling Framework for Thermo-elastic-plastic Materials Processing // *Procedia Manufacturing*. 2017. Vol. 7. P. 427–434.
- [15] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On Heating of Thin Circular Elastic-plastic Plate with the Yield Stress Depending on Temperature // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 173. P. 891–896.
- [16] Murashkin E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2018. Vol. 991. p. 012060.
- [17] Murashkin E., Dats E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoelasticity // *IAENG International Journal of Applied Mathematics*. 2017. Vol. 47. P. 261 – 264.

E. T. Akinlabi, E. P. Dats, E. V. Murashkin, N. E. Stadnik

THERMOELASTIC PLASTIC DEFORMATION OF A FUNCTIONAL GRADIENT MATERIAL UNDER CONDITIONS OF CENTRAL SYMMETRY

Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

University of Johannesburg, Johannesburg South Africa

Abstract. The present paper is devoted to problem of thermoelastoplastic deformation of hollow torus. The requisite equation of the temperature stresses theory are furnished in toroidal coordinate frame. The residual stresses in a hollow elastoplastic torus subject to non-uniform radial heating are calculated and graphically analyzed. The approximate analytical solution of the noted problem is obtained in the framework of the generalized plane stress state approach. The stress and displacement fields are computed in the thermoelastic and plastic flow domains. The correctness and applicability of the obtained solutions for a torus of arbitrary size under conditions of axisymmetric thermal effect are discussed.

Keywords: temperature stress, functional graded material, yield, creep, temperature, elasticity, spherical symmetry

REFERENCES

- [1] Akinlabi ET, Akinlabi SA. Effect of heat input on the properties of dissimilar friction stir welds of aluminium and copper // American Journal of Materials Science. 2012. T. 2, № 5. С. 147–152.
- [2] Scanning velocity influence on microstructure, microhardness and wear resistance performance of laser deposited Ti6Al4V/TiC composite / RM Mahamood, ET Akinlabi, M Shukla [и др.] // Materials & design. 2013. T. 50. С. 656–666.
- [3] Mahamood RM, Akinlabi ET. Functionally graded materials. Springer, 2017.
- [4] Dats E. P., Murashkin E. V., Velmurugan R. Calculation of Irreversible Deformations in a Hollow Elastic-Plastic Sphere under Nonsteady Thermal Action // Bulletin of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. Vol. 25, no. 3. P. 168–175.

Akinlabi Esther Titilayo

e-mail: etakinlabi@uj.ac.za, Professor, Department of Mechanical Engineering Science, Faculty of Engineering and the Built Environment, University of Johannesburg, South Africa

Dats Evgeniy Pavlovich

e-mail: dats@dvo.ru, PhD, Assistant Professor, Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok, Russia

Murashkin Evgenii Valerievich

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, PhD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Stadnik Nikita Eduardovich Junior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state registration number AAAA-A17-117021310381-8) and RFBR projects (17-01-00712, 18-01-00844), and financial support of the SA (NRF) / RUSSIA (RFBR) joint science and technology research collaboration (project No. RUSA180527335500/19-51-60001)

-
- [5] Dats E.P., Mokrin S.N., Murashkin E.V. Calculation of accumulated residual deformation in the process of "heating-cooling" of an elastoplastic ball // Bulletin of the I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Limit State Mechanics. 2012. № 4. С. 250–264.
- [6] Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in AM fabricated ball during a heating process // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. p. 070008.
- [7] Murashkin E., Dats E. Thermal Residual Stresses Computing in Elastic-Plastic Ball with Rigid Inclusion under Heat Treatments // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2018. Vol. 2235. P. 811–814.
- [8] Murashkin E., Dats E. Applications of Multi-Physics Modelling for Simulations of Thermo-Elastic-Plastic Materials // Fourth International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. Corfu Island, Greece, 24 - 27 Aug, 2017: Conference Publishing Services of IEEE, 2018. P. 76–80.
- [9] Murashkin E., Dats E. Thermoelastoplastic Deformation of a Multilayer Ball // Mechanics of Solids. 2017. Vol. 52, no. 5. P. 30–36.
- [10] Murashkin E. V., Dats E. P., Klindukhov V. V. Numerical Analysis of the Elastic-Plastic Boundaries in the Thermal Stresses Theory Frameworks // Journal of Physics: Conf. Series. 2017. Vol. 937. p. 012060.
- [11] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // Mechanics of Solids. 2014. Mar. T. 49, № 2. С. 218–224. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654414020113>.
- [12] Dats E.P., Mokrin S.N., Murashkin E.V. Calculation of residual stresses of a hollow cylinder made of thermopurgoplastic material // Materials of the XVIII International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Systems. Alushta: MAI, 2013. С. 18–22.
- [13] Dats E. P., Murashkin E. V., Gupta N. K. On Yield Criterion Choice in Thermoelastoplastic Problems // Procedia IUTAM. 2017. Vol. 23. P. 187–200.
- [14] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On a Multi-Physics Modelling Framework for Thermo-elastic-plastic Materials Processing // Procedia Manufacturing. 2017. Vol. 7. P. 427–434.
- [15] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On Heating of Thin Circular Elastic-plastic Plate with the Yield Stress Depending on Temperature // Procedia Engineering. 2017. Vol. 173. P. 891–896.
- [16] Murashkin E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // Journal of Physics: Conf. Series. 2018. Vol. 991. p. 012060.
- [17] Murashkin E., Dats E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Tmermoplasticity // IAENG International Journal of Applied Mathematics. 2017. Vol. 47. P. 261 – 264.