*Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева*
*Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1 (43). С. 22–33*

*А. Ю. Добрышкин, О. Е. Сысоев, Е. О. Сысоев, Лин Тхет*

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАЗОМКНУТОЙ ОБОЛОЧКИ С МАЛОЙ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССОЙ, ПРИ ШАРНИРНОМ ОПИРАНИИ, МЕТОДОМ АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ

*Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия*

***Аннотация.*** В работе приводится уточненная математическая модель вынужденных колебаний разомкнутой оболочки с малой присоединенной массой при шарнирном опирании. Шарнирное опирание рассмотрено как наиболее часто используемое. Уравнения составлены в линейной постановке, решались асимптотическими методами, с помощью аппроксимации Паде. Проведены экспериментальные исследования, для этого изготовлены испытательный стенд, образцы, разработана программа экспериментов. Выполненное сравнение теоретических и экспериментальных данных составляет менее 5%, что говорит о высокой надежности уточненной математической модели. Полученные зависимости частоты колебаний оболочки и параметра волнообразования позволяют производить расчеты разомкнутый тонкостенных цилиндрических оболочек при параметре волнообразования больше 0,3, при проектировании таких конструкций.

***Ключевые слова***: разомкнутая тонкостенная цилиндрическая оболочка, собственные колебания, присоединенная масса.

*DOI*: 10.37972/chgpu.2020.43.1.003

*УДК*: 692.45

Тонкостенные конструкции разомкнутых цилиндрических оболочек представляют обширный класс объектов, используемых в машиностроительной, строительной,

© Добрышкин А. Ю., Сысоев О. Е., Сысоев Е. О., Лин Тхет, 2020
*Добрышкин Артем Юрьевич*
`e-mail:` wwartem21@mail.ru, старший преподаватель, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.
*Сысоев Олег Евгеньевич*
`e-mail:` fks@knastu.ru, доктор технических наук, профессор, декан, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.
*Сысоев Евгений Олегович*
`e-mail:` jonpochta@mail.ru, кандидат экономических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.
*Лин Тхет*
`e-mail:` Lin1234@mail.ru, аспирант, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Поступила 24.01.2020

ракетно-космической, нефтяной и других отраслях. Такие объекты имеют различные конфигурации и иногда наибольшую кривизну разомкнутой оболочки. Зачастую трудно выбрать, согласно какой теории проводить расчет разомкнутых оболочек — изогнутых пластин. Эксплуатация таких конструкций подразумевает значительные динамические нагрузки, усиливающиеся наличием различных изгибных форм колебаний, которые зачастую сложно определить. Как следствие, появляются значительные внутренние динамические напряжения, а также присутствуют резонансные процессы, приводящие к потере устойчивости, прочности и надежности аппаратов, машин и конструкций. Данное обстоятельство заставляет многих ученых, инженеров, конструкторов, проектировщиков заниматься проблемами динамики оболочечных систем различных типов и конфигураций. Подобного рода задачи носят нелинейный характер, а их решение позволяет очень точно описать колебательные процессы, что позволяет эффективнее использовать несущую способность конструкций, сводя эффект наличия различных изгибных форм внутренних колебаний к минимуму, либо использовать их для увеличения несущей способности.

Широкое использование оболочек в строительстве и машиностроении обусловлено простотой изготовления и высокой эффективностью, с точки зрения прочности и оптимальной геометрической формы оболочек. Возникновение вынужденных колебаний от интенсивных динамических нагрузок при эксплуатации таких конструкций не ограничивает эксплуатацию разомкнутых оболочек, лежащих на упругом основании. Явления данного рода зачастую сопровождаются влиянием присоединенной массы к оболочке. Данное обстоятельство изучено не полностью, а эксплуатация разомкнутых оболочек продолжается. Поэтому иногда происходят разрушения, несмотря на большие запасы прочности (Кз = 1,4 по снеговой нагрузке, Кз = 1,1 по ветровой нагрузке), что вызывает повышенный интерес к анализу динамики тонких разомкнутых оболочек [1, 2, 3, 4].

В настоящее время нет точного описания механизма колебаний разомкнутых цилиндрических оболочек, несущих присоединенную массу. При проектировании конструкций в соответствии с нормативными требованиями современных сводов правил, технических регламентов и других руководящих документов для проектирования оболочечных конструкций случаются аварии, так как при эксплуатации объектов не запланированы мероприятия, препятствующие колебаниям конструкций, возникшим в результате наличия присоединенной массы.

Для исследования влияния присоединенной массы на колебания разомкнутой цилиндрической тонкостенной оболочки в лаборатории строительных конструкций КнАГУ проведены экспериментальные исследования, цель которых — определить частотные характеристики этого процесса. Опытный образец, находящийся в испытательном стенде с малой присоединенной массой (рис. 1), подвергался действию кратковременной нагрузки для возбуждения вынужденных колебаний.

В результате исследования вынужденных колебаний тонкой прямоугольной в плане разомкнутой оболочки, с двух сторон опирающейся на упругое основание, получены уравнения колебаний оболочки, отражающие зависимость влияния присоединенной массы на численные характеристики собственных частот колебаний оболочки. Колебания с умеренными амплитудами вынужденных колебаний были разложены согласно уравнениям [5, 6]

$$D_1\overline{W}_{\overline{xxxx}} + 2D_3\overline{W}_{\overline{xxyy}} + D_2\overline{W}_{\overline{yyyy}} + \rho\overline{W}_n + C\overline{W} = 0.$$

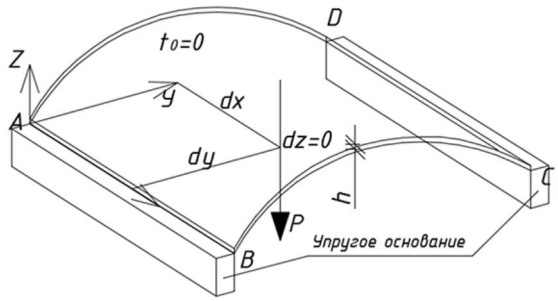


Рис. 1. Образец оболочки

Дискретная нелинейная модель колебаний тонкой оболочки, защемленной по краям, полученная при проведении исследований, исследовалась с применением метода многих масштабов.

Образец представляет собой разомкнутую оболочку, прямоугольную в плане, из оцинкованной стали Ст0. Геометрические характеристики объекта: $L = 890$ мм, $B = 370$ мм, $H = 0{,}4$ мм. Схема проведения эксперимента изображена на рис. 2.

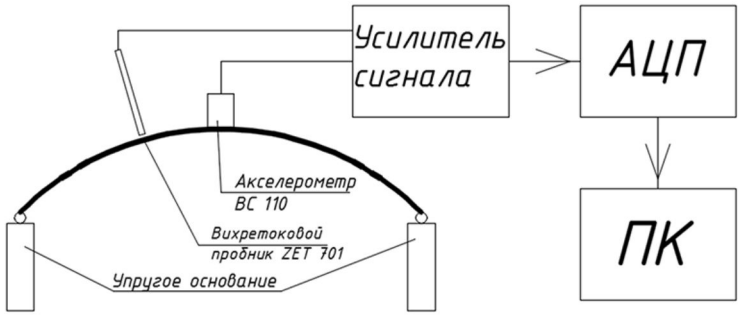


Рис. 2. Блок-схема экспериментальной установки

Модель оболочки закрепляется в стальном стенде. Данный стенд имеет форму столика, изготовленного из равнополочных уголков, в местах касания оболочки выполнено керамическое покрытие специально для проведения данного эксперимента. Граничные условия максимально приближены к реальным [7, 8, 9, 10]. Присоединенную массу представляет акселерометр ВС110, расположенный на образце согласно рис. 2. Акселерометр ВС110 измеряет частоту колебаний с максимальной точностью. Акселерометр ВС110 передаёт показания на усилитель сигнала, который, усиливая сигнал, передаёт далее на аналого-цифровой преобразователь, далее на персональный компьютер. Вихретоковой пробник ZET 701 расположен максимально близко к оболочке, но не касается её, передаёт показания на программное обеспечении “Z-lab”, где вкупе с данными колебаний отражается зависимости одних параметров от других в режиме реального времени. Нагревательный элемент создаёт градиент температур.

Эксперимент направлен на изучение собственных колебаний пластины в “покое” и выявление зависимостей вынужденных и собственных колебаний от влияния присоединенной массы или системы масс. Вынужденные колебания, переходя в собственные колебания, задавались с помощью удара испытательным молотком AU03 [11, 12, 13, 14, **?**]. Также присутствовал бесконтактный датчик измерения колебаний пластины, не отображенный на схеме. Данный датчик является проверяющим, служит для проверки и отбраковки ошибочных данных показаний акселерометра BC110.

Рассмотрим математическую модель собственных колебаний ортотропной прямоугольной изогнутой пластины ($-a/2 \le \overline{x} \le a/2$, $-b/2 \le \overline{y} \le b/2$) [**?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**] со свободными краями, лежащей на упругом основании Винклера–Фусса.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания ортотропной пластины, выглядит следующим образом:

$$D_1\overline{W}_{\overline{xxxx}} + 2D_3\overline{W}_{\overline{xxyy}} + D_2\overline{W}_{\overline{yyyy}} + \rho\overline{W}_n + C\overline{W} = 0,$$

где

$$D_1 = \frac{E_1h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}, \quad D_3 = D_1\nu_2 + \frac{Gh^3}{6};$$

$C$ — коэффициент постели; $D_1$, $D_2$ — цилиндрические жесткости в направлении осей $\overline{x}$ и $\overline{y}$; $D_3$ — крутильная жесткость; $E_1$, $E_2$ — модуль упругости в направлении осей $\overline{x}$ и $\overline{y}$; $G$ — модуль сдвига; $\nu_1$, $\nu_2$ — коэффициенты Пуассона в направлениях $\overline{x}$ и $\overline{y}$.

После разделения временных и пространственных переменных ($W = W(x,y)T(t)$) и обезразмеривания дифференциальное уравнение примет следующий вид:

$$W_{xxxx} + 2\alpha_3W_{xxyy} + \alpha_2W_{yyyy} - \lambda W = 0,$$

где $\alpha_2 = D_2/D_1$, $\alpha_3 = D_3/D_1$, $\lambda = b^4(\overline{m}\theta^2 - c)/D_1$.

Добавим к дифференциальному уравнению граничные условия:

$$W_{xxx} + (2-\nu_1)W_{yyx} = 0, \quad (1-\varepsilon)W_x \pm k\varepsilon(W_{xx} + \nu_1W_{yy}) = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0{,}5k;$$

$$W_{yyy} + (2-\nu_2)W_{xxy} = 0, \quad (1-\varepsilon)W_y \pm \varepsilon(W_{yy} + \nu_2W_{xx}) = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0{,}5.$$

Собственное число и собственную форму представляем в виде рекурсивной формулировки теории возмущений (РТВ) [**?**, **?**, **?**, **?**]. Подставляя эти ряды в дифференциальное уравнение и граничные условия и расщепляя по степеням $\varepsilon$, получаем рекуррентную последовательность краевых задач:

$$W_{0xxx} + 2\alpha_3W_{0xxyy} + \alpha_2W_{0yyyy} - \lambda_0W_0 = 0,$$

$$W_{0x} = 0, \quad W_{0xxx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0{,}5k, \quad W_{0y} = 0, \quad W_{0yyy} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0{,}5,$$

$$W_{jxxxx} + 2\alpha_3W_{jxxyy} + \alpha_2W_{jyyyy} - \lambda_0W_j = \sum_{i=1}^{j}\lambda_iW_{j-i},$$

$$W_{jxxx} + (2-\nu_1)W_{jyyx} = 0, \quad W_{jx} = \varepsilon k\sum_{i=0}^{j-1}(W_{ixx} + \nu_1W_{iyy}) \quad \text{при} \quad x = \pm 0{,}5k,$$

$$W_{jyyy} + (2-\nu_2)W_{jxxy} = 0, \quad W_{jy} = \varepsilon\sum_{i=0}^{j-1}(W_{iyy} + \nu_2W_{ixx}) \quad \text{при} \quad y = \pm 0{,}5.$$

В нулевом приближении:

$$\lambda_0 = \pi^4 \left[ \frac{m^4}{k^4} + 2\alpha_3 n^2 \frac{m^2}{k^2} + \alpha_2 n^4 \right],$$

$$W_0 = X_0 Y_0 = \left\{ \begin{array}{c} \sin \pi n y \\ \cos \pi n y \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sin \dfrac{\pi m}{k} x, \quad n, m = 3, 5, 7, ... \\ \hline \cos \dfrac{\pi m}{k} x, \quad n, m = 2, 4, 6, ... \end{array} \right\}.$$

Построение дальнейших приближений подробно рассмотрим для центрально симметричных форм колебаний. При этом $n, m = 3, 5, 7, \ldots$ . Краевая задача первого приближения такова:

$$W_{1xxxx} + 2\alpha_3 W_{1xxyy} + \alpha_2 W_{1yyyy} - \lambda_0 W_1 = \lambda_2 \sin \pi n y \sin \frac{\pi m}{k} x;$$

$$W_{1xxx} + (2 - \nu_1) W_{yyx} = 0,$$

$$W_{1x} = \pm k^2 \pi^2 \left( \frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin \pi n y \quad \text{при} \quad x = \pm 0{,}5k;$$

$$W_{1yyy} + (2 - \nu_2) W_{1xxy} = 0,$$

$$W_{1y} = \pm \pi^2 \left( n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right) (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{\pi m}{k} x \quad \text{при} \quad y = \pm 0{,}5.$$

Решение краевой задачи ищем в виде

$$W_1 = X_1(x) \sin \pi n y + Y_1(y) \sin \pi \frac{m}{k} x, \quad \lambda_1 = \lambda_{1x} + \lambda_{1y}.$$

Подставляя выражения в дифференциальное уравнение и граничные условия, имеем две одномерные задачи:

$$X_1^{\mathrm{IV}}(x) + 2\alpha_3 \pi^2 n^2 X_1^{\mathrm{II}}(x) - \pi^4 \left[ \frac{m^4}{k^4} + 2\alpha_3 n^2 \frac{m^2}{k^2} \right] X_1(x) = \lambda_{1x} \sin \frac{\pi m}{k};$$

$$X_1^{\mathrm{I}}(x) = \pm k n^2 \left( \frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{при} \quad x = \pm 0{,}5k;$$

$$X_1^{\mathrm{III}}(x) - \pi^2 n^2 (2 - \nu_1) X_1^{\mathrm{I}}(x) = 0;$$

$$Y_1^{\mathrm{IV}}(y) + 2\alpha_3 \pi^2 Y_1^{\mathrm{II}}(y) - \pi^4 \left[ 2\alpha_3 n^2 \frac{m^2}{k^2} + n^4 \right] Y_1(y) = \lambda_{1y} \sin \pi n y;$$

$$Y_1^{\mathrm{I}}(y) = \pm \pi^2 \left( n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{при} \quad y = \pm 0{,}5;$$

$$Y_1^{\mathrm{I}}(y) - \pi^2 \frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2) Y_1^{\mathrm{I}}(y) = 0.$$

После построения условий разрешимости приводим окончательные выражения:

$$\lambda_{1x} = 4\pi^4 \left( \frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right) \left[ n^2 (2 - \nu_1 - 2\alpha_3) - \frac{m^2}{k^2} \right],$$

$$\lambda_{1y} = 4\pi^4 \left( n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right) \left[ \frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2 - 2\alpha_3) - n^2 \right].$$

Теперь находим первую поправку к собственной форме $W_1$:

$$W_1 = \frac{\pi\left(\frac{m^2}{k^2}+\nu_1 n^2\right)}{\left(\frac{m^2}{k^2}+\alpha_3 n^2\right)}\left[\frac{k\left\{\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(-1)^{\frac{m}{2}}}\right\}\left(n^2(2-\nu_1)+\frac{m^2}{k^2}\right)}{2\beta_2\left\{\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\beta_2 k}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\beta k}\right\}}\left\{\frac{\operatorname{sh}\pi\beta_2 x}{\operatorname{ch}\pi\beta_2 x}\right\}-\right.$$

$$\left.-(-1)^m\frac{k}{m}\left(n^2(2-\nu_2-2\alpha_3)-\frac{m^2}{k^2}\right)x\left\{\frac{\cos\frac{\pi m}{k}x}{\sin\frac{\pi m}{k}x}\right\}\right]\left\{\frac{\sin\pi n y}{\cos\pi n y}\right\}+$$

$$+\frac{\pi\left(n^2+\nu_2\frac{m^2}{k^2}\right)}{\left(n^2+\alpha_3\frac{m^2}{k^2}\right)}\left[\frac{\left\{\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(-1)^{\frac{n}{2}}}\right\}\left(\frac{m^2}{k^2}(2-\nu_2)n^2\right)}{2\beta_1\left\{\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\beta_1}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\beta_1}\right\}}\left\{\frac{\operatorname{sh}\pi\beta_1 y}{\operatorname{ch}\pi\beta_1 y}\right\}-\right.$$

$$\left.-(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{m^2}{k^2}(2-\nu_2-2\alpha_3)-n^2\right)y\left\{\frac{\cos\pi n y}{\sin\pi n y}\right\}\right]\left\{\frac{\sin\frac{\pi m}{k}x}{\cos\frac{\pi m}{k}x}\right\},$$

$$\left\{\frac{n,m=1,3,5,...}{n,m=2,4,6,...}\right\}.$$

Рассматривая второе приближение, определяем:

$$\lambda_{2x}=4\pi^4\left[n^2(2-\nu_1-2\alpha_3)-\frac{m^2}{k^2}\right]\left\{\left(\frac{m^2}{k^2}+\nu_1 n^2\right)-\left\{\frac{\left(\frac{m^2}{k^2}+\nu_1 n^2\right)}{\left(\frac{m^2}{k^2}+\alpha_3 n^2\right)}\times\right.\right.$$

$$\times\left[\frac{\pi k}{2}\left(n^2(2-\nu_1)+\frac{m^2}{k^2}\right)^2\operatorname{cth}^{(-1)^m}\frac{\pi}{2}\beta_2-2\left(n^2(2-\nu_1-2\alpha_3)-\frac{m^2}{k^2}\right)\right]-$$

$$-2\nu_1\frac{\left(n^2+\nu_2\frac{m^2}{k^2}\right)}{\left(n^2+\alpha_3\frac{m^2}{k^2}\right)}\left(\frac{m^2}{k^2}(2-\nu_2-2\alpha_3)-n^2\right)-\frac{\left(n^2+\nu_2\frac{m^2}{k^2}\right)}{\left(n^2+\alpha_3\frac{m^2}{k^2}\right)}\times$$

$$\times\left[\frac{\left(\frac{m^2}{k^2}(2-\nu_1)+n^2\right)\left(\frac{m^2}{k^2}(1-2\nu_1\alpha_3)-n^2\right)}{\left(n^2+\alpha_3\frac{m^2}{k^2}\right)}+\right.$$

$$+\ \frac{1}{2n^2}\left(\frac{m^2}{k^2}(2-\nu_2-2\alpha_3)-n^2\right)\left(\frac{m^2}{k^2}+\nu_1 n^2\right)\Bigg]\Bigg\}-$$

$$-\ \frac{\lambda_1}{2}\frac{\left(\frac{m^2}{k^2}+\nu_1 n^2\right)}{\left(n^2+\alpha_3\frac{m^2}{k^2}\right)}\left\{k\frac{\left(n^2(2-\nu_1)+\frac{m^2}{k^2}\right)}{\left(\frac{m^2}{k^2}+\alpha_3 n^2\right)}+\frac{1}{n^2}\left(\frac{m^2}{k^2}(2-\nu_2 2\alpha_3)-n^2\right)\right\}\Bigg\};$$

$$\left(\lambda_{2y};\frac{m^2}{k^2};n^2;\nu_1;\nu_2;\beta_1\right)\to\left(\lambda_{2x};\frac{m^2}{k^2};n^2;\nu_1;\nu_2;\beta_2\right).$$

В изотропном случае ($D_1=D_2=D_3=D$, $\nu_1=\nu_2=\nu$) выражения для $\lambda$ и $W$ примут вид:

$$\lambda=\pi^4\left(n^2+\frac{m^2}{k^2}\right)^2-4\pi^4(1+\nu)\left(n^2+\frac{m^2}{k^2}\right)\varepsilon+(\lambda_{2x}+\lambda_{2y})\varepsilon^2+\ldots;$$

$$W=\left\{\frac{\sin\pi ny\sin\frac{\pi m}{k}x}{\cos\pi ny\cos\frac{\pi m}{k}x}\right\}+$$

$$+\frac{\pi}{\left(n^2+\frac{m^2}{k^2}\right)}\left\{\frac{k\left\{\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(-1)^{\frac{m}{2}}}\right\}\left(n^2(2-\nu)+\frac{m^2}{k^2}\right)}{2\beta_2\left\{\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\beta_2 k}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\beta_2 k}\right\}}\left\{\frac{\operatorname{sh}\pi\beta_2 x}{\operatorname{ch}\pi\beta_2 x}\right\}+\right.$$

$$\left.+(-1)^m\frac{k}{m}\left(\nu n^2+\frac{m^2}{k^2}\right)x\left\{\frac{\cos\frac{\pi m}{k}x}{\sin\frac{\pi m}{k}x}\right\}\right\}\left\{\frac{\sin\pi ny}{\cos\pi ny}\right\}+$$

$$+\left(n^2+\frac{m^2}{k^2}\right)\left[\frac{\left\{\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(-1)^{\frac{n}{2}}}\right\}\left(\frac{m^2}{k^2}(2-\nu)+n^2\right)}{\left\{\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\beta_1}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\beta_1}\right\}}\left\{\frac{\operatorname{sh}\pi\beta_1 y}{\operatorname{ch}\pi\beta_1 y}\right\}+\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{1}{n}\left(n^2+\nu\frac{m^2}{k^2}\right)y\left\{\frac{\cos\pi ny}{\sin\pi ny}\right\}\right]\left\{\frac{\sin\frac{\pi m}{k}x}{\cos\frac{\pi m}{k}x}\right\}\varepsilon+\ldots,$$

$$\lambda_{2x} = 8\pi^4(1+\nu)\left(\nu n^2 + \frac{m^2}{k^2}\right)\left[\frac{k}{2}\frac{\left(n^2(2-\nu)+\dfrac{m^2}{k^2}\right)}{n^2+\dfrac{m^2}{k^2}} - \frac{m^2}{k^2}\left(\frac{m^2}{k^2}+\nu n^2\right)\right] -$$

$$-4\pi^4\left(\frac{m^2}{k^2}+\nu n^2\right)^2 + 8\pi^4\frac{\left(\dfrac{m^2}{k^2}+\nu n^2\right)}{\left(n^2+\dfrac{m^2}{k^2}\right)}\left\{\left(\frac{m^2}{k^2}+\nu n^2\right)\times\right.$$

$$\times\left[\frac{k\left(n^2(2-\nu)+\dfrac{m^2}{k^2}\right)}{2\beta_2}\operatorname{cth}\frac{\pi\beta_2 k}{2} + 2\left(\nu n^2+\frac{m^2}{k^2}\right)\right] +$$

$$+2\nu\left(n^2+\nu\frac{m^2}{k^2}\right) + \nu\left(n^2+\nu\frac{m^2}{k^2}\right)\times$$

$$\left.\times\left[\frac{\left(\dfrac{m^2}{k^2}(2-\nu)+n^2\right)\left(\dfrac{m^2}{k^2}(1-2\nu)+n^2\right)}{\left(\dfrac{m^2}{k^2}+n^2\right)} + \frac{\left(\nu n^2+\dfrac{m^2}{k^2}\right)\left(n^2+\nu\dfrac{m^2}{k^2}\right)}{2n^2}\right]\right\};$$

$$\left(\lambda_{2y};\frac{m^2}{k^2};n^2;\beta_2\right) \to \left(\lambda_{2x};\frac{m^2}{k^2};n^2;\beta_1\right).$$

Проведем сравнение результатов первого собственного числа колебаний свободной квадратной изотропной пластины с другими методами определения колебаний (рис. 3).

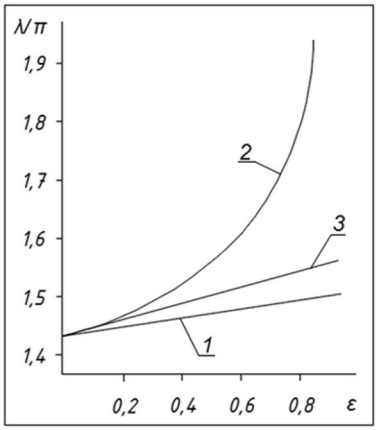


Рис. 3. Первое собственное число для квадратной в плане разомкнутой оболочки на упругом основании: 1 — данные, полученные с помощью рекурсивной формулировки теории возмущений; 2 — данные, полученные с помощью аппроксимации Паде; 3 — экспериментальные данные

Аппроксимации Паде отрезка ряда имеет вид

$$\lambda_{[\frac{1}{1}]}(\varepsilon) = \frac{a_0 + a_1\varepsilon}{1 + b_1\varepsilon}.$$

Первое собственное число задачи при $\nu = 1/6$, полученное при помощи аппроксимации Паде, равно $\lambda = (1{,}100\pi)^4$. Для $\nu = 0{,}3$ аппроксимация Паде дает $\lambda = (1{,}1198\pi)^4$. Нулевое приближение рекурсивной формулировки теории возмущений и аппроксимации Паде при $\varepsilon = 1$ соответственно дают верхнюю и нижнюю оценки собственных чисел задачи.

**Вывод.** Полученная модель имеет более лучшее совпадение с экспериментальными данными для разомкнутых тонкостенных цилиндрических оболочек с присоединенной массой при шарнирном опирании, когда значение параметра волнообразования больше 0,3, и может использоваться конструкторами при проектировании разомкнутых оболочечных конструкций.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. Москва, Ленинград: Гостехиздат, 1949. 784 с.

[2] Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев: Наукова думка, 1984. 220 с.

[3] Антуфьев Б. А. Колебания неоднородных тонкостенных конструкций: монография. Москва: Изд-во МАИ, 2011. 176 с.

[4] Гемпел К. А. Справочник по редким металлам: пер. с англ. Москва: Мир, 1965. 946 с.

[5] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Naing N. S. Nonlinear Oscillations of Elastic Curved Plate Carried to the Associated Masses System // In: International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety (ICCATS 2017), 21-22 September 2017, Chelyabinsk, Russian Federation. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 262. 012055 doi:10.1088/1757-899X/262/1/012055.

[6] Сысоев О. Е., Добрышкин А. Ю., Нейн С. Н. Влияние присоединенной массы на вынужденные колебания разомкнутых оболочек // Ученые записки КнАГТУ. 2016. № 3. С. 110–116.

[7] Современные испытательные стенды для бесконтактного исследования свободных колебаний замкнутых и разомкнутых цилиндрических оболочек / О. Е. Сысоев, А. Ю. Добрышкин, С. Н. Нейн [и др.] // Ученые записки КнАГТУ. 2017. № 1. С. 110–118.

[8] Сысоев О. Е., Добрышкин А. Ю., Нейн С. Н. Влияние присоединенной массы и температурного сдвига на собственные колебания тонких пластин (мембран) // Ученые записки КнАГТУ. 2017. № 2. С. 105–111.

[9] Сысоев О. Е., Добрышкин А. Ю., Нейн С. Н. Влияние величины присоединенной массы на вынужденные колебания разомкнутых оболочек из алюминиевого сплава Д19 // Ученые записки КнАГТУ. 2017. № 4. С. 100–106.

[10] Сысоев О. Е., Добрышкин А. Ю., Нейн С. Н. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98.

[11] Investigation on inconsistency of theoretical solution of thermal buckling critical temperature rise for cylindrical shell / Z. Wang, Q. Han, D. H. Nash et al. // Thin-Walled Structures. 2017. no. 119. P. 438–446.

[12] Research of the influence of the location of the joint mass on the forced vibration of a thin-contained extenced shell / A. Y. Dobryshkin, O. E. Sysoev, S. N. Nain et al. // International scientific conference “Far East Con”.

[13] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Baenhaev A. V. Investigation to the location influence of the unified mass on the formed vibrations of a thin containing extended shell // Materials Science Forum. 2019. Vol. 945. P. 885–892.

[14] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y. Natural vibration of a thin desing with an added mass as the vibrations of a cylindrical shell and curved batten // Jornal of Heilongjiang university of science and technology. 2018. Vol. 28, no. 1. P. 75–78.

[15] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nain S. N. Curved plate carried to the associated masses system // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2017. p. 262.

[16] Free and forced vibration analysis of uniform and stepped circular cylindrical shells using a domain decomposition method / Y. Qu, Y. Chen, X. Long et al. // Applied Acoustics. 2013. Vol. 74, no. 3. P. 425–439.

[17] Qu Y., Hua H., Meng G. A domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries // Composite Structures. 2013. Vol. 95. P. 307–321.

[18] Xing Y., Liu B., Xu T. Exact solutions for free vibration of circular cylindrical shells with classical boundary conditions // International Journal of Mechanical Sciences. 2013. Vol. 75. P. 178–188.

[19] Free and forced vibration of ring-stiffened conical-cylindrical shells with arbitrary boundary conditions / M. Chen, K. Xie, W. Jia et al. // Ocean Engineering. 2015. Vol. 108. P. 241–256.

[20] The influence on modal parameters of thin cylindrical shell under bolt looseness boundary / H. Li, M. Zhu, Z. Xu et al. // Shock and Vibration. 2016. Vol. 2016. Article ID 4709257, 15 pages.

[21] Foster N., Fernández-Galiano L. Norman Foster in the 21st Century. AV Monografias. S.L.: Artes Gráficas Palermo, 2013.

[22] Eliseev V. V., Moskalets A. A., Oborin E. A. One-dimensional models in turbine blades dynamics // Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2016. Vol. 9. P. 93–104.

[23] Hautsch N., Okhrin O., Ristig A. Efficient iterative maximum likelihood estimation of highparameterized time series models. Berlin: Humboldt University, 2014. 34 p. (SFB 649 Discussion Paper; 2014-010).

[24] Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Статическое и динамическое поведение пологих оболочек под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий // Труды МАИ. 2015. № 82. http://mai.ru//upload/iblock/31c/belostochnyy_myltsina-rus.pdf.

[25] Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя / Е. Л. Кузнецова, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков [и др.] // Труды МАИ. 2013. № 71. http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=46621 (дата публикации 26.12.2013).

*A. Yu. Dobryshkin, O. E. Sysoev, E. O. Sysoev, Lin Thet*

## SIMULATION OF FORCED OSCILLATIONS OF AN OPEN SHELL WITH A SMALL ATTACHED MASS, WITH A HINGE SUPPORT, BY THE METHOD OF PADE APPROXIMATION

*Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

***Abstract.*** The paper presents a refined mathematical model of forced oscillations of an open shell with a small attached mass at a hinge support. Hinge support is considered as the most frequently used. The equations are composed in a linear formulation, solved by asymptotic methods, using Pade approximations. Experimental studies were carried out, a test stand and samples were made for this purpose, and a program of experiments was developed. Comparison of theoretical and experimental data it is less than 5%, which indicates a high reliability of the refined mathematical model. The obtained dependences of the shell oscillation frequency and the wave formation parameter make it possible to calculate the open-ended thin-walled cylindrical shells with a wave formation parameter greater than 0.3, when designing such structures.

***Keywords***: open thin-walled cylindrical shell, natural vibrations, attached mass.

## REFERENCES

[1] Vlasov V. Z. General theory of shells and its application in engineering. Moscow, Leningrad: Gostehizdat, 1949. 784 p. (in Russian).

[2] Kubenko V. D., Kovalchuk P. S., Krasnopolskaja T. S. Nonlinear interaction of forms of bending vibrations of cylindrical shells. Kiev: Naukova dumka, 1984. 220 p. (in Russian).

[3] Antufjev B. A. Vibrations of inhomogeneous thin-walled structures: monograph. Moscow: Izd-vo MAI, 2011. 176 p. (in Russian).

[4] Hempel K. A. Handbook of rare metals: transl. Moscow: Mir, 1965. 946 p. (in Russian).

[5] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nain S. N. Nonlinear Oscillations of Elastic Curved Plate Carried to the Associated Masses System // In: International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety (ICCATS 2017), 21-22 September 2017, Chelyabinsk, Russian Federation. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 262. 012055 doi:10.1088/1757-899X/262/1/012055.

[6] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nain S. N. Effect of the attached mass on forced oscillations of open shells // Scientific notes of KnAGTU. 2016. no. 3. P. 110–116. (in Russian).

[7] Modern test benches for non-contact study of free oscillations of closed and open cylindrical shells / O. E. Sysoev, A. Y. Dobryshkin, S. N. Nain et al. // Scientific notes of KnAGTU. 2017. no. 1. P. 110–118. (in Russian).

[8] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nain S. N. The effect of the attached mass and temperature shift on the natural oscillations of thin plates (membranes) // Scientific notes of KnAGTU. 2017. no. 2. P. 105–111. (in Russian).

---

*Dobryshkin Artem Yurjevich*, Senior Lecturer, Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

*Sysoev Oleg Evgenyevich*, Doctor of Engineering, Professor, Dean, Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

*Sysoev Evgeniy Olegovich*, Candidate of economic Sciences, Associate Professor, Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

*Lin Thet*, Post-graduate student, Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

[9] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nain S. N. The effect of the attached mass on the forced oscillations of open shells made of aluminum alloy D19 // Scientific notes of KnAGTU. 2017. no. 4. P. 100–106. (in Russian).

[10] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nain S. N. Analytical and experimental study of free oscillations of open shells made of D19 alloy bearing a system of attached masses // Works of MAI. 2018. no. 98. (in Russian).

[11] Investigation on inconsistency of theoretical solution of thermal buckling critical temperature rise for cylindrical shell / Z. Wang, Q. Han, D. H. Nash et al. // Thin-Walled Structures. 2017. no. 119. P. 438–446.

[12] Research of the influence of the location of the joint mass on the forced vibration of a thin-contained extenced shell / A. Y. Dobryshkin, O. E. Sysoev, S. N. Nain et al. // International scientific conference “Far East Con”.

[13] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Baenhaev A. V. Investigation to the location influence of the unified mass on the formed vibrations of a thin containing extended shell // Materials Science Forum. 2019. Vol. 945. P. 885–892.

[14] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y. Natural vibration of a thin desing with an added mass as the vibrations of a cylindrical shell and curved batten // Jornal of Heilongjiang university of science and technology. 2018. Vol. 28, no. 1. P. 75–78.

[15] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nain S. N. Curved plate carried to the associated masses system // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2017. p. 262.

[16] Free and forced vibration analysis of uniform and stepped circular cylindrical shells using a domain decomposition method / Y. Qu, Y. Chen, X. Long et al. // Applied Acoustics. 2013. Vol. 74, no. 3. P. 425–439.

[17] Qu Y., Hua H., Meng G. A domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries // Composite Structures. 2013. Vol. 95. P. 307–321.

[18] Xing Y., Liu B., Xu T. Exact solutions for free vibration of circular cylindrical shells with classical boundary conditions // International Journal of Mechanical Sciences. 2013. Vol. 75. P. 178–188.

[19] Free and forced vibration of ring-stiffened conical-cylindrical shells with arbitrary boundary conditions / M. Chen, K. Xie, W. Jia et al. // Ocean Engineering. 2015. Vol. 108. P. 241–256.

[20] The influence on modal parameters of thin cylindrical shell under bolt looseness boundary / H. Li, M. Zhu, Z. Xu et al. // Shock and Vibration. 2016. Vol. 2016. Article ID 4709257, 15 pages.

[21] Foster N., Fernández-Galiano L. Norman Foster in the 21st Century. AV Monografias. S.L.: Artes Gráficas Palermo, 2013.

[22] Eliseev V. V., Moskalets A. A., Oborin E. A. One-dimensional models in turbine blades dynamics // Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2016. Vol. 9. P. 93–104.

[23] Hautsch N., Okhrin O., Ristig A. Efficient iterative maximum likelihood estimation of highparameterized time series models. Berlin: Humboldt University, 2014. 34 p. (SFB 649 Discussion Paper; 2014-010).

[24] Belostochnyj G. N., Myltsina O. A. Static and dynamic behavior of flat shells under the influence of rapid temperature-force effects // Works MAI. 2015. no. 82. http://mai.ru//upload/iblock/31c/belostochnyy_myltsina-rus.pdf. (in Russian).

[25] Effect of non-stationary distributed load on the surface of the elastic layer / E. L. Kuznetsova, D. V. Tarlakovskij, G. V. Fedotenkov et al. // Works MAI. 2013. no. 71. http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=46621 (date of publication 26.12.2013). (in Russian).