

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОГО СДВИГА

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия

Аннотация. В статье рассмотрены уравнения анизотропной теории пластического течения в пространственном случае. На основе группы непрерывных преобразований, допускаемой системой, построено инвариантное решение. В случае однородного напряженного состояния найдено новое поле скоростей. Это поле имеет функциональный произвол.

Ключевые слова: упругопластическая задача, сложный сдвиг, законы сохранения.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.007

УДК: 539.374

Введение. В работе решена упругопластическая задача о напряженном состоянии в условиях сложного сдвига в теле ослабленном отверстием, ограниченном кусочно гладким контуром. В статье приведены законы сохранения, которые позволили свести вычисления компонент тензора напряжений к криволинейному интегралу по контуру отверстия. Законы сохранения позволили найти границу между упругой и пластической областями.

Постановка задачи. Напряженное состояние сложного сдвига возникает в цилиндрическом теле бесконечной длины под действием нагрузок, направленных по образующим цилиндра и постоянным вдоль образующих [1]. При этом при достаточно большой нагрузке в теле возникают как упругие, так и пластические зоны. Как и в любой задаче подобного рода возникает необходимость в нахождении заранее неизвестной границы, разделяющей упругую и пластическую зоны. Отыскание такой границы не простая задача, но специфика упругопластических задач о сложном сдвиге состоит в том, что решение подобных задач проще, чем решение аналогичных упругих задач. По-видимому, впервые этот факт отметил Г.П. Черепанов [1].

© Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., 2020

Сенашов Сергей Иванович

e-mail: sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Савостьянова Ирина Леонидовна

e-mail: savostyanova@sibsau.ru, кандидат педагогических наук, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Поступила 20.01.2020

Упругопластическим задачам о сложном сдвиге (антиплоской деформации) посвящена обширная литература, ее обзор можно увидеть, например, в [1]. Во всех статьях, в которых решаются задачи о сложном сдвиге, существенно используют представление напряжений и смещений в упругой зоне в комплексном виде. В предлагаемой работе решены задачи о сложном сдвиге решена с помощью законов сохранения.

1. Основные соотношения. Поля смещений и напряжений в рассматриваемом случае таковы [1]:

$$\begin{aligned} u = v = 0, w = w(x, y), \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = \tau^1(x, y), \tau_{yz} = \tau^2(x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u, v, w – компоненты вектора смещения, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – компоненты тензора напряжений, x, y, z – декартовы координаты, ось z направлена параллельно образующей.

В упругой зоне имеют место соотношения

$$\frac{\partial \tau^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau^2}{\partial y} = 0 \text{ (уравнение равновесия)}, \quad (2)$$

$$\tau^1 = G \frac{\partial w}{\partial x}, \tau^2 = G \frac{\partial w}{\partial y} \text{ (закон Гука)}. \quad (3)$$

Здесь G – постоянная, называемая модулем сдвига.

Из (2), (3) следуют соотношения в упругой зоне

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tau^1}{\partial y} = \frac{\partial \tau^2}{\partial x}. \quad (5)$$

Из (2) и (5) следует, что τ^1, τ^2 удовлетворяют уравнениям Коши-Римана

$$F_1 = \frac{\partial \tau^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau^2}{\partial y} = 0, F_2 = \frac{\partial \tau^1}{\partial y} - \frac{\partial \tau^2}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

В пластической области имеет место соотношение (2), а также

$$(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 = k^2 \text{ (условие текучести)}. \quad (7)$$

$$\tau^2 \frac{\partial w}{\partial x} = \tau^1 \frac{\partial w}{\partial y} \text{ (закон Генки)}. \quad (8)$$

Здесь k – постоянная, равная пределу текучести при чистом сдвиге.

На границе упругой и пластической областей предполагается непрерывными напряжения и смещения.

2. Законы сохранения. Законом сохранения для системы уравнений (6) назовем соотношение вида

$$\frac{\partial A(x, y, \tau^1, \tau^2)}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y, \tau^1, \tau^2)}{\partial y} = \omega^1 F_1 + \omega^2 F_2, \quad (9)$$

где $\omega^i = \omega^i(x, y, \tau^1, \tau^2)$ – некоторые функции одновременно не равные тождественно нулю.

Замечание. С более общим определением законов сохранения и их использованием в механике деформируемого твердого тела можно ознакомиться, например, в [2–4]. Для тех целей, которые поставлены в статье, вполне подойдет упрощенная формулировка

в виде (9).

В случае (9), величины A, B называются компонентами сохраняющегося тока.

Предположим, что компоненты A, B имеют следующий вид

$$A = \alpha^1 \tau^1 + \beta^1 \tau^2 + \gamma^1, B = \alpha^2 \tau^1 + \beta^2 \tau^2 + \gamma^2, \quad (10)$$

где $\alpha^i = \alpha^i(x, y), \beta^i = \beta^i(x, y), \gamma^i = \gamma^i(x, y)$ – некоторые гладкие функции, подлежащие определению.

Подставим (10) в (9), в результате получаем

$$\begin{aligned} & \alpha_x^1 \tau^1 + \alpha^1 \tau_x^1 + \beta_x^1 \tau^2 + \beta^1 \tau_x^2 + \gamma_x^1 + \alpha_y^2 \tau^1 + \alpha^2 \tau_y^1 + \beta_y^2 \tau^2 + \beta^2 \tau_y^2 + \gamma_y^2 = \\ & = \omega^1 (\tau_x^1 + \tau_y^2) + \omega^2 (\tau_y^1 - \tau_x^2) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где индекс внизу означает производную по соответствующей переменной.

Из (11) получаем

$$\alpha^1 = \omega^1, \beta^1 = -\omega^2, \alpha^2 = \omega^2, \beta^2 = \omega^1, \alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = 0. \quad (12)$$

Из (12), исключая ω^i получаем

$$\alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = 0. \quad (13)$$

В силу соотношений (12) компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A = \alpha^1 \tau^1 + \beta^1 \tau^2 + \gamma^1, B = -\beta^1 \tau^1 + \alpha^1 \tau^2 + \gamma^2. \quad (14)$$

Поскольку правая часть (9) равна нулю, то по формуле Грина получаем

$$\begin{aligned} & \iint_S (A_x + B_y) dx dy = \int_{\partial S} A dy - B dx = \\ & = \int_{\partial S} (\alpha^1 \tau^1 + \beta^1 \tau^2 + \gamma^1) dy - (-\beta^1 \tau^1 + \alpha^1 \tau^2 + \gamma^2) dx = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Где S – область, ∂S – ее кусочно гладкая граница. Все функции, входящие в (15), предполагаются гладкими.

3. Упруго пластическая задача для произвольного отверстия в случае, когда пластическая область охватывает все отверстие. Пусть C – кусочно гладкий контур; к нему приложена нагрузка

$$l^1 \tau^1 + l^2 \tau^2 = \tau_n, |\tau_n| \leq k, \quad (16)$$

где (l^1, l^2) – компоненты вектора нормали к контуру C . Контур пластической области L полностью охватывает отверстие C . (см. рисунок 1.) В этом случае на контуре C , кроме условия (16) выполняется и условие текучести (7). Таким образом на C имеют место два условия:

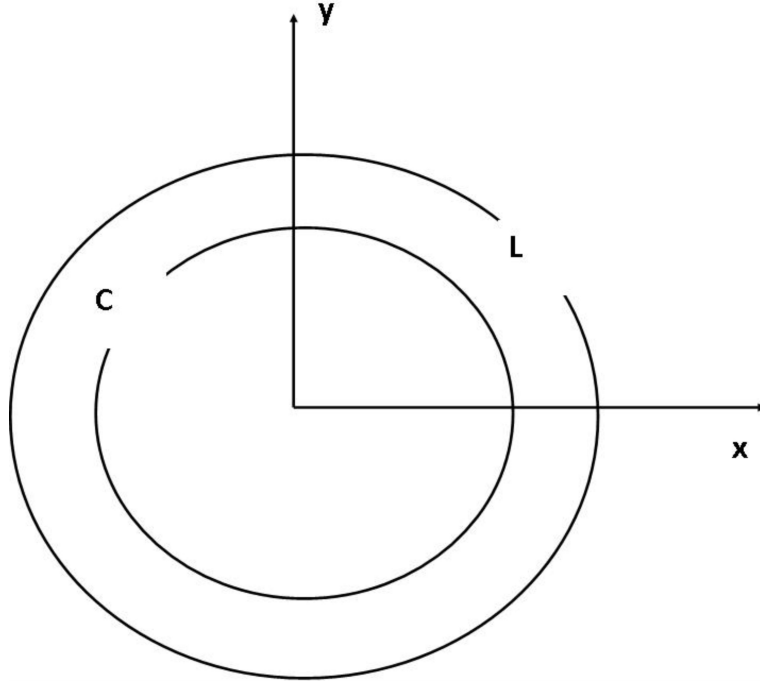
$$l^1 \tau^1 + l^2 \tau^2 = \tau_n, (\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 = k^2. \quad (17)$$

Из условий (17) находим компоненты тензора напряжений на контуре C :

$$\tau^1 = \tau_n \pm l^2 \sqrt{k^2 - \tau_n^2}, \tau^2 = \tau_n l^2 \mp l^1 \sqrt{k^2 - \tau_n^2}. \quad (18)$$

В дальнейшем, для определенности в формулах (18) будем выбирать верхний знак.

4. Использование законов сохранения для нахождения компонент тензора напряжений в области. Пусть точка $M(x_m, y_m)$ лежит вне контура C . Построим окружность радиуса ε с центром в точке M . Имеем $\varepsilon : (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = \varepsilon^2$. Пусть D прямая соединяющая точку M с контуром C . Получаем замкнутый контур, состоящий из окружности ε , прямой D и контура C . (см. рисунок 2).

Рис. 11. Контур пластической области L полностью охватывает отверстие C

Из (15) получаем

$$\oint_C A dy - B dx + \int_{D^+} A dy - B dx + \int_{D^-} A dy - B dx + \int_{\varepsilon} A dy - B dx = 0. \quad (19)$$

Сумма второго и третьего слагаемых в (19) равна нулю, поскольку интегралы вычисляются в разных направлениях. Окончательно из (19) имеем

$$\int_C A dy - B dx = - \oint_{\varepsilon} A dy - B dx. \quad (20)$$

Преобразуем правую часть уравнения (20), введя параметризацию $x = \varepsilon \cos t, y = \varepsilon \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. В результате имеем

$$\oint_{\varepsilon} A dy - B dx = \varepsilon \int_0^{2\pi} (A \cos t + B \sin t) dt. \quad (21)$$

Пусть в (15)

$$\alpha^1 = \frac{x}{x^2 + y^2}, \beta^1 = -\frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (22)$$

Тогда из (21) получаем

$$\int_{\varepsilon} A_1 dy - B_1 dx = \varepsilon \int_0^{2\pi} (A_1 \cos t + B_1 \sin t) dt = \int_0^{2\pi} \tau^1 dt = 2\pi \tau^1(x_m, y_m). \quad (23)$$

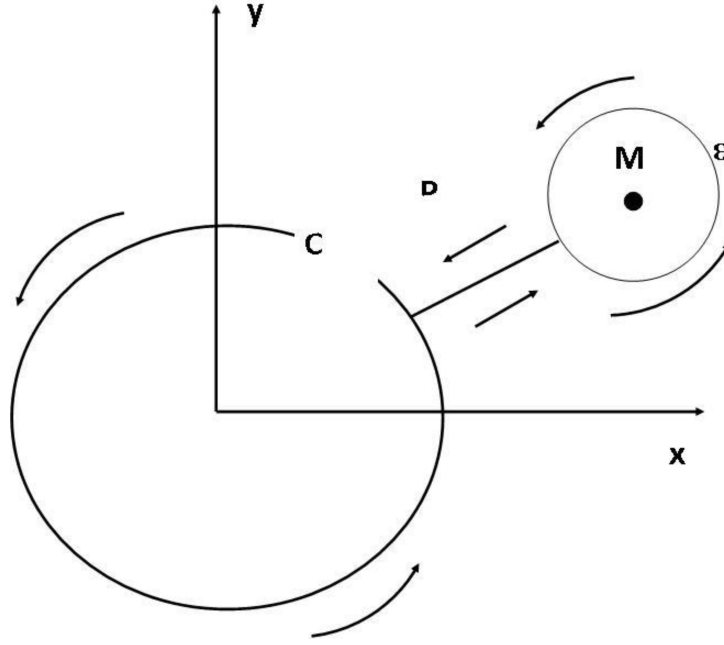


Рис. 12. Замкнутый контур, состоящий из окружности ε , прямой D и контура C

Последнее равенство в (23) получено с использованием теоремы о среднем при ε стремящемся к нулю. Пусть в (15)

$$\alpha^1 = \frac{y}{x^2 + y^2}, \beta^1 = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (24)$$

Тогда из (21) получаем

$$\oint_{\varepsilon} A_2 dy - B_2 dx = \varepsilon \int_0^{2\pi} (A_2 \cos t + B_2 \sin t) dt = \int_0^{2\pi} \tau^2 dt = 2\pi \tau^2(x_m, y_m). \quad (25)$$

Последнее равенство в (25) получено с использованием теоремы о среднем при ε стремящемся к нулю.

Из формулы (20), а также из (23) и (25) получаем

$$\oint_C A_1 dy - B_1 dx = -2\pi \tau^1(x_m, y_m), \oint_C A_2 dy - B_2 dx = -2\pi \tau^2(x_m, y_m). \quad (26)$$

Формулы (26) дают возможность найти компоненты тензора напряжений в любой точке x_m, y_m вне контура C . Это позволяет установить границу между упругой и пластической областями. Если выполнено условие пластичности $(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 = k^2$ в точке x_m, y_m , то эта точка принадлежит пластической области; если в точке выполнено условие $(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 < k^2$, то – упругой. *Замечание.* Установленные выше формулы позволяют решать упруго пластические задачи, даже если пластический контур не полностью охватывает контур C , лишь бы на контуре C было выполнено условие пластичности (7).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упруго пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 239 с.
- [2] Senashov S.I., Vinogradov A.M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity.// Proc. Edinburg Math. Soc. 1988. V.3(2). pp. 415–439.
- [3] Киряков П.П., Сенашов С.И., Яхно А.Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во Наука, 2001. 192 с.
- [4] Сенашов С.И., Гомонова О.В., Яхно А.Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности. Красноярск: Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т., 2012. 139 с.

S. I. Senashov, I. L. Savostyanova

ELASTIC-PLASTIC PROBLEM UNDER COMPLEX SHEAR CONDITIONS

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. We considered the equations of the anisotropic theory of plastic flow in the spatial case in this study. We have constructed an invariant solution based on the group of continuous transformations allowed by the system. In the case of a homogeneous stress state, a new velocity field is found. This field has a functional arbitrary value.

Keywords: the elastic-plastic problem, complex shift, the laws of conservation.

REFERENCES

- [1] Annin B. D., Cherepanov G. P. Elastic plastic problem. Novosibirsk: Nauka, 1983. 239 p. (in Russian)
- [2] Senashov S. I., A. M. Vinogradov, Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // The Proc. Edinburgh Math. Soc. 1988. V. 3(2). pp. 415-439.
- [3] Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations. Novosibirsk: Izd.Nauka, 2001. 192 p. (in Russian)
- [4] Senashov S. I., Gomonova O. V., Yakhno A. N. Mathematical questions of two-dimensional equations of ideal plasticity. Krasnoyarsk: Izd. SibSAU, 2012. 139 p. (in Russian)

Senashov Sergei Ivanovich

e-mail: sen@sibsau.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia.

Savostyanova Irina Leonidovna

e-mail: savostyanova@sibsau.ru, Ph.D. in Pedagogy, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia.