Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1 (43). С. 73–77

В. Н. Алексеев

К ВОПРОСУ О ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНАХ В УПРУГИХ СРЕДАХ

Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается задача о распространении цилиндрической волны сжатия в упругой среде. Получены значения радиальных смещений точек среды и радиальных напряжений. Указаны асимптотические оценки полученных решений для поля смещений в среде на больших расстояниях от источников волны, а также статистическое распределение смещений среды.

Ключевые слова: упругая среда, потенциал, цилиндрические волны, радиальные напряжения.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.008

УДК: 550.34

Инженерное оборудование местности в ряде случаев может потребовать проведения буровзрывных работ. Зарядами, используемыми при этом, могут быть, в частности, удлиненные цилиндрические заряды, устанавливаемые в искусственных полостях (шпурах, скважинах), заранее подготовленных в разрабатываемой среде. Такие технологии используют при проведении работ в твердых и скальных породах, мерзлых грунтах и т.п. При этом, как правило, актуальным является исследование волновых процессов, возникающих в природной грунтовой среде, при взрыве в ней упомянутых зарядов. Последнее, в свою очередь, основывается на анализе аналитических решений соответствующих задач, одной из которых является задача в следующей постановке.

Пусть в упругой среде, заполняющей полупространство $Z > 0$, имеется цилиндрическая полость(каверна), ось симметрии которой ортогональна плоскости $Z = 0$ среды. К стенкам каверны приложено равномерно распределённое по её длине нормальное давление, изменяющееся во времени по заданному закону. Требуется определить волновое движение, возникающее во внешней относительно каверной области.

Поставленная задача обладает осевой симметрией; её решение будем искать в цилиндрической системе координат, ось OZ которой совмещена с продольной осью каверны.

Алексеев Владимир Николаевич
`e-mail:` alekseevvn17@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

Поступила 28.02.2020

Движение среды может быть описано потенциалом $\varphi(r,t)$, который является функцией расстояния r точек среды от продольной оси каверны и времени t, отсчитываемого от момента приложения давления к стенке каверны. В рассматриваемом случае цилиндрической симметрии задачи функция $\varphi(r,t)$ должна удовлетворять волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где a — скорость продольной волны в упругой среде. Задача заключается в отыскании такой функции $\varphi(r,t)$, которая удовлетворяет волновому уравнению (1) и граничному условию на поверхности каверны

$$\sigma_r(r_0,t) = P_0 f(t), \tag{2}$$

где σ_r — радиальное напряжение; r_0 — радиус каверны; P_0 — константы; $f(t)$ — закон изменения во времени давления на внутренней поверхности каверны. Кроме того, необходимо учесть требование, состоящее в том, что исследуемый динамический процесс в среде представляет собой расходящуюся волну.

Будем искать решение задачи для случая гармонического режима, когда

$$f(t) = e^{i\omega t}. \tag{3}$$

Полагая

$$\varphi(r,t) = \Phi(r)T(t) \tag{4}$$

и разделяя в уравнении (1) переменные, будем иметь

$$\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{1}{r}\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = K, \tag{5}$$

где K — произвольная постоянная. Приняв $K = -\omega^2/a^2$, получаем

$$T'' + \omega^2 T = 0, \tag{6}$$

$$\Phi'' + \frac{1}{r}\Phi' + \frac{\omega^2}{a^2}\Phi = 0. \tag{7}$$

Частным решением уравнения (6) является

$$T(t) = e^{i\omega t}. \tag{8}$$

Заменой

$$\rho = \frac{\omega}{a} r \tag{9}$$

уравнение (7) сводится к уравнению Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{d^2\Phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\Phi}{d\rho} + \Phi = 0. \tag{10}$$

Его частными независимыми решениями являются функции Ханкеля нулевого порядка первого и второго рода $H_0^{(1)}(\rho)$ и $H_0^{(2)}(\rho)$ соответственно [1, 2], через которые выражается общее решение уравнения (10):

$$\Phi(r) = AH_0^{(2)}(\rho) + BH_0^{(1)}(\rho), \tag{11}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Как известно [3], функции Ханкеля m-го порядка первого и второго рода определяют бегущие цилиндрические волны и при больших значениях аргумента ρ аппроксимируются приближенными выражениями вида

$$H_m^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{i\left(\rho - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}m\right)}, \quad H_m^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{-i\left(\rho - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}m\right)}. \tag{12}$$

При временной зависимости вида $e^{i\omega t}$, которая имеет место в рассматриваемой задаче, цилиндрической волне, распространяющейся от поверхности каверны на бесконечность, соответствует функция Ханкеля нулевого порядка второго рода $H_0^{(2)}(\rho)$. Поэтому в выражении (11) следует принять $B = 0$, то есть

$$\Phi(r) = AH_0^{(2)}(\rho). \tag{13}$$

Таким образом, согласно (4), (8) и (13) окончательно для значения потенциала получаем

$$\varphi(\rho, t) = AH_0^{(2)}(\rho)e^{i\omega t}. \tag{14}$$

Значение константы A в (14) определяется согласно граничному условию (2):

$$\sigma_r = -\frac{\lambda}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\mu\frac{\partial U_r}{\partial r}, \tag{15}$$

где λ и μ — коэффициент Ламэ.

Вычислим предварительно значение радиальной составляющей U_r перемещений точек среды, содержащейся в выражении (15). Так как

$$U_r = \frac{\partial\varphi(r, t)}{\partial r}, \tag{16}$$

то согласно (14) будем иметь

$$U_r = Ae^{i\omega t}\frac{d}{d\rho}H_0^{(2)}(\rho)\frac{d\rho}{dr}. \tag{17}$$

Согласно свойству функции Ханкеля [4]

$$\frac{d}{d\rho}H_0^{(2)}(\rho) = -H_1^{(2)}(\rho), \tag{18}$$

поэтому в силу (17) и значения (9) для величины ρ получаем

$$U_r = -A\frac{\omega}{a}H_1^{(2)}(\rho)e^{i\omega t}. \tag{19}$$

Вычислим теперь производную:

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} = -A\frac{\omega}{a}e^{i\omega t}\frac{d}{d\rho}H_1^{(2)}(\rho)\frac{d\rho}{dr}. \tag{20}$$

Согласно свойству функции Ханкеля [4]

$$\frac{d}{d\rho}H_1^{(2)}(\rho) = H_0^{(2)}(\rho) - \frac{1}{\rho}H_1^{(2)}(\rho) \tag{21}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} = -A\frac{\omega^2}{a^2}\left[H_0^{(2)}(\rho) - \frac{1}{\rho}H_1^{(2)}(\rho)\right]e^{i\omega t}. \tag{22}$$

Теперь, согласно (14), (15), (22), для значения радиального напряжения σ_r получаем

$$\sigma_r = -A\frac{\omega^2}{a^2}\left[(\lambda+2\mu)H_0^{(2)}(\rho) - \frac{2\mu}{\rho}H_1^{(2)}(\rho)\right]e^{i\omega t}. \tag{23}$$

Возвращаясь к граничному условию (2), для значения A находим

$$A = -\frac{P_0\rho_0 a^2}{(\lambda+2\mu)\omega^2\left[\rho_0 H_0^{(2)}(\rho_0) - 2\gamma^2 H_1^{(2)}(\rho_0)\right]}, \tag{24}$$

где обозначены

$$\gamma^2 = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}, \quad \rho_0 = \frac{\omega}{a}r_0. \tag{25}$$

В силу (19) и (25) для значений радиальных смещений точек упругой среды получаем

$$U_r(r,t) = \frac{r_0 P_0}{\lambda+2\mu}\frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right)e^{i\omega t}}{\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) - 2\gamma^2 H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}. \tag{26}$$

Используя при больших значениях аргументов ($\omega r/a > \omega r_0/a \gg 1$) асимптотические выражения (12) функций Ханкеля, для радиальных смещений точек упругой среды будем иметь

$$U_r(r,t) = \frac{P_0}{\lambda+2\mu}\frac{a}{\omega}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\,e^{i\omega\left(t-\frac{r-r_0}{a}\right)}. \tag{27}$$

Для малых значений аргументов, используя разложения функций Ханкеля [4],

$$H_0^{(2)}(\rho) = -\frac{2i}{\pi}\ln\frac{\rho}{2} + \ldots, \quad H_1^{(2)}(\rho) = \frac{2i}{\pi}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{2}\ln\frac{\rho}{2} + \ldots\right) \tag{28}$$

и сохраняя их главные члены, в предельном случае при $\omega \to 0$ можно получить статическое распределение смещений среды:

$$U_r(r,t)_{\text{стат}} = \frac{P_0 r_0}{2\mu}\left(\frac{r_0}{r}\right). \tag{29}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. Москва: Наука, 1981. 668 с.

[2] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. Москва: Мир, 1977. 622 с.

[3] Агрест М. М., Максимов М. З. Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. Москва: Академиздат, 1965. 351 с.

[4] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. Москва: Наука, 1968. 832 с.

V. N. Aleksejev

ON THE QUESTION OF CYLINDRICAL WAVES IN ELASTIC MEDIA

Russian University of transport, Moscow, Russia

Abstract. The problem of propagation of a cylindrical compression wave in an elastic medium is considered. The values of radial displacements of medium points and radial stresses are obtained. Asymptotic estimates of the obtained solutions for the displacement field in the medium at large distances from the wave sources are given, as well as the statistical distribution of the displacement of the medium.

Keywords: elastic medium, potential, cylindrical waves, radial stresses.

REFERENCES

[1] Parton V. Z., Perlin P. I. Methods of mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1981. 668 p. (in Russian).
[2] Whitham J. Linear and nonlinear waves. Moscow: Mir, 1977. 622 p. (in Russian).
[3] Agrest M. M., Maksimov M. Z. Theory of incomplete cylindrical functions and their applications. Moscow: Akademizdat, 1965. 351 p. (in Russian).
[4] Reference for special functions with formulas, graphs, and tables. Moscow: Nauka, 1968. 832 p. (in Russian).
[5] Nikiforov A. F., Uvarov V. B. Special functions of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1978. 319 p. (in Russian).

Vladimir Nikolajevich Aleksejev, Candidate of technical Sciences, Associate Professor, Russian University of transport, Moscow, Russia.