

И. М. Лебедев, Е. И. Шифрин

ОБНАРУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВЕННЫХ ТРЕЩИН В БАЛКЕ С ПОМОЩЬЮ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается задача обнаружения множественных, поперечных трещин в стержне с помощью собственных частот поперечных колебаний. В недавней статье авторов доказано, что любое количество трещин однозначно восстанавливается по трем спектрам, отвечающим трем различным типам краевых условий. В статье также предложен алгоритм идентификации повреждений, вносимых трещинами. Помимо этого, высказано предположение, что для однозначной идентификации трещиноподобных дефектов на самом деле достаточно знать два спектра. Для проверки этого предположения разработана модификация предложенного ранее численного алгоритма. Рассмотрены численные примеры. Полученные результаты дают основание полагать, что высказанное предположение справедливо.

Ключевые слова: балка, трещины, поперечные колебания, собственные частоты, обратная задача, численный алгоритм

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.002

УДК: 539.3

Введение

Задача рассматривается в рамках широко распространенной модели, в которой поперечные трещины при поперечных колебаниях стержня моделируются невесомыми пружинами, работающими на поворот [1-4]. В работе [5] доказано, что любое конечное число трещин однозначно определяется по трем спектрам, отвечающим трем типам краевых условий. Результат получен сведением исходной задачи к обратной спектральной задаче для обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка на отрезке. Это позволило воспользоваться известными результатами [6-9].

© Лебедев И. М., Шифрин Е. И., 2020

Лебедев Иван Михайлович

e-mail: lebedivanm@gmail.com, младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.

Шифрин Ефим Ильич

e-mail: shifrin@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания № госрегистрации АААА-А20-120011690132-4 и при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00100)

Поступила 20.03.2019

Поскольку в результате сведения задачи к дифференциальному уравнению четвертого порядка получилось уравнение частного вида, содержащее лишь одну неизвестную функцию, можно предположить, что в действительности верен более сильный результат и все трещины можно идентифицировать с помощью лишь двух спектров. В представленной статье данная гипотеза проверяется на численных примерах.

Математическая формулировка задачи

Рассмотрим балку длины l , занимающую интервал $0 < x < l$. Площадь сечения S балки предполагается постоянной. Предполагается, что пружины, моделирующие поперечные трещины, расположены в точках x_1, x_2, \dots, x_n , причем $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Амплитуды поперечного перемещения оси балки при поперечных колебаниях на интервале $x_{j-1} < x < x_j$ обозначим $y_j(x)$, где $j = 1, 2, \dots, n+1$. Уравнение гармонических поперечных колебаний на интервале $x_{j-1} < x < x_j$ имеет следующий вид

$$y_j^{(4)}(x) = \lambda y_j(x), \quad \lambda = \omega^2 \rho S / EI, \quad (j = 1, 2, \dots, n+1), \quad x_{j-1} < x < x_j \quad (1)$$

где E - модуль Юнга, I - момент инерции поперечного сечения, ρ - плотность материала, ω - собственная частота, верхний индекс (4) обозначает производную четвертого порядка.

Условия сопряжения в местах расположения пружин имеют вид

$$y_j(x_j) = y_{j+1}(x_j), \quad y_j''(x_j) = y_{j+1}''(x_j), \quad y_j'''(x_j) = y_{j+1}'''(x_j) \quad (2)$$

$$y'_{j+1}(x_j) - y'_j(x_j) = \Delta_j = c_j y_j''(x_j), \quad c_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

где c_j податливость j -ой пружинки.

Рассмотрим четыре типа условий на концах стержня. Во всех случаях предполагается, что правый конец свободен ($y_{n+1}''(l) = y_{n+1}'''(l) = 0$). Случаю защемления левого конца соответствуют условия

$$y_1(0) = y_1'(0) = 0 \quad (4)$$

Условие шарнирного опирания левого конца имеет вид

$$y_1(0) = y_1''(0) = 0 \quad (5)$$

Условие, приводящее к несамосопряженной задаче на собственные значения

$$y_1(0) = y_1'''(0) = 0 \quad (6)$$

Случаю скользящей заделки соответствуют краевые условия

$$y_1'(0) = y_1'''(0) = 0 \quad (7)$$

Собственные значения, определяемые уравнениями (1), (2), (3) и краевыми условиями, при которых правый конец стержня свободен, а условия на левом конце удовлетворяют соотношениям (4), (5), (6) и (7) обозначим λ_i, μ_i, ν_i и σ_i , соответственно. Требуется определить положения пружин (трещин) x_1, x_2, \dots, x_n и их податливости c_i по указанным собственным значениям.

В [5], с помощью техники, развитой в [10,11], задача сведена к уравнению

$$w^{(4)}(x) = \lambda \left[1 + \sum_{j=1}^4 c_j \delta(x - x_j) \right] w(x) \quad (8)$$

Здесь $\delta(x - x_i)$ - дельта-функция, сосредоточенная в точке x_i , и для функции $w(x)$ выполнены следующие краевые условия: $w(l) = w'(l) = 0$, а на левом конце условия (4), (5), (6) и (7) переходят в краевые условия $w''(0) = w'''(0) = 0$, $w(0) = w''(0) = 0$, $w'(0) = w'''(0) = 0$ и $w'(0) = w'''(0) = 0$ соответственно.

В [6-8] рассмотрено уравнение более общего вида

$$[r(x)w''(x)]'' = \lambda m(x)w(x) \quad (9)$$

где $m(x)$ и $w(x)$ регулярные, но неизвестные функции. Доказано, что эти функции однозначно восстанавливаются по трем спектрам λ , μ и ν . Хотя функция $m(x)$, определяемая уравнением (8) является сингулярной, доказательство, приведенное в [6-8] полностью проходит и для этого случая. Вместе с тем, уравнение (8) содержит только одну неизвестную функцию, что дает основание полагать, что для ее восстановления достаточно знать только два спектра. Это предположение мы проверим численно с помощью алгоритмов, разработанных в [5,12].

Численный алгоритм идентификации трещин

Для реализации численного алгоритма немного переформулируем рассматриваемую задачу в соответствии с подходом, развитым в [5,12]. Предположим, что трещины снижают локальную жесткость балки, но не влияют на ее плотность. Тогда, вместо уравнений (1), (2), (3) следует рассмотреть уравнение поперечных колебаний балки с переменным модулем Юнга $E^*(x)$

$$(p(x)u''(x))'' = \lambda u(x), \quad p(x) = E^*(x)/E \quad (10)$$

С помощью конечно-элементной модели балки и кусочно-постоянной аппроксимации функции $p(x)$ прямая задача сводится к следующей задаче на собственные значения

$$\left(\mathbf{K}_q(\mathbf{p}) - \lambda^{(q)} \mathbf{M} \right) \mathbf{d}_q = 0, \quad (q = 1, 2, 3) \quad (11)$$

где индекс q указывает на тип краевых условий, \mathbf{K}_q - матрица жесткости, отвечающая данному типу краевых условий, \mathbf{M} - матрица масс, $\lambda^{(q)}$ - соответствующие собственные значения, \mathbf{d}_q - собственные векторы, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$ - вектор относительных жесткостей элементов, $p_j = E_j^*/E$, $0 < p_j \leq 1$.

Используемый в [5] алгоритм заключался в решении последовательности оптимизационных задач. Предполагалось, что в результате проведения экспериментов оказались известны собственные значения поперечных колебаний балки $\tilde{\lambda}_k^{(q)}$, $k = 1, \dots, N$, $q = 1, 2, 3$, соответствующие трем типам краевых условий. Для определения компонент вектора \mathbf{p} рассматривалась последовательность минимизационных задач с целевыми функциями, использующими различное количество известных собственных значений N

$$F_N(\mathbf{p}) = \sum_{q=1}^3 \sum_{k=1}^N \left(\frac{\lambda_k^{(q)}(\mathbf{p}) - \tilde{\lambda}_k^{(q)}}{\tilde{\lambda}_k^{(q)}} \right)^2 \quad (12)$$

Для поиска минимума введенных целевых функций использовался оптимизационный алгоритм Левенберга-Марквардта [13]. В качестве начального приближения выбирался вектор $\mathbf{p} = (1, \dots, 1)$, соответствующий неповрежденной балке. Элементы,

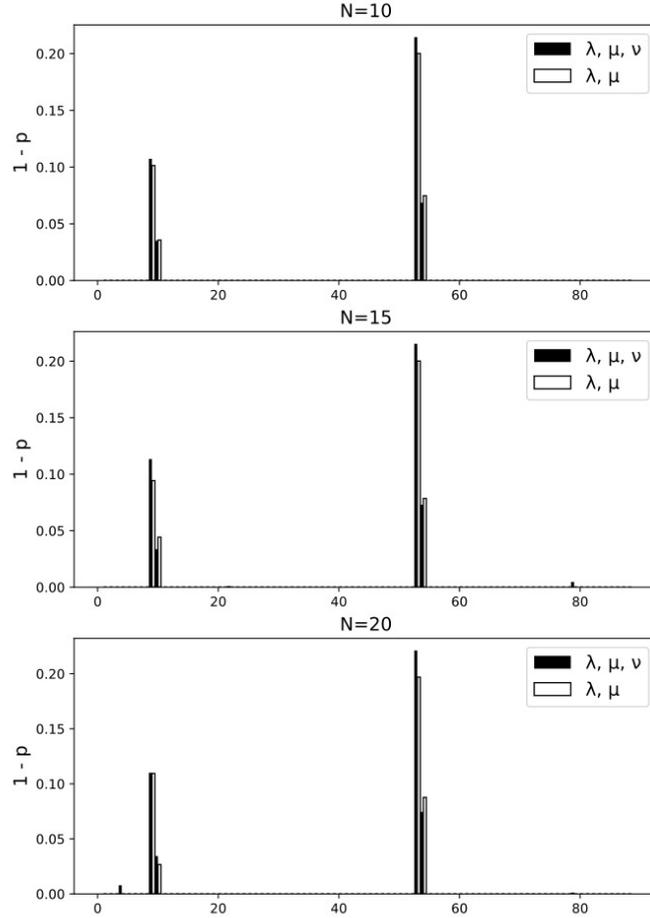


Рис. 1 Сравнение решений, полученных при использовании трех и двух спектров для восстановления двух трещин.

для которых $p_i < 1$, признаются поврежденными. Для уточнения локализации дефектов нужно рассматривать более мелкие разбиения отрезка, занимаемого балкой. При этом, участки стержня, признанные неповрежденными при грубом разбиении, считаются неповрежденными и в дальнейшем.

Для проверки нашего предположения о том, что достаточно знать лишь два спектра воспользуемся аналогичным алгоритмом с той разницей, что в целевых функциях будет использовано только два спектра

$$F_N(\mathbf{p}) = \sum_{q=1}^2 \sum_{k=1}^N \left(\frac{\lambda_k^{(q)}(\mathbf{p}) - \tilde{\lambda}_k^{(q)}}{\tilde{\lambda}_k^{(q)}} \right)^2 \quad (13)$$

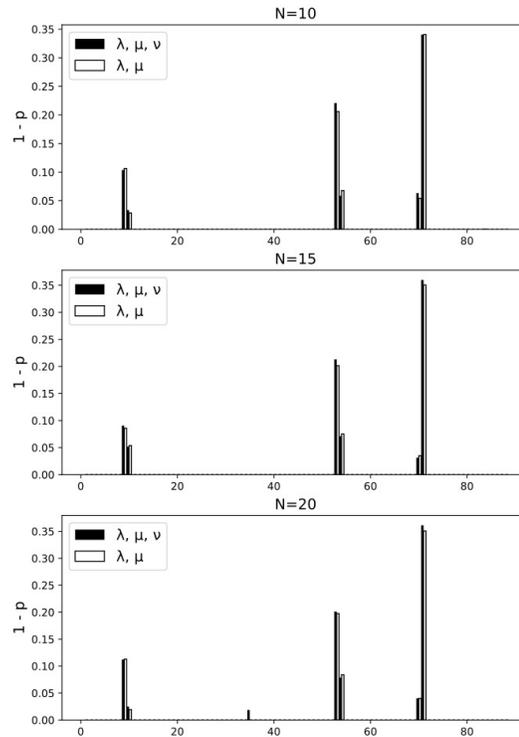


Рис. 2 Сравнение решений, полученных при использовании трех и двух спектров для восстановления трех трещин.

В численных примерах сравним результаты, получаемые с помощью трех и двух спектров.

Численные примеры

Рассмотрим балку длины $l = 1\text{м}$ квадратного сечения со стороной $h = 0.02\text{м}$, модуль Юнга материала $E = 2.1 \times 10^{11}\text{Н/м}^2$, плотность материала $\rho = 7800\text{кг/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Во всех рассмотренных примерах стержень, путем последовательного измельчения разбиения, в итоге был разбит на 88 элементов. Сперва рассмотрим задачу идентификации двух открытых, поперечных, односторонних трещин. Первая трещина относительной длины $s_1 = a_1/h = 0.1$ расположена в точке $x_1 = 0.1\text{м}$, вторая трещина расположена в точке $x_2 = 0.6\text{м}$ и имеет относительную длину $s_2 = 0.15$. Здесь a_i - длины трещин. Используя метод, предложенный в [10], были получены собственные значения, соответствующие поврежденному стержню $\lambda_i, \tilde{\mu}_i$ и $\tilde{\nu}_i$, которые являются входными данными для описанного алгоритма. На Рис.1 приведено сравнение результатов, полученных при использовании двух спектров $\tilde{\lambda}_i, \tilde{\mu}_i$ и всех трех рассматриваемых спектров. По оси x отложены номера элементов, а по оси y величины, соответствующие податливостям элементов. Элементы занумерованы слева направо. Черные вертикальные полосы соответствуют результатам, полученным с

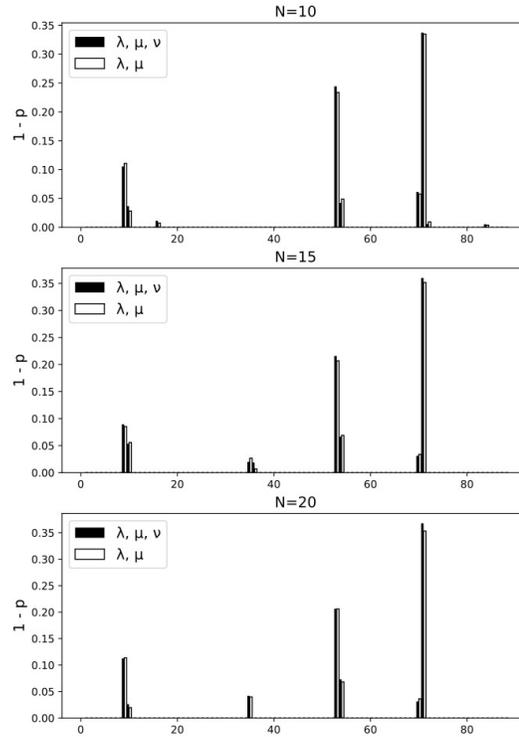


Рис. 3 Сравнение решений, полученных при использовании трех и двух спектров для восстановления четырех трещин.

помощью всех трех спектров. Светлые вертикальные полосы соответствуют результатам, полученным с помощью двух спектров $\tilde{\lambda}_i$ и $\tilde{\mu}_i$. Величины N соответствуют количеству используемых собственных значений при построении целевых функций. Из рисунка видно, что результаты, полученные с помощью собственных значений, отвечающих двум типам краевых условий, хорошо соответствуют результатам, полученным с помощью собственных значений, отвечающих всем трем типам краевых условий, которые, как было показано в [5], хорошо соответствуют искомым повреждениям.

В следующем примере добавим к имеющимся трещинам еще одну трещину, расположенную в точке $x_3 = 0.8\text{м}$ и имеющую относительную длину $s_3 = 0.2$. Результаты восстановления показаны на Рис.2. Из рисунка видно, что результаты, полученные с помощью трех и двух спектров хорошо согласуются как друг с другом, так и с рассматриваемыми повреждениями.

Добавим, наконец, еще одну трещину размером $s_4 = 0.05$ в точку $x_4 = 0.4\text{м}$. На Рис.3 показаны результаты восстановления четырех трещин. Видно, что здесь также результаты хорошо согласуются друг с другом и с рассматриваемыми повреждениями.

Выводы

Рассмотрено несколько численных примеров, результаты которых подтверждают высказанную раньше гипотезу о том, что знания двух спектров, отвечающих двум различным типам краевых условий, достаточно для однозначного восстановления любого конечного числа поперечных трещин в стержне. Примеры приведены для спектров с условиями на концах: свободно опертый – свободный и защемленный – свободный. Для выбора именно этих двух условий имеются определенные основания, однако, численно проверялись и другие пары спектров с условиями на концах: скользящий – свободный и свободно опертый – свободный, а также защемленный – свободный и скользящий – свободный. Хотя полученные результаты также были удовлетворительными, но несколько хуже представленных здесь.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Dimarogonas A. Vibration of cracked structures: a state of the art review. No. 55. *Engineering Fracture Mechanics*, 1996. 831-857 p.
- [2] N.T. Khiem L. T. A novel method for crack detection in beam-like structures by measurements of natural frequencies. No. 333. *Journal of Sound and Vibration*, 2014. 4084-4103 p.
- [3] L. Rubio J. Fernandez-Saez A. M. Identification of two cracks with different severity in beams and rods from minimal frequency data. No. 22(13). *Journal of Vibration and Control*, 2016. 3102-3117 p.
- [4] J. Fernandez-Saez A. Morassi M. P. L. R. Unique determination of a single crack in a uniform simply supported beam in bending vibration. No. 371. *Journal of Sound and Vibration*, 2016. 94-109 p.
- [5] И.М. Лебедев Е.И. Шифрин. Идентификация поперечных трещин в стержне по собственным частотам поперечных колебаний. № 4. *Изв. РАН. МТТ*, 2020.
- [6] Barcilon V. Inverse problem for the vibrating beam in the free-clamped configuration. No. 304. *Phil. Trans. R. Soc. Lond*, 1982. 211-251 p.
- [7] Barcilon V. Sufficient conditions for the solution of the inverse problem for a vibrating beam. No. 3. *Inverse Problems*, 1987. 181-193 p.
- [8] Gladwell G. The inverse problem for the vibrating beam. No. A393. *Proc. R. Soc. Lond*, 1984. 277-295 p.
- [9] Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008. 608 с.
- [10] E.I. Shifrin R. R. Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks. No. 222. *Journal of Sound and Vibration*, 1999. 409-423 p.
- [11] Shifrin E. Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies // *Mechanical Systems and Signal Processing*. No. 70-71. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016. 613-624 p.
- [12] И.М. Лебедев Е.И. Шифрин. Решение обратной спектральной задачи для стержня, ослабленного поперечными трещинами, с помощью оптимизационного алгоритма Левенберга-Марквардта. № 4. *Изв. РАН. МТТ*, 2019. 8-26 с.
- [13] Lourakis M. A brief description of the Levenberg-Marquardt algorithm implemented by levmar. No. 4(1). *Foundation of Research and Technology*, 2005. 1-6 p.

I.M. Lebedev, E.I. Shifrin

DETECTION OF MULTIPLE CRACKS IN A BEAM BY MEANS NATURAL FREQUENCIES OF TRANSVERSE VIBRATIONS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russian Federation

Abstract. A problem of detection of multiple transverse cracks in a beam by means of natural frequencies of transverse vibrations is considered. It is proved in the recent paper of the authors that an arbitrary number of cracks can be uniquely determined by three spectra corresponding to three types of the end conditions. An algorithm of reconstruction the damages corresponding the cracks is also developed. In addition, it was assumed that the cracks can be detected using only two spectra. To verify this supposition a modification of the previously developed algorithm is proposed. Numerical examples are considered. The obtained results confirm the assumption.

Keywords: beam, cracks, transverse vibration, natural frequencies, inverse problem, numerical algorithm.

REFERENCES

- [1] Dimarogonas A. Vibration of cracked structures: a state of the art review. No. 55. Engineering Fracture Mechanics, 1996. 831-857 p.
- [2] N.T. Khiem L. T. A novel method for crack detection in beam-like structures by measurements of natural frequencies. No. 333. Journal of Sound and Vibration, 2014. 4084-4103 p.
- [3] L. Rubio J. Fernandez-Saez A. M. Identification of two cracks with different severity in beams and rods from minimal frequency data. No. 22(13). Journal of Vibration and Control, 2016. 3102-3117 p.
- [4] J. Fernandez-Saez A. Morassi M. P. L. R. Unique determination of a single crack in a uniform simply supported beam in bending vibration. No. 371. Journal of Sound and Vibration, 2016. 94-109 p.
- [5] I.M. Lebedev E. S. Identification of transverse cracks in beam using natural frequencies of transverse vibrations. No. 4. Mechanics of Solids, 2020.
- [6] Barcion V. Inverse problem for the vibrating beam in the free-clamped configuration. No. 304. Phil. Trans. R. Soc. Lond, 1982. 211-251 p.
- [7] Barcion V. Sufficient conditions for the solution of the inverse problem for a vibrating beam. No. 3. Inverse Problems, 1987. 181-193 p.
- [8] Gladwell G. The inverse problem for the vibrating beam. No. A393. Proc. R. Soc. Lond, 1984. 277-295 p.
- [9] Gladwell G. Inverse Problems in Vibration. London: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [10] E.I. Shifrin R. R. Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks. No. 222. Journal of Sound and Vibration, 1999. 409-423 p.
- [11] Shifrin E. Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies // Mechanical Systems and Signal Processing. No. 70-71. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016. 613-624 p.
- [12] I.M. Lebedev E.I. Shifrin. Solution of the inverse spectral problem for a rod weakened by transverse cracks by the Levenberg-Marquardt optimization algorithm. № 54(6). Mechanics of Solids, 2019. 857-872 c.
- [13] Lourakis M. A brief description of the Levenberg-Marquardt algorithm implemented by levmar. No. 4(1). Foundation of Research and Technology, 2005. 1-6 p.

Lebedev Ivan M.

e-mail: lebedivanm@gmail.com, junior researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, address: 101, bl. 1, Vernadskii avenue, Moscow, 119526, Russia.

Shifrin Efim I.

e-mail: prosto@ipmnet.ru, doctor of technical sciences, assistant professor, leading researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, address: 101, bl. 1, Vernadskii avenue, Moscow, 119526, Russia.