Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 2 (44). С. 27–36

Ю. Н. Радаев

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕДАХ ЧЕТЫРЬМЯ ВИНТОВЫМИ ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В статье рассматриваются дифференциальные уравнения для потенциалов, обеспечивающие выполнение связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости в случае гармонической зависимости поля перемещений и микровращений от времени. Предложена альтернативная схема расщепления связанных векторных дифференциальных уравнений микрополярной теории упругости для потенциалов на несвязанные уравнения первого порядка. Она основана на пропорциональности с разными масштабными факторами вихревых составляющих перемещений и микровращений одному вихревому винтовому полю. Найдено представление векторов перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторов, обеспечивающее выполнимость связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости. В результате проблема нахождения вихревых составляющих перемещений и микровращений сводится к решению четырех несвязанных между собой векторных винтовых дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными. Полученные результаты могут быть использованы в прикладных задачах механики, связанных с распространением гармонических (монохроматических) волн перемещений и микровращений вдоль длинных волноводов.

Ключевые слова: микрополярная теория упругости, вектор перемещения, вектор микровращения, связанный, векторный потенциал, вихревая часть, винтовое уравнение, винтовое поле, уравнение Гельмгольца

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.003

УДК: 539.374

Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 „Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности“).

Поступила 01.05.2020

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Микрополярная теория упругости, впервые предложенная в классическом сочинении [1], выступает как естественное обобщение теории упругости, хорошо известной и как инженерная, и как физическая наука [2]. Микрополярная теория упругости предолжила свой рецепт преодоления трудностей, с которыми столкнулась теория упругости, пытаясь, например, объяснить поведение зернистых сред или картину распространения высокочастотных акустических волн через поликристаллические структуры. Уравнения микрополярной теории упругости достаточно хорошо известны [3, 4]. Их вывод, основанный на принципе виртуальных перемещений, имеется в статье [5].

Целью представляемой работы является исследование связанной системы векторных дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории изотропного упругого тела в случае гармонической зависимости полей перемещений и микровращений от времени. Их изучение и преобразование с помощью динамических потенциалов (безвихревых и вихревых) приводит к различным системам векторных дифференциальных уравнений (как связанным, так и не связанным). С теоретической и прикладной точек зрения наиболее интересны только те, который обеспечивают переход от связанных уравнений к несвязанным. Родственные проблемы и постановки задач возникают также в прикладных задачах связанной термоупругости и особенно в вопросах распространения гармонических волн в *гиперболических* термоупругих средах [6].

В представляемой работе, которая по-существу представляет собой обобщение методов и результатов [7], развивается альтернативная схема расщепления основной связанной системы векторных дифференциальных уравнений гармонической микрополярной теории упругости на несвязанные уравнения. Последние будут иметь форму винтовых уравнений. Ниже приводятся минимально необходимые сведения, касающиеся таких уравнений (см., например, [9]).

Векторное поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ в трехмерном пространстве называется винтовым (screw field), если оно удовлетворяет следующему соотношению:

$$\boldsymbol{\Upsilon} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}) = \mathbf{0},$$

т.е. вихрь векторного поля оказывается коллинеарным направлению самого поля

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} = A\boldsymbol{\Upsilon},$$

где множитель A характеризуется термином анормальность (abnormality) поля. В том случае, когда множитель A есть постоянная величина:
1) все кратные (повторные) вихри векторного поля $\boldsymbol{\Upsilon}$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}, \quad \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}), \quad \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon})), \ldots$$

также будут винтовыми полями, причем с той же самой анормальностью A;
2) поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ будет удовлетворять векторному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\boldsymbol{\Upsilon} + A^2\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0};$$

3) винтовое поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ с постоянной анормальностью A всегда представимо в форме

$$\boldsymbol{\Upsilon} = A(\boldsymbol{\nabla} h) \times \mathbf{d} + A^2 h\mathbf{d} + (\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla} h,$$

где $\mathbf{d}$ — постоянный единичный директор в трехмерном пространстве, h — некоторое скалярное поле, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца

$$\Delta h + A^2 h = 0.$$

2. Дифференциальные уравнения линейной теории микрополярной упругости в терминах перемещений и микровращений. Система связанных векторных дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории упругости имеет вид [5]:

$$\begin{cases} G[(1+c_1)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + 2c_1\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}] = \rho\partial.\partial.\mathbf{u}, \\ GL^2[(1+c_2)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} + (1-c_2+2c_3)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}] - 2Gc_1(2\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) = \Im\partial.\partial.\boldsymbol{\phi}. \end{cases} \tag{1}$$

где ρ — плотность; $\Im$ — коэффициент микроинерции; $\mathbf{u}$ — вектор перемещения; $\boldsymbol{\phi}$ — вектор микровращения; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная длина микрополярной теории упругости; c_1, c_2, c_3 — физически безразмерные определяющие постоянные; $\boldsymbol{\nabla}$ — трехмерный оператор Гамильтона; $\partial.$ — частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных переменных.

Приведенная выше система векторных дифференциальных уравнений с частными производными (1) представляется наиболее приемлемой с физической точки зрения. Однако в современной литературе она не получила широкого распространения, поскольку оптимальным считается другой набор определяющих постоянных. По этой причине введем новые определяющие постоянные α, β, γ, λ, μ, ε согласно

$$\begin{aligned} &G = \mu, \quad \frac{2\nu}{1-2\nu} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad GL^2 = \gamma, \\ &c_1 = \frac{\alpha}{\mu}, \quad c_2 = \frac{\varepsilon}{\gamma}, \qquad c_3 = \frac{\beta}{2\gamma}. \end{aligned}$$

Заметим, что они систематически используются в монографиях [3, 4] и множестве других публикаций, посвященных линейной микрополярной теории упругости изотропного тела. В результате система связанных уравнений линейной микрополярной теории упругости (1) преобразуется к следующей форме:

$$\begin{cases} (\mu+\alpha)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\mu-\alpha+\lambda)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + 2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} = \rho\partial.\partial.\mathbf{u}, \\ (\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} + (\gamma-\varepsilon+\beta)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} - 2\alpha(2\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) = \Im\partial.\partial.\boldsymbol{\phi}; \end{cases} \tag{2}$$

или также

$$\begin{cases} (\lambda+2\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - (\mu+\alpha)\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) + 2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} = \rho\partial.\partial.\mathbf{u}, \\ (\beta+2\gamma)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} - (\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}) - 2\alpha(2\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) = \Im\partial.\partial.\boldsymbol{\phi}. \end{cases} \tag{3}$$

Векторное дифференциальное уравнение (3) будет рассматрваться в областях трехмерного пространства, обладающих свойством поверхностной односвязанности: любая замкнутая поверхность, целиком расположенная в области может быть стянута в точку, не выходя за границу области. Такое требование совершенно необходимо для того, чтобы любое безвихревое векторное поле имело бы потенциал, а любое векторное поле с нулевой расходимостью оказывалось бы вихревым, т.е. имело бы векторный потенциал.

Зависимость от времени предполагается гармонической, т.е. физические поля представляются как произведения комплексных амплитуд (за которыми мы сохраним те же обозначения, что и для самих полей) на комплексную гармоническую экспоненту $e^{i\omega t}$, где ω — циклическая частота.

3. Потенциалы перемещений и микровращением. Связанные уравнения для потенциалов. Воспользуемся разложениями Гельмгольца для векторов перемещений и микровращений

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \boldsymbol{\nabla}\Phi + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\Psi},\\
\boldsymbol{\phi} &= \boldsymbol{\nabla}\Sigma + \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

которые представляют указанные векторные поля с помощью скалярных потенциалов Φ, Σ и векторных потенциалов $\boldsymbol{\Psi}$, $\mathbf{H}$.

К ним можно присоединять (а можно и не присоединять) различные калибровочные условия. В частности, стандартными принято считать условия, фиксирующие нулевую расходимость векторных потенциалов

$$
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Psi} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{H} = 0. \tag{2}
$$

Подстановка разложений (1) в систему дифференциальных уравнений (3) позволяет получить уравнения для скалярных и векторных потенциалов.

Дифференциальные уравнения для скалярных потенциалов Φ, Σ не связанны между собой и поэтому рассматриваются как два независимых уравнения

$$
\begin{aligned}
&\Delta\Phi - \frac{1}{c_{\parallel}^{2}}(\partial.)^{2}\Phi = 0,\\
&\Delta\Sigma - \frac{1}{{}_{\mu}c_{\parallel}^{2}}(\partial.)^{2}\Sigma - \frac{\Omega^{2}}{{}_{\mu}c_{\parallel}^{2}}\Sigma = 0.
\end{aligned}
$$

Здесь постоянные $c_{\parallel}^{2}$, ${}_{\mu}c_{\parallel}^{2}$ и Ω^{2} выражаются в терминах определяющих постоянных согласно

$$
c_{\parallel}^{2} = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}, \qquad {}_{\mu}c_{\parallel}^{2} = \frac{\beta+2\gamma}{\mathfrak{J}}, \qquad \Omega^{2} = \frac{4\alpha}{\mathfrak{J}}.
$$

Для векторных потенциалов $\boldsymbol{\Psi}$, $\mathbf{H}$ получаются два связанных между собой векторных дифференциальных уравнения

$$
\begin{cases}
\mathscr{A}_{\perp}\boldsymbol{\Psi} + 2d_{\perp}^{2}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = \mathbf{0},\\
\mathscr{B}_{\perp}\mathbf{H} + \dfrac{\Omega^{2}}{2\,{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0},
\end{cases}
\tag{3}
$$

где были введены постоянные

$$
d_{\perp}^{2} = \frac{{}^{\backprime}c_{\perp}^{2}}{{}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^{2}}, \quad {}^{\backprime}c_{\perp}^{2} = \frac{\alpha}{\rho}, \quad {}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^{2} = \frac{\mu+\alpha}{\rho}, \quad {}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2} = \frac{\gamma+\epsilon}{\mathfrak{J}}; \tag{4}
$$

и, кроме того, — два дифференциальных оператора второго порядка

$$
\mathscr{A}_{\perp} = \Delta - \frac{1}{{}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^{2}}(\partial.)^{2}, \qquad \mathscr{B}_{\perp} = \Delta - \frac{1}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}}(\partial.)^{2} - \frac{\Omega^{2}}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}}. \tag{5}
$$

Система (3) сохраняет свой вид независимо от использования того или иного условия калибровки. В частности, можно вообще отказаться от калибровочных условий (2).

Исследование связанных уравнений для векторных потенциалов перемещений и микровращений вызывает значительные трудности и поэтому мы сосредоточимся именно на этих уравнениях. Начнем с того, что дифференциальные операторы $\mathscr{A}_\perp$ и $\mathscr{B}_\perp$ в условиях гармонической зависимости от времени сводятся к

$$\mathscr{A}_\perp = \Delta + \frac{\omega^2}{{}^{\shortparallel}c_\perp^2}, \qquad \mathscr{B}_\perp = \Delta + \frac{\omega^2}{{}^{\shortparallel}_{\mu}c_\perp^2} - \frac{\Omega^2}{{}^{\shortparallel}_{\mu}c_\perp^2}. \tag{6}$$

В рамках настоящего исследования удобно ввести следующие две постоянные

$$\alpha_\perp^2 = \frac{\omega^2}{{}^{\shortparallel}c_\perp^2}, \quad \beta_\perp^2 = \mathrm{Abs}\frac{\omega^2 - \Omega^2}{{}^{\shortparallel}_{\mu}c_\perp^2}$$

и привести операторы $\mathscr{A}_\perp$ и $\mathscr{B}_\perp$ к следующему виду:

$$\mathscr{A}_\perp = \Delta + \alpha_\perp^2, \qquad \mathscr{B}_\perp = \Delta \pm \beta_\perp^2, \tag{7}$$

где выбор того или иного знака в выражении для $\mathscr{B}_\perp$ зависит от величины циклической частоты

$$\omega^2 - \Omega^2 \gtrless 0.$$

В итоге в гармоническом случае связанная система уравнений для потенциалов приобретает вид

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_\perp^2)\mathbf{\Psi} + 2d_\perp^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta \pm \beta_\perp^2)\mathbf{H} + \dfrac{\Omega^2}{2\,{}^{\shortparallel}_{\mu}c_\perp^2} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{\Psi} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{8}$$

Ограничимся исследованием высокочастотных гармонических волн, когда циклическая частота ω оказывается выше порогового значения, определяемого постоянной Ω. Тогда последняя система уравнений приводится к

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_\perp^2)\mathbf{\Psi} + 2d_\perp^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta + \beta_\perp^2)\mathbf{H} + \dfrac{\Omega^2}{2\,{}^{\shortparallel}_{\mu}c_\perp^2} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{\Psi} = \mathbf{0}; \end{cases} \tag{9}$$

с целью сокращения записи введем обозначение

$$g_\perp^2 = \frac{\Omega^2}{{}^{\shortparallel}_{\mu}c_\perp^2} d_\perp^2,$$

после чего окончательно приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_\perp^2)\mathbf{\Psi} + 2d_\perp^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta + \beta_\perp^2)\mathbf{H} + \dfrac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{\Psi} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{10}$$

Внимательный анализ проведенных рассуждений показывает, что связанная система уравнений для потенциалов (10) получается также и в несколько иной форме (и снова без учета калибровки потенциалов):

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{\Psi}) + \alpha_\perp^2 \mathbf{\Psi} + 2d_\perp^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ -\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}) + \beta_\perp^2 \mathbf{H} + \dfrac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{\Psi} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{11}$$

4. Представление вихревых составляющих перемещений и микровращений винтовыми векторными полями. Представление вихревых составляющих перемещений и микровращений с помощью винтовых векторных полей решает главную задачу настоящего исследования: переход от связанной системы дифференциальных уравнений (11) к несвязанным уравнениям, что в конечном итоге должно позволить найти аналитические подходы к решению прикладных задач механики микрополярных континуумов.

Достижение этой цели начинается с рассмотрения вихревых составляющих перемещений и микровращений как одного и того же вихревого векторного поля $\boldsymbol{\Upsilon}$, но с различными масштабными факторами:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} = a\boldsymbol{\Upsilon}, \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = b\boldsymbol{\Upsilon}; \end{cases} \tag{1}$$

при этом буде выполнено *естественное* калибровочное условие

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Upsilon} = 0.$$

Подстановка (1) в систему векторных дифференциальных уравнений (11) позволяет получить следующую систему уравнений относительно поля $\boldsymbol{\Upsilon}$:

$$\begin{cases} -a\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}) + \alpha_\perp^2 a\boldsymbol{\Upsilon} + 2d_\perp^2 b\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}, \\ -b\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}) + \beta_\perp^2 b\boldsymbol{\Upsilon} + \dfrac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} a\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

В левой части первого из уравнений приведенной выше системы добавим и отнимем одно и то же слагаемое (c — некоторая постоянная)

$$c\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon};$$

то же самое выполним и со вторым уравнением и слагаемым (d — некоторая постоянная)

$$d\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}.$$

После ряда преобразований убеждаемся в том, что, если положить

$$\frac{a}{c} = \frac{c + 2d_\perp^2 b}{a\alpha_\perp^2}, \quad \frac{b}{d} = \frac{d + (2d_\perp^2)^{-1} g_\perp^2 a}{b\beta_\perp^2},$$

то связанные уравнения для потенциалов будут удовлетворяться, когда

$$\begin{cases} -c\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} + a\alpha_\perp^2 \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}, \\ -d\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} + b\beta_\perp^2 \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Получить одно независимое уравнение для определения векторного поля $\boldsymbol{\Upsilon}$ удается, если принять, что

$$\frac{c}{d} = \frac{\alpha_\perp^2}{\beta_\perp^2} \frac{a}{b};$$

тогда оказывается достаточной выполнимость следующего *винтового* уравнения

$$-\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} + p\alpha_\perp^2 \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

где p представляет собой отношение

$$p = \frac{a}{c}.$$

Обратимся далее к нахождению постоянных. Всего их четыре: a, b, c, d. Из них можно образовать три независимых отношения:

$$p = \frac{a}{c}, \quad q = \frac{b}{c}, \quad s = \frac{d}{c}.$$

Для указанных отношений из предыдущих рассуждений получаются ровно три независимых уравнения

$$\begin{cases} p^2\alpha_\perp^2 = 1 + 2qd_\perp^2, \\ q^2\beta_\perp^2 = s^2 + ps\dfrac{g_\perp^2}{2d_\perp^2}, \\ ps\dfrac{\alpha_\perp^2}{\beta_\perp^2} = q. \end{cases}$$

Из данной выше системы уравнений можно определить постоянную q, получив сначала квадратное уравнение

$$2d_\perp^2\alpha_\perp^2 q^2 + (\alpha_\perp^2 - \beta_\perp^2 - g_\perp^2)q - \frac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} = 0,$$

из которого находятся два различных вещественных значения для q:

$$4d_\perp^2\alpha_\perp^2 q = \beta_\perp^2 + g_\perp^2 - \alpha_\perp^2 \pm \sqrt{(\beta_\perp^2 + g_\perp^2 - \alpha_\perp^2)^2 + 4g_\perp^2\alpha_\perp^2}.$$

Для постоянной p также получаются два различных вещественных значения согласно

$$2\alpha_\perp^4 p^2 = \beta_\perp^2 + g_\perp^2 + \alpha_\perp^2 \pm \sqrt{(\beta_\perp^2 + g_\perp^2 + \alpha_\perp^2)^2 - 4\alpha_\perp^2\beta_\perp^2}.$$

Начиная с этого момента, введем два значения p_1, p_2, которые соответствуют положительному и отрицательному знакам в приведенной только что формуле, и введем также два значения K_1, K_2, положив

$$\alpha_\perp^4 p_{1,2}^2 = K_{2,1}^2, \quad \alpha_\perp^2 p_1 = \mp K_2, \quad \alpha_\perp^2 p_2 = \mp K_1.$$

Заметим, что волновые числа K_1, K_2 в силу своего определения упорядочены согласно

$$K_2 > K_1 > 0.$$

Таким образом, всего для параметра p имеется *четыре* различных вещественных значения

$$\mp K_1, \quad \mp K_2;$$

в результате векторное поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ должно удовлетворять одному из *четырех* винтовых уравнений

$$-\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} \mp K_{2,1}\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

где знаки $\mp$ и индексы 1, 2 между собой никак не согласованы.

Таким образом, имеется ровно четыре независимых поля[1]

$$\underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_-, \quad \underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_+, \quad \underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_-, \quad \underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_+,$$

которые должны быть интегралами несвязанных векторных уравнений (3) и линейные комбинации которых будут определять вихревые части векторов перемещений и

[1]Приводимые ниже обозначения для четырех различных вариантов векторного поля $\boldsymbol{\Upsilon}$ согласованы с четырьмя уравнениями (3), выписанными в сокращенной форме.

микровращений в соответствии с (1). При этом следует учитывать, что однозначно определяется лишь отношение b/a и, поскольку

$$\frac{b}{a} = \frac{q}{p},$$

то отношение b/a имеет четыре различных значения, которые без труда находятся из данных выше формул.

Полнота рассматриваемых в работе представлений гармонических полей перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторных полей может быть установлена известными (и сравнительно простыми) методами, изложение которых заинтересованный читатель обнаружит в статье [7].

Полученные в работе результаты нацелены на их использование в прикладных задачах, связанных с распространением гармонических (монохроматических) волн перемещений и микровращений вдоль длинных цилиндрических волноводов и в этом смысле выступают как дальнейшее развитие методов и результатов, содержащихся в книге [6].

5. Заключение.

1. Исследуется система связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости в терминах перемещений и микровращений в случае гармонической зависимости физических полей от времени (монохроматические волны перемещений и микровращений).
2. Получены несвязанные уравнения для скалярных и связанные уравнения векторных потенциалов, задающих поля перемещений и микровращений в соответствии с представлением Ламе, выполнение которых обеспечивает выполнение векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости.
3. Развита альтернативная схема расщепления связанных векторных дифференциальных уравнений микрополярной теории упругости для потенциалов на несвязанные уравнения, основанная на пропорциональности вихревых составляющих перемещений и микровращений одному вихревому винтовому полю.
4. Проблема нахождения вихревых составляющих перемещений и микровращений сведена к решению четырех несвязанных между собой векторных винтовых дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными.
5. Получено представление векторов перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторов, обеспечивающее выполнимость связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости.
6. Полнота рассматриваемых в работе представлений гармонических полей перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторных полей может быть установлена известными (и достаточно простыми) методами.
7. Результаты настоящей работы могут быть использованы в прикладных задачах, связанных с распространением гармонических (монохроматических) волн перемещений и микровращений вдоль длинных волноводов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 pp.

[2] Саусвелл Р.В. Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 676 с.

[3] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford New York Toronto Sydney Paris Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.

[4] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

[5] Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2018. Т. 22. №3. С. 504–517. doi: 10.14498/vsgtu1635.

[6] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

[7] Радаев Ю.Н. Представление перемещений в пространственной гармонической теории упругости с помощью двух винтовых векторов// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. №6. 2020. (в печати)

[8] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories/ In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Berlin–Gottingen–Heidelberg: Springer, 1960. Pp. 226–902.

Y. N. Radayev

ON MODELLING HARMONIC WAVES IN LINEAR MICROPOLAR ELASTIC MEDIA BY FOUR SCREW FIELDS

Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper is devoted to study of the coupled vector differential equations of the linear theory of micropolar elasticity formulated in terms of displacements and microrotations in the case of a harmonic dependence of the physical fields on time. An alternative analysis aimed at splitting the coupled vector differential equation of the linear theory of micropolar elasticity into uncoupled equations is given. It is based on a notion of proportionality of the vortex parts of the displacements and microrotations to the single vector, which satisfies the screw equation well known from the mathematical physics. As a result, the problem of finding the vortex parts of the displacements and microrotations fields is reduced to solution of four uncoupled screw differential equations of the first order with partial derivatives. Obtained results are to be used in applied problems of the micropolar elasticity and in particular in studies of harmonic wave propagation along waveguides.

Keywords: micropolar elasticity, displacement vector, microrotation vector, coupled, vector potential, vortex part, screw equation, screw field, Helmholtz equation

REFERENCES

[1] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 pp.
[2] Саусвелл Р.В. Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 676 с.
[3] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford New York Toronto Sydney Paris Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
[4] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
[5] Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2018. Т. 22. №3. С. 504–517. doi: 10.14498/vsgtu1635.
[6] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.
[7] Радаев Ю.Н. Представление перемещений в пространственной гармонической теории упругости с помощью двух винтовых векторов// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. №6. 2020. (в печати)
[8] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories/ In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Berlin–Gottingen–Heidelberg: Springer, 1960. Pp. 226–902.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00844).

Radayev Yuri Nickolaevich
`e-mail:` radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.