

В. В. Мокряков

## ЛОКАЛИЗАЦИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛНАХ В УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПУАССОНА

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Рассмотрены максимальные напряжения в осесимметричных волнах в упругих стержнях для положительных значений коэффициента Пуассона. Обнаружена особая длина волны, для которой имеет место наибольшее значение максимального растяжения на оси по отношению к максимальному растяжению на поверхности. Показано, что и особая длина волны, и наибольшее значение отношений растяжений не зависят от коэффициента Пуассона.

**Ключевые слова:** упругость, стержень круглого сечения, волны Погхаммера–Кри, коэффициент Пуассона, максимальное растяжение, максимальный сдвиг.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.010

УДК: 539.3

**Введение.** Цилиндрические стержни круглого сечения, как конструкционный элемент, широко распространены. Расчет прочности любой конструкции требует нахождения напряженно-деформированного состояния (НДС), в том числе — наибольших значений напряжений (максимальное растяжение и сдвиг). Напряжения возникают не только из-за статических напряжений, но и по причине вибраций. Таким образом, также необходимо изучать и НДС, вызванные упругими волнами.

Л. А. Pochhammer в 1876 г. [1] и С. Chree в 1886 г. [2, 3] независимо вывели основные уравнения для волн в упругом круговом цилиндре. Позже (в работах [4–14] и др.) были получены решения для осесимметричных, изгибных и крутильных волн Погхаммера–Кри, построены дисперсионные соотношения.

Сегодня исследование волн Погхаммера–Кри продолжается в нескольких направлениях (см., напр., [15–23]): изменение геометрии задачи (вместо цилиндра — цилиндрическая полость в неограниченной среде, труба или другая осесимметричная конструкция), изменение механических свойств материала (в модель добавляются вязкость, термоупругость и т.д.), изменение распределения свойств (рассматриваются неоднородные и анизотропные конструкции).

---

© Мокряков В. В., 2020

*Мокряков Вячеслав Викторович*

e-mail: mokr@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00100.

Поступила 01.04.2020

Работа [24] посвящена изучению структуры полей напряжений в волнах Погхаммера–Кри. В частности, показано, что максимальные величины напряжений (растяжения и сдвига) могут локализоваться не только на поверхности стержня, но и на его оси. В работе [25] рассмотрена локализация максимумов напряжений для стального стержня, получены диапазоны частот для внешней и внутренней локализаций, получены отношения максимумов напряжений на оси и на поверхности стержня.

Представленная работа продолжает работу [25] и рассматривает локализацию максимумов напряжений для упругого стержня для коэффициента Пуассона  $0,001 \leq \nu \leq 0,499$ .

**Расчет напряжений.** Рассматривается бесконечный упругий стержень радиусом  $a$ . Материал стержня имеет модуль Юнга  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ , плотность  $\rho$ .

В работе [24] получены следующие выражения для осесимметричной волны Погхаммера–Кри:

$$\begin{aligned} u_r &= 2U \frac{h}{\kappa a} \left[ \left( \frac{c^2}{c_2^2} - 2 \right) J_1(\kappa a) J_1(hr) + 2 J_1(ha) J_1(\kappa r) \right] \sin(\gamma z - \omega t), \\ u_z &= 2U \gamma \left[ - \left( \frac{c^2}{c_2^2} - 2 \right) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) + 2 \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa r) \right] \cos(\gamma z - \omega t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\omega$  — круговая частота волны;  $\gamma$  — волновое число;  $c = \omega/\gamma$  — фазовая скорость волны;  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  — скорость волн расширения в бесконечной среде;  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  — скорость волн сдвига в бесконечной среде;  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе;  $h = \gamma \sqrt{(c/c_1)^2 - 1}$ ,  $\kappa = \gamma \sqrt{(c/c_2)^2 - 1}$  — вспомогательные параметры;  $J_n(x)$  — функция Бесселя;  $U$  — обобщенная амплитуда.

С помощью (1) получены напряженно-деформированные состояния стержня посредством дифференцирования и применения закона Гука. В работе [24] показано, что в осесимметричных волнах максимумы растягивающих и сдвиговых напряжений могут находиться не только на поверхности стержня, но и на его оси.

**Исследование нулевой моды.** В работе [25] исследован бесконечный упругий стержень с параметрами, соответствующими стали ( $E = 2,0 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0,28$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>). Рассмотрены НДС для волн с частотой и фазовой скоростью, соответствующих нулевой моде (диапазон частот — до 3 МГц).

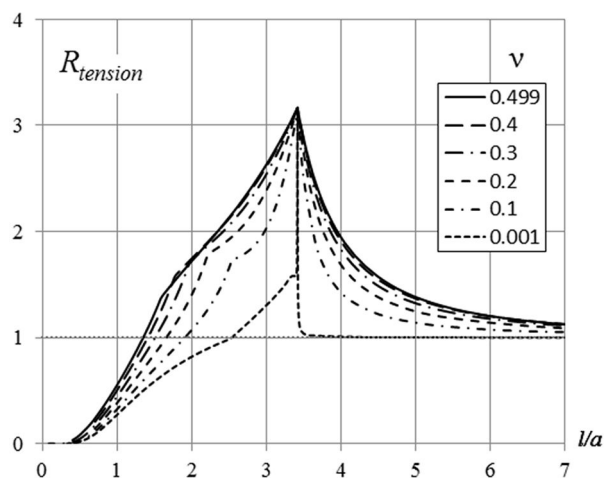
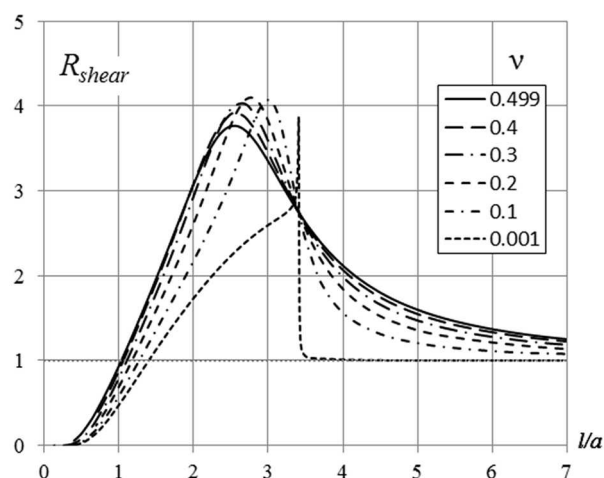
Вычислены максимальное растяжение  $\sigma_{tension}$  и максимальный сдвиг  $\sigma_{shear}$  на оси ( $r = 0$ ) и поверхности ( $r = a$ ) стержня, введены отношения

$$R_{tension} = \frac{\max_{r=0} \sigma_{tension}(\omega)}{\max_{r=a} \sigma_{tension}(\omega)} \quad \text{и} \quad R_{shear} = \frac{\max_{r=0} \sigma_{shear}(\omega)}{\max_{r=a} \sigma_{shear}(\omega)}.$$

Получено, что максимальное растяжение локализуется на оси при  $\omega \lesssim 1,3$  МГц, и максимальный сдвиг — при  $\omega \lesssim 1,7$  МГц.

В продолжение работ [24, 25] вычислены отношения  $R_{tension}$  и  $R_{shear}$  для коэффициентов Пуассона в диапазоне  $0,001 \leq \nu \leq 0,499$  (особые значения  $\nu = 0$  и  $\nu = 0,5$  исключены из данного исследования, так как в этих точках дисперсионное соотношение вырождается, это предмет для следующих исследований).

Отношения  $R_{tension}$  и  $R_{shear}$  в зависимости от относительной длины волны  $l/a$  представлены на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

Рис. 1. Отношение  $R_{tension}$  в зависимости от относительной длины волныРис. 2. Отношение  $R_{shear}$  в зависимости от относительной длины волны

На графиках привлекает внимание особая точка, соответствующая длине волны  $l^* \approx 3,412a$ . Для всех рассмотренных  $\nu$  отношение  $R_{tension}$  имеет максимум в этой точке, и при этом это значение одно и то же:  $R_{tension} \approx 3,164$ . Отношение  $R_{shear}$  также имеет одно и то же значение  $R_{shear} \approx 2,741$  для данной длины волны, но это значение не максимальное (максимумы  $R_{shear}$  соответствуют разным длинам волн и имеют разные значения).

**Заключение.** Обнаружена длина волны, для которой максимальное растяжение на оси в три с лишним раза больше, чем на поверхности. Этот результат важен для контроля напряжений в стержневых конструкциях.

С другой стороны, пока нет объяснения, почему  $l^*/a$  имеет именно такое значение и почему не зависит от коэффициента Пуассона, почему максимальное  $R_{tension}$  также не

зависит от свойств материала. Получение ответов на поставленные вопросы требует следующих исследований.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Pochhammer L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // *J. Reine Angew. Math.* 1876. Vol. 81. P. 324–336.
- [2] Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar // *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1886. Vol. 21. P. 287–298.
- [3] Chree C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications // *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1889. Vol. 14. P. 250–309.
- [4] Field G. S. Velocity of sound in cylindrical rods // *Canadian J. Research.* 1931. Vol. 5. P. 619–624.
- [5] Shear S. K., Focke A. B. The dispersion of supersonic waves in cylindrical rods of polycrystalline silver, nickel and magnesium // *Phys. Rev.* 1940. Vol. 57. P. 532–537.
- [6] Hudson G. E. Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders // *Phys. Rev.* 1943. Vol. 63. P. 46–51.
- [7] Кольский Г. Волны напряжения в твёрдых телах. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1955. 194 с.
- [8] Redwood M., Lamb J. On propagation of high frequency compressional waves in isotropic cylinders // *Proc. Phys. Soc. Section B. London.* 1957. Vol. 70, no. 1. P. 136–143.
- [9] Onoe M., McNiven H. D., Mindlin R. D. Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 1962. Vol. 29. P. 729–734.
- [10] Hutchinson J. R., Percival C. M. Higher modes of longitudinal wave propagation in thin rod // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1968. Vol. 44. P. 1204–1210.
- [11] Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1972. Vol. 51. P. 265–283.
- [12] Graff K. F. Wave motion in elastic solids. New York: Dover, 1991. 692 p.
- [13] Abramson H. N. Flexural waves in elastic beams of circular cross section // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1957. Vol. 29. P. 1284–1286.
- [14] Pao Y.-H., Mindlin R. D. Dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinders // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1960. Vol. 27. P. 513–520.
- [15] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 340 с.
- [16] Ватульян А. О., Юров В. О. Волновые процессы в полом цилиндре в поле неоднородных предварительных напряжений // *ПМТФ.* 2016. Т. 57, № 4. С. 182–191.
- [17] Zhou W. et al. Guided torsional wave generation of a linear in-plane shear piezoelectric array in metallic pipes // *Ultrasonics.* 2016. Vol. 65. P. 69–77.
- [18] Муравьева О. В., Ленков С. В., Мурашов С. А. Крутильные волны, возбуждаемые электромагнитно-акустическими преобразователями, при акустическом волноводном контроле трубопроводов // *Акустический журнал.* 2016. Т. 62, № 1. С. 117–124.
- [19] Garcia-Sanchez D. et al. Acoustic confinement in superlattice cavities // *Phys. Rev. A.* 2016. Vol. 94. P. 033813–1 – 033813–6.
- [20] Othman R. A fractional equation to approximate wave dispersion relation in elastic rods // *Strain.* 2017. Vol. 53, no. 4. e12228. P. 1–10.
- [21] Li Z., Jing L., Murch R. Propagation of monopole source excited acoustic waves in a cylindrical high-density polyethylene pipeline // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2017. Vol. 142. P. 3564–3579.
- [22] Zima B., Rucka M. Guided ultrasonic waves for detection of debonding in bars partially embedded in grout // *Constr. Build. Mat.* 2018. Vol. 168. P. 124–142.
- [23] Пышненко А. В., Кuznetsov S. V. Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.* 2018. Vol. 88, no. 8. P. 1385–1394.
- [24] Мокряков В. В. Максимумы напряжений в продольных волнах Похгаммера–Кри // *Изв. РАН. Механика твёрдого тела.* 2019. № 5. С. 86–103.
- [25] Mokryakov V. Maximal stresses of the longitudinal Pochhammer–Chree waves // *Procedia Structural Integrity.* 2019. Vol. 23. P. 143–148.

V. V. Mokryakov

**LOCALIZATION OF MAXIMAL STRESSES IN AXISYMMETRIC WAVES  
IN ELASTIC RODS FOR POSITIVE POISSON'S RATIO***Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia*

**Abstract.** The maximum stresses in axisymmetric waves in elastic rods for positive values of the Poisson's ratio are considered. A special wavelength has been found for which the ratio of axial maximal extension to surface maximal extension has the largest value. It is shown that both the special wavelength and the largest value of the extensions ratio are independent of the Poisson's ratio.

**Keywords:** elasticity, cylindrical rod, Pochhammer–Chree waves, Poisson's ratio, maximal extension, maximal shear.

**REFERENCES**

- [1] Pochhammer L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // *J. Reine Angew. Math.* 1876. Vol. 81. P. 324–336.
- [2] Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar // *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1886. Vol. 21. P. 287–298.
- [3] Chree C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications // *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1889. Vol. 14. P. 250–309.
- [4] Field G. S. Velocity of sound in cylindrical rods // *Canadian J. Research.* 1931. Vol. 5. P. 619–624.
- [5] Shear S. K., Focke A. B. The dispersion of supersonic waves in cylindrical rods of polycrystalline silver, nickel and magnesium // *Phys. Rev.* 1940. Vol. 57. P. 532–537.
- [6] Hudson G. E. Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders // *Phys. Rev.* 1943. Vol. 63. P. 46–51.
- [7] Kolsky H. *Stress Waves in Solids.* Oxford: Clarendon Press, 1953.
- [8] Redwood M., Lamb J. On propagation of high frequency compressional waves in isotropic cylinders // *Proc. Phys. Soc. Section B. London.* 1957. Vol. 70, no. 1. P. 136–143.
- [9] Onoe M., McNiven H. D., Mindlin R. D. Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 1962. Vol. 29. P. 729–734.
- [10] Hutchinson J. R., Percival C. M. Higher modes of longitudinal wave propagation in thin rod // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1968. Vol. 44. P. 1204–1210.
- [11] Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1972. Vol. 51. P. 265–283.
- [12] Graff K. F. *Wave motion in elastic solids.* New York: Dover, 1991. 692 p.
- [13] Abramson H. N. Flexural waves in elastic beams of circular cross section // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1957. Vol. 29. P. 1284–1286.
- [14] Pao Y.-H., Mindlin R. D. Dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinders // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1960. Vol. 27. P. 513–520.
- [15] Kovalev V. A., Radaev Y. N. *Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics.* Saratov: Izd-vo Saratov Univ., 2010. 340 p. (in Russian).
- [16] Vatul'yan A. O., Yurov V. O. Wave Processes in a Hollow Cylinder in an Inhomogeneous Prestress Field // *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* 2016. Vol. 57, no. 4. P. 182–191. (in Russian).
- [17] Zhou W. et al. Guided torsional wave generation of a linear in-plane shear piezoelectric array in metallic pipes // *Ultrasonics.* 2016. Vol. 65. P. 69–77.

---

*Mokryakov Viacheslav Viktorovich*, Ph. D., Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

- 
- [18] Murav'eva O. V., Len'kov S. V., Murashov S. A. Torsional Waves Excited by Electromagnetic-Acoustic Transducers During Guided-Wave Acoustic Inspection of Pipelines // *Acust. Zh.* 2016. Vol. 62, no. 1. P. 117–124. (in Russian).
  - [19] Garcia-Sanchez D. et al. Acoustic confinement in superlattice cavities // *Phys. Rev. A.* 2016. Vol. 94. P. 033813–1 – 033813–6.
  - [20] Othman R. A fractional equation to approximate wave dispersion relation in elastic rods // *Strain.* 2017. Vol. 53, no. 4. e12228. P. 1–10.
  - [21] Li Z., Jing L., Murch R. Propagation of monopole source excited acoustic waves in a cylindrical high-density polyethylene pipeline // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2017. Vol. 142. P. 3564–3579.
  - [22] Zima B., Rucka M. Guided ultrasonic waves for detection of debonding in bars partially embedded in grout // *Constr. Build. Mat.* 2018. Vol. 168. P. 124–142.
  - [23] Ilyashenko A. V., Kuznetsov S. V. Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.* 2018. Vol. 88, no. 8. P. 1385–1394.
  - [24] Mokryakov V. Maxima of the Stresses in the Longitudinal Pochhammer–Chree Waves // *Mech. Solids.* 2019. Vol. 54, no. 7. P. 1063–1075.
  - [25] Mokryakov V. Maximal stresses of the longitudinal Pochhammer–Chree waves // *Procedia Structural Integrity.* 2019. Vol. 23. P. 143–148.