

М. А. Волков, А. И. Демин, В. А. Городцов, Д. С. Лисовенко

## ДВУХСЛОЙНЫЕ ПЛАСТИНЫ ИЗ ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ И КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Рассмотрена задача продольного растяжения двухслойных пластин из гексагональных и кубических кристаллов при различной ориентации слоев. Получены аналитические зависимости модуля Юнга и коэффициентов Пуассона пластин от отношения толщин. Проведен численный анализ изменчивости эффективных характеристик пластин из всех возможных комбинаций гексагональных и кубических кристаллов. Установлено, что существенное нарушение правила смесей для эффективного модуля Юнга двухслойной пластины происходит, если один из двух слоев заполняет ауксетик. Эффективный модуль Юнга может превосходить модуль Юнга кристаллов в обоих слоях близкой жесткости. Отношение модулей Юнга кристаллов в обоих слоях оказывает существенное влияние и на эффективный коэффициент Пуассона.

**Ключевые слова:** двухслойные пластины, эффективные характеристики, кубические кристаллы, гексагональные кристаллы

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.011

УДК: 539.32

---

© Волков М. А., Демин А. И., Городцов В. А., Лисовенко Д. С., 2020

*Волков Михаил Андреевич*

e-mail: volkovmikh@gmail.com, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Демин Александр Иванович*

e-mail: deminaliv@gmail.com, аспирант, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Городцов Валентин Александрович*

e-mail: gorod@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Лисовенко Дмитрий Сергеевич*

e-mail: lisovenk@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-79-10270.

Поступила 01.05.2020

## Введение

Последнее время материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетички) привлекают все больше внимания [1, 2]. В силу своих необычных свойств наличие ауксетических включений существенно влияет на механическое поведение композитных материалов в сравнении с композитами из материалов с положительным коэффициентом Пуассона. Исследования слоистых композитов, содержащих слои с положительными и отрицательными коэффициентами Пуассона, первоначально касались изотропных материалов. В [3] дан анализ растяжения многослойных композитов. Авторами определены аналитические зависимости эффективного модуля Юнга при продольном и поперечном растяжении. Проведено сопоставление аналитических результатов с экспериментальными. Установлено, что в случае композитов с различными положительными коэффициентами Пуассона правила смесей нарушаются. Поведение эффективного модуля Юнга многослойных пластин с чередующимися ауксетическими и неауксетическими слоями при помощи метода конечных элементов исследовано в [4]. В работе принято, что модули Юнга слоев одинаковы, коэффициент Пуассона неауксетического слоя равен 0.4, а ауксетического -0.9. Авторами установлено, что эффективный модуль Юнга, соответствующий растяжению по нормали к плоскости пластины [5], может в несколько раз превосходить модули Юнга слоев и зависит от количества слоев и порядка их укладки. Выявлено, что сильное влияние на величину эффективного модуля Юнга оказывало отношение ширины слоя к его толщине. В [6] исследовано поведение двухслойных композитов, содержащих ауксетический слой, при растяжении по нормали к плоскости пластины. В работе принято, что модули Юнга обоих слоев равны, их коэффициенты Пуассона равны по величине и имеют разный знак. Установлено, что для таких композитов правила смесей не выполняются и эффективный модуль Юнга композита может значительно (в 1.5 раза) превосходить значение модуля Юнга слоев. Зависимость эффективного модуля Юнга двухслойного цилиндрического композита из ауксетического и неауксетического слоев от отношения модулей Юнга слоев при равных по величине коэффициентах Пуассона разного знака исследована в [7] при продольном растяжении композитов. Авторами установлено, что для таких пластин наблюдается существенное отличие эффективного модуля Юнга от значения, полученного с использованием правила смесей. Для некоторых отношений модулей Юнга пластин отмечено, что эффективный модуль Юнга может превосходить по своей величине наибольший из модулей Юнга слоев. Поведение концентрических цилиндрических трехслойных композитов с ауксетическими слоями анализируется в [7, 8], где исследуется растяжение и кручение таких композитов, соответственно. В [7] анализировался случай растяжения композита вдоль продольной оси. Наличие ауксетического слоя оказывало сильное влияние на величину эффективного модуля Юнга, хотя он оказался ограничен значениями модуля Юнга слоев. Аналогичное поведение было свойственно и эффективному коэффициенту Пуассона. Поведение тонких двухслойных пластин из кристаллов различных систем при продольном растяжении проанализировано в [9–12]. Авторами установлено, что эффективные модуль Юнга и коэффициенты Пуассона тонких двух- и трехслойных пластин из кристаллов могут значительно отличаться от значений, предсказываемых по правилам смесей. Для некоторых пластин эффективный модуль Юнга мог превосходить значения модуля Юнга составляющих кристаллов.

Ниже анализируются эффективные упругие характеристики при продольном растяжении двухслойных пластин из гексагональных и кубических кристаллов. В Разделе 2 получены формулы для эффективных упругих характеристик. В Разделе 3 и Разделе 4 проводится численный анализ эффективных упругих характеристик на основе экспериментальных данных по упругим константам из справочника [13]. В Разделе 5 приводится краткое заключение.

## 2. Продольное растяжение двухслойных пластин из гексагональных и кубических кристаллов

Рассмотрена задача продольного растяжения тонкой двухслойной пластины из гексагональных и кубических кристаллов. Считаем, что слой 1 заполняет гексагональный кристалл, а слой 2 – кубический. В каждом из слоев кристаллы ориентированы таким образом, что оси 6 и 4 порядка гексагонального и кубического кристалла, соответственно, нормальны плоскости пластины. В слое 1 кристаллофизические оси  $X_1$  и  $X_2$  направлены вдоль граней. В слое 2 оси  $X_1$  и  $X_2$  могут быть повернуты на некоторый угол  $\varphi$  в плоскости пластины (Рис.1). При таких ориентациях кристаллов, лабораторная система координат  $xyz$  совпадает с системой координат  $X_1X_2X_3$ . Для описания упругого поведения кристаллов в первом слое необходимо 5 независимых коэффициентов податливости  $(s_{11}^1, s_{12}^1, s_{13}^1, s_{33}^1, s_{44}^1)$ , во втором слое необходимо 7 коэффициентов  $(\bar{s}_{11}^2, \bar{s}_{12}^2, \bar{s}_{13}^2, \bar{s}_{16}^2, \bar{s}_{33}^2, \bar{s}_{44}^2, \bar{s}_{66}^2)$ , зависящих от угла  $\varphi$  и 3-х коэффициентов податливости кубического кристалла  $(s_{11}^2, s_{12}^2, s_{44}^2)$ . Здесь и далее верхний индекс обозначает номер пластины. Эти коэффициенты образуют матрицы

$$\|s_{ij}^1\| = \begin{pmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{13}^1 & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^1 & s_{11}^1 & s_{13}^1 & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^1 & s_{13}^1 & s_{33}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11}^1 - s_{12}^1) \end{pmatrix},$$

$$\|\bar{s}_{ij}^2\| = \begin{pmatrix} \bar{s}_{11}^2 & \bar{s}_{12}^2 & \bar{s}_{13}^2 & 0 & 0 & \bar{s}_{16}^2 \\ \bar{s}_{12}^2 & \bar{s}_{11}^2 & \bar{s}_{13}^2 & 0 & 0 & -\bar{s}_{16}^2 \\ \bar{s}_{13}^2 & \bar{s}_{13}^2 & \bar{s}_{33}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{s}_{44}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{s}_{44}^2 & 0 \\ \bar{s}_{16}^2 & -\bar{s}_{16}^2 & 0 & 0 & 0 & \bar{s}_{66}^2 \end{pmatrix},$$

где  $\bar{s}_{ij}^2$  – эффективные коэффициенты податливости, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} \bar{s}_{11}^2 &= s_{11}^2 - 0.5\Delta \sin^2 2\varphi, \\ \bar{s}_{12}^2 &= s_{12}^2 + 0.5\Delta \sin^2 2\varphi, \\ \bar{s}_{13}^2 &= s_{12}^2, \quad \bar{s}_{16}^2 = -0.5\Delta \sin 4\varphi \\ \bar{s}_{44}^2 &= s_{44}^2, \quad \bar{s}_{66}^2 = s_{44}^2 + 2\Delta \sin^2 2\varphi, \\ \Delta &= s_{11}^2 - s_{12}^2 - 0.5s_{44}^2. \end{aligned}$$

Предполагается, что деформации однородны

$$\varepsilon_{xx}^1 = \varepsilon_{xx}^2, \quad \varepsilon_{yy}^1 = \varepsilon_{yy}^2, \quad \varepsilon_{xy}^1 = \varepsilon_{xy}^2. \quad (1)$$

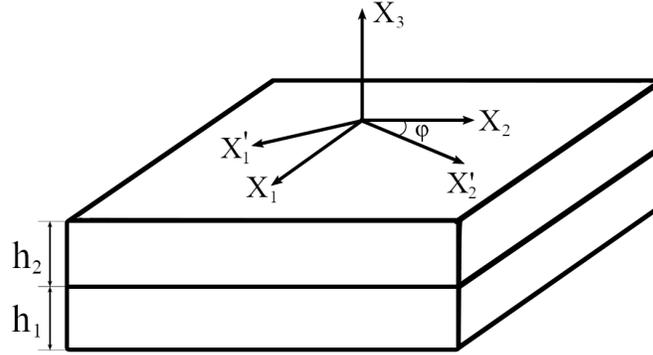


Рис. 1. Ориентация кристаллофизических систем координат двухслойной пластины

Продольное растяжение тонкой двухслойной пластины в направлении оси  $x$  удельной силой  $P$  позволяет написать уравнения равновесия следующим образом

$$h_1 \sigma_{xx}^1 + h_2 \sigma_{xx}^2 = P, \quad h_1 \sigma_{yy}^1 + h_2 \sigma_{yy}^2 = 0. \quad (2)$$

Отсутствие изгибного момента накладывает следующее ограничение на компоненты напряжений

$$\int_0^{h_1} \sigma_{xy}^1 z dz + \int_{h_1}^{h_1+h_2} \sigma_{xy}^2 z dz = 0. \quad (3)$$

Закон Гука для каждого из слоев имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^1 = s_{11}^1 \sigma_{xx}^1 + s_{12}^1 \sigma_{yy}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 = s_{12}^1 \sigma_{xx}^1 + s_{11}^1 \sigma_{yy}^1 \\ \varepsilon_{zz}^1 = s_{13}^1 (\sigma_{xx}^1 + \sigma_{yy}^1) \\ \varepsilon_{xy}^1 = 2 (s_{11}^1 - s_{12}^1) \sigma_{xy}^1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx}^2 = \bar{s}_{11}^2 \sigma_{xx}^2 + \bar{s}_{12}^2 \sigma_{yy}^2 + \bar{s}_{16}^2 \sigma_{xy}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 = \bar{s}_{12}^2 \sigma_{xx}^2 + \bar{s}_{11}^2 \sigma_{yy}^2 - \bar{s}_{16}^2 \sigma_{xy}^2 \\ \varepsilon_{zz}^2 = \bar{s}_{13}^2 (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2) \\ \varepsilon_{xy}^2 = \bar{s}_{16}^2 (\sigma_{xx}^2 - \sigma_{yy}^2) + \bar{s}_{66}^2 \sigma_{xy}^2 \end{cases} \quad (4)$$

С использованием условий (1)-(3) из уравнений (4) определяются компоненты напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^1 &= \frac{h_2 (s_{11}^1 k_1 - s_{12}^1 k_2) + h_1 ((k_1)^2 - (k_2)^2)}{(h_2 s_{11}^1 + h_1 k_1)^2 - (h_2 s_{12}^1 + h_1 k_2)^2} P, & \sigma_{yy}^1 &= h_2 \frac{s_{11}^1 k_2 - s_{12}^1 k_1}{(h_2 s_{11}^1 + h_1 k_1)^2 - (h_2 s_{12}^1 + h_1 k_2)^2} P, \\ \sigma_{xx}^2 &= \frac{h_2 ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2) + h_1 (s_{11}^1 k_1 - s_{12}^1 k_2)}{(h_2 s_{11}^1 + h_1 k_1)^2 - (h_2 s_{12}^1 + h_1 k_2)^2} P, & \sigma_{yy}^2 &= -h_1 \frac{s_{11}^1 k_2 - s_{12}^1 k_1}{(h_2 s_{11}^1 + h_1 k_1)^2 - (h_2 s_{12}^1 + h_1 k_2)^2} P. \\ \sigma_{xy}^1 &= \frac{\bar{s}_{16}^2 (2h_1 + h_2)}{2(2h_1 + h_2) h_2 (s_{11}^1 - s_{12}^1) + (h_1)^2 \bar{s}_{66}^2} \left[ \frac{h_2 (s_{11}^1 - s_{12}^1)}{h_2 (s_{11}^1 - s_{12}^1) + h_1 (k_1 - k_2)} \right] P, \\ \sigma_{xy}^2 &= -\frac{\bar{s}_{16}^2 h_1}{2(2h_1 + h_2) h_2 (s_{11}^1 - s_{12}^1) + (h_1)^2 \bar{s}_{66}^2} \left[ \frac{h_1 (s_{11}^1 - s_{12}^1)}{h_2 (s_{11}^1 - s_{12}^1) + h_1 (k_1 - k_2)} \right] P, \end{aligned}$$

где

$$k_1 = \bar{s}_{11}^2 + \frac{(\bar{s}_{16}^2 h_1)^2}{2(2h_1 + h_2) h_2 (s_{11}^1 - s_{12}^1) + h_1^2 \bar{s}_{66}^2}, \quad k_2 = \bar{s}_{12}^2 - \frac{(\bar{s}_{16}^2 h_1)^2}{2(2h_1 + h_2) h_2 (s_{11}^1 - s_{12}^1) + h_1^2 \bar{s}_{66}^2},$$

Им соответствуют деформации

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^1 &= \varepsilon_{xx}^2 = \frac{s_{11}^1 h_1 ((k_1)^2 - (k_2)^2) + k_1 h_2 ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2)}{(h_2 s_{11}^1 + h_1 k_1)^2 - (h_2 s_{12}^1 - h_1 k_2)^2} P, \\ \varepsilon_{yy}^1 &= \varepsilon_{yy}^2 = \frac{s_{12}^1 h_1 ((k_1)^2 - (k_2)^2) + k_2 h_2 ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2)}{(h_2 s_{11}^1 + h_1 k_1)^2 - (h_2 s_{12}^1 - h_1 k_2)^2} P, \\ \varepsilon_{zz}^1 &= s_{13}^1 \frac{k_1 + k_2}{h_2 (s_{11}^1 + s_{12}^1) + h_1 (s_{11}^2 + s_{12}^2)} P, \quad \varepsilon_{zz}^2 = \bar{s}_{13}^2 \frac{h_2 ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2) + h_1 (s_{11}^1 + s_{12}^1) (k_1 + k_2)}{(h_2 s_{11}^1 + h_1 k_1)^2 - (h_2 s_{12}^1 + h_1 k_2)^2} P.\end{aligned}$$

Выражения для эффективных модуля Юнга и коэффициентов Пуассона пластины принимают вид

$$E^{eff} = \frac{(\lambda s_{11}^1 + k_1)^2 - (\lambda s_{12}^1 + k_2)^2}{(1 + \lambda) [s_{11}^1 (k_1 - k_2)^2 + k_1 \lambda ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2)]}, \quad (5)$$

$$\nu_{xy}^{eff} = \frac{s_{12}^1 ((k_1)^2 - (k_2)^2) + k_2 \lambda ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2)}{k_1 \lambda ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2) + s_{11}^1 ((k_1)^2 - (k_2)^2)}, \quad (6)$$

$$\nu_{xz}^{1\, eff} = -s_{13}^1 (k_1 + k_2) \frac{\lambda (s_{11}^1 - s_{12}^1) + k_1 - k_2}{\lambda k_1 ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2) + s_{11}^1 ((k_1)^2 - (k_2)^2)}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\nu_{xz}^{2\, eff} &= -\bar{s}_{13}^2 (s_{11}^1 + s_{12}^1) \frac{\lambda (s_{11}^1 - s_{12}^1) + k_1 - k_2}{\lambda k_1 ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2) + s_{11}^1 ((k_1)^2 - (k_2)^2)}, \quad (8) \\ \lambda &= h_2/h_1\end{aligned}$$

Данные эффективные характеристики являются функциями коэффициентов упругости слоев, отношения толщин  $\lambda$  и угла  $\varphi$  с периодом  $\pi/2$ . Если ввести обозначения

$$\alpha = 1 + \frac{\Lambda}{1 + \Lambda} \frac{[\nu_{xy}^1 - \nu_{xy}^2]^2}{1 - (\nu_{xy}^2)^2 + \Lambda [1 - (\nu_{xy}^1)^2]},$$

$$\langle E \rangle = \frac{1 + \Lambda}{1 + \lambda} E^1, \quad \Lambda = \lambda \frac{E^2}{E^1},$$

$$E^k = \frac{1}{s_{11}^k}, \quad \nu_{xy}^k = -\frac{s_{12}^k}{s_{11}^k}, \quad k = 1, 2,$$

$$\nu_{xz}^1 = -\frac{s_{13}^1}{s_{11}^1}, \quad \nu_{xz}^2 = -\frac{s_{12}^2}{s_{11}^2}$$

$$\langle \nu \rangle = \frac{\nu_{xy}^1 + \lambda \nu_{xy}^2}{1 + \lambda}$$

то в частном случае кристаллов с  $\varphi = 0$  выражения (5)–(8) можно переписать в виде

$$E^{eff} = \frac{P}{(h_1 + h_2) \varepsilon_{xx}} = \alpha \langle E \rangle, \quad (9)$$

$$\nu_{xy}^{eff} = \frac{\nu_{xy}^1 [1 - (\nu_{xy}^2)^2] + \nu_{xy}^2 \Lambda [1 - (\nu_{xy}^1)^2]}{1 - (\nu_{xy}^2)^2 + \Lambda [1 - (\nu_{xy}^1)^2]}, \quad (10)$$

$$\nu_{xz}^{1\, eff} = \nu_{xz}^1 (1 - \nu_{xy}^2) \frac{\Lambda (1 + \nu_{xy}^1) + 1 + \nu_{xy}^2}{1 + (\nu_{xy}^2)^2 + \Lambda [1 - (\nu_{xy}^1)^2]}, \quad (11)$$

$$\nu_{xz}^{2\, eff} = \nu_{xz}^2 (1 - \nu_{xy}^1) \frac{\Lambda (1 + \nu_{xy}^1) + 1 + \nu_{xy}^2}{1 + (\nu_{xy}^2)^2 + \Lambda [1 - (\nu_{xy}^1)^2]}. \quad (12)$$

Здесь  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности между эффективным модулем Юнга (5) и средневзвешенным модулем Юнга  $\langle E \rangle$ ,  $\langle \nu \rangle$  – средневзвешенный коэффициент Пуассона.

С использованием значений коэффициентов упругости из справочника [13] был проведен численный анализ изменчивости эффективных модуля Юнга и коэффициентов Пуассона двухслойных пластин из гексагональных и кубических кристаллов. В справочнике приведены данные более чем для 1000 кубических и 170 гексагональных кристаллов. Одна четверть всех кубических кристаллов являются ауксетиками [14]. К таким материалам можно отнести калий, кальций, железо, литий, никель и т.д. При выбранной ориентации кристаллофизической системы координат ауксетиками оказываются кристаллы Zn и MoS<sub>2</sub> [15].

### 3. Эффективные характеристики двухслойных пластин из гексагональных и кубических кристаллов при одинаковой ориентации кристаллофизических систем координат в слоях

Значения эффективного модуля Юнга большинства пластин (75% всех рассмотренных) из двух неауксетических кристаллов практически совпадают с значениями, предсказанными по правилу смесей (Фойгта) ( $|1 - \alpha| < 0.01$ ). Среди всех проанализированных пластин из двух неауксетиков, коэффициент  $\alpha$  меняется в диапазоне  $1.0 \leq \alpha \leq 1.25$ . Если же в одном из слоев находится кристалл с отрицательным коэффициентом Пуассона, то эффективный модуль Юнга пластины может гораздо сильнее отклоняться от значений, предсказываемых правилом смесей. У таких пластин коэффициент  $\alpha$  меняется в диапазоне  $1.0 \leq \alpha \leq 1.68$ .

Таблица 1. Максимальные значения параметра  $\alpha_{max}$  и отношения эффективного модуля Юнга  $E^{eff}$  к модулю Юнга наиболее жесткого слоя ( $E_{max}$ ) некоторых пластин из неауксетических гексагональных и кубических кристаллов

Пластина	$\alpha_{max}$	$\lambda$	$\left(\frac{E^{eff}}{E_{max}}\right)_{max}$	$\lambda_{max}$	$E^1$ , ГПа	$\nu_{xy}^1$	$E^2$ , ГПа	$\nu_{xy}^2$
CuCl–TetraCyanoethylene	1.13	1.27	1.10	1.70	18.9	0.68	20.2	0.05
In <sub>2</sub> Bi–TetraCyanoethylene	1.15	1.16	1.07	2.44	16.4	0.72	20.2	0.05
CuCl–NaH(CH <sub>3</sub> COO) <sub>2</sub>	1.08	1.28	1.06	1.71	18.9	0.68	19.7	0.20
Ti–SnTe–25 mole% GeTe	1.06	1.15	1.06	1.12	103	0.49	103	0.03
Cd–Mg 14.01 at% Mg–NiTi	1.05	0.90	1.05	0.90	47.8	0	47.8	0.44
Co–Li <sub>2</sub> O	1.04	1.11	1.03	1.30	195	0.46	198	0.09

У ряда двухслойных пластин (около 500 из 188000) значения эффективного модуля Юнга превосходят модули Юнга наиболее жесткого слоя. Все эти пластины имеют близкие значения модуля Юнга слоев ( $E^1$  и  $E^2$ ). Как правило, разница между величинами  $E^1$  и  $E^2$  составляет не более 1 ГПа. Наибольший эффект среди пластин из двух неауксетиков достигается в случае кристаллов CuCl и tetraCyanoEthylene (Рис.2(а)). Коэффициент  $\alpha$  для этой пластины меняется в интервале  $1.04 \leq \alpha \leq 1.12$ , наибольшее различие достигается при  $\lambda = 1.29$ . У этой пластины оба слоя имеют близкие модули Юнга небольшой величины – около 20 ГПа. Такой эффект наблюдается и для двухслойных пластин с большими значениями модуля Юнга. Например, он имеет место у пластины из неауксетических кристаллов Ti и SnTe - 12 mole %

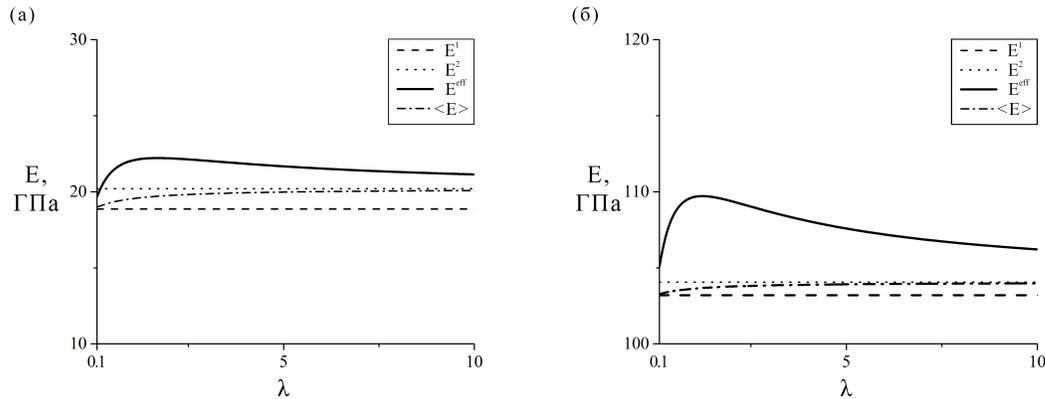


Рис. 2. Эффективный модуль Юнга по правилу смесей, эффективный модуль Юнга двух-слойной пластины CuCl и TetraCyanoethylene (а) и Ti-SnTe 12 mole % GeTe (б) при  $\varphi = 0$

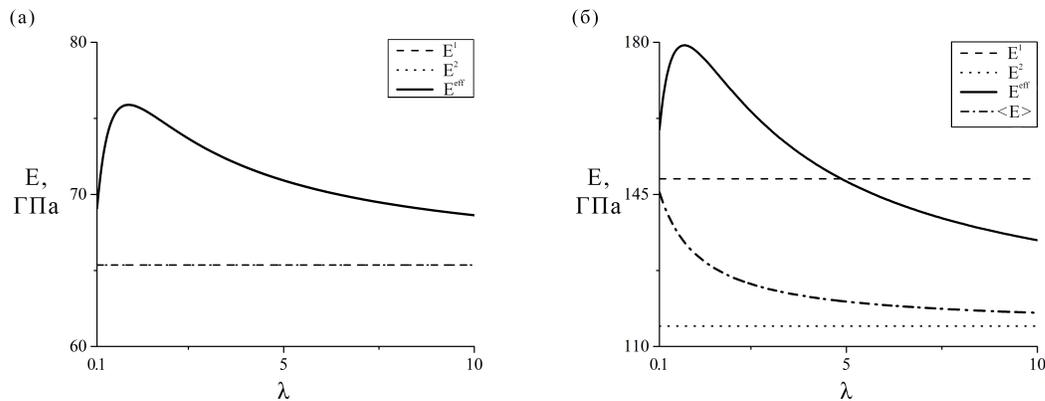


Рис. 3. Эффективный модуль Юнга двухслойных пластин Ho-Sm<sub>0.75</sub>Tm<sub>0.25</sub>S(а) и Mn<sub>5</sub>Si<sub>3</sub>-TmSe(б) при  $\varphi=0$

GeTe, у которой модули Юнга обоих слоев превосходят 100 ГПа. Эффективный модуль Юнга этой пластины при некоторых отношениях толщин превосходит модуль Юнга наиболее жесткого слоя на 5% (Рис.2(б)). Для всех пластин из Табл.1 модули Юнга слоев имеют близкие значения, однако их коэффициенты Пуассона значительно отличаются. Если значения модулей Юнга слоев близки, как в случае кристаллов Ho и Sm<sub>0.75</sub>Tm<sub>0.25</sub>S ( $E^1 = 65.4$  ГПа и  $E^2 = 65.4$  ГПа), а коэффициенты Пуассона значительно отличаются ( $\nu_{xy}^1 = 0.28$ ,  $\nu_{xy}^2 = -0.46$ ), то эффективный модуль Юнга существенно отклоняется от значения, рассчитанного по правилу смесей (Рис.3(а)). У данной пластины при  $0.1 \leq \lambda \leq 10$  коэффициент  $\alpha$  меняется в пределах  $1.05 \leq \alpha \leq 1.16$  с максимумом  $\alpha_{max} = 1.16$  при  $\lambda = 0.92$ , что соответствует  $E^{eff} = 75.9$  ГПа. Пластина, составленная из кристаллов Ti и TmSe (Рис.4), является другим примером такого поведения. Максимальное значение ее эффективного модуля Юнга  $E^{eff} = 148$  ГПа, что превышает модули Юнга исходных кристаллов

Таблица 2. Максимальные значения параметра  $\alpha_{max}$  и отношения эффективного модуля Юнга  $E^{eff}$  к модулю Юнга наиболее жесткого слоя ( $E_{max}$ ) некоторых пластин из гексагональных и кубических кристаллов с ауксетическим слоем

Пластина	$\alpha_{max}$	$\lambda$	$\left(\frac{E^{eff}}{E_{max}}\right)_{max}$	$\lambda_{max}$	$E^1$ , ГПа	$\nu_{xy}^1$	$E^2$ , ГПа	$\nu_{xy}^2$
BN <sub>3</sub> -TmSe	1.42	1.21	1.30	0.88	138	0.55	115	-0.50
Ti-TmSe	1.36	0.87	1.29	1.06	103	0.89	115	-0.50
Ti-Sm <sub>0.7</sub> Y <sub>0.3</sub> S	1.31	1.11	1.25	0.89	103	0.89	93.0	0.49
Ho-Sm <sub>0.75</sub> Tm <sub>0.25</sub> S	1.16	0.92	1.16	0.92	65.4	0.28	65.4	-0.46

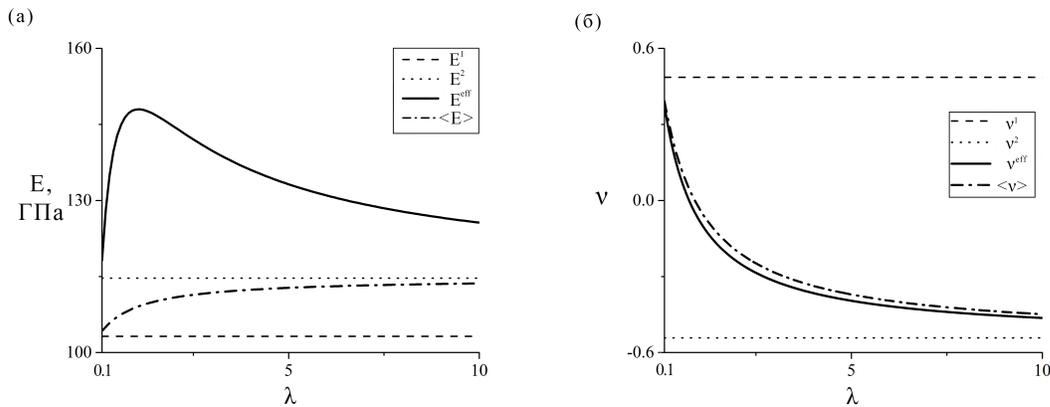


Рис. 4. Распределения эффективного модуля Юнга (а) и продольного коэффициента Пуассона (б) по параметру толщины двухслойной пластины из кристаллов Ti и TmSe при  $\varphi=0$

более чем на 30 ГПа ( $E^1 = 103$  ГПа,  $E^2 = 115$  ГПа) при  $\lambda = 1.04$ . Подобный эффект наблюдается в случаях, когда модули Юнга слоев различаются на несколько десятков ГПа (Рис.3(б)), но только при значительном различии величин  $\nu_{xy}^1$  и  $\nu_{xy}^2$  (более 0.7). Такое поведение характерно более чем для 1100 (из 74310) пластин с ауксетическим и неауксетическим слоями при  $\varphi = 0$ . Качественно поведение эффективного коэффициента Пуассона пластин с ауксетическим слоем не отличается от поведения для случая двух неауксетиков. Для ряда пластин с ауксетическими слоями возможна ситуация, когда пластина является ауксетической, с эффективным коэффициентом Пуассона меньшей величины, чем даваемый правилом смесей, а ее эффективный модуль Юнга превосходит значение модуля Юнга наиболее жесткого слоя (Рис.4).

У всех пластин величина продольного эффективного коэффициента Пуассона ограничена величинами коэффициентов Пуассона слоев. Существенное влияние на величину эффективных коэффициентов Пуассона оказывает отношение модулей Юнга  $E^2/E^1$ . Это видно на примере пластин с гексагональным кристаллом C<sub>7</sub>H<sub>12</sub>. Его модуль Юнга имеет низкую величину ( $E^1 = 0.74$  ГПа), а коэффициент Пуассона выходит за ограничения для изотропных материалов ( $\nu_{xy}^1 = 0.76$ ). На Рис.5(а) и Рис.5(б) представлены зависимости эффективного модуля Юнга и коэффициентов Пуассона пластины C<sub>7</sub>H<sub>12</sub>-C(алмаз) ( $E^2 = 1051$  ГПа,  $\nu_{xy}^2 = 0.10$ ). Значения эффективного модуля

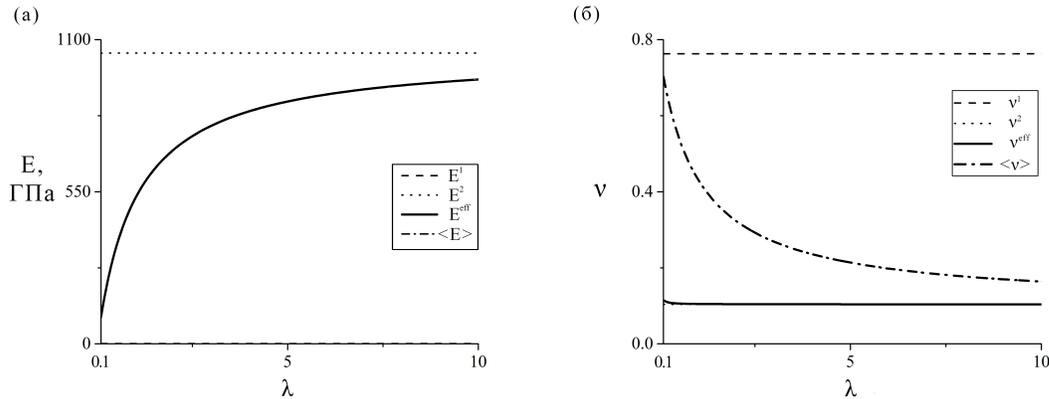


Рис. 5. Эффективный модуль Юнга (а) и коэффициенты Пуассона (б) двухслойной пластины из кристаллов  $C_7H_{12}$  и  $C$  при  $\varphi = 0$

Юнга данной пластины неотличимы от значений, даваемых правилом смесей, а эффективный коэффициент Пуассона  $\nu_{xy}^{eff}$  практически не отличается от коэффициента Пуассона алмаза, но демонстрирует существенное отклонение от  $\langle \nu \rangle$ . Аналогичное поведение наблюдается, если более жестким является слой 1: эффективный модуль Юнга практически не отличается от  $\langle E \rangle$ , а эффективный коэффициент Пуассона почти неотличим от  $\nu_{xy}$  более жесткого слоя. В случае, когда пластины имеют близкие значения модуля Юнга, эффективный коэффициент Пуассона практически не отличается от значений, предсказанных по правилу смесей.

#### 4. Эффективные характеристики двухслойных пластин при различной ориентации кристаллофизических систем координат

При учете ненулевого угла  $\varphi$  количество пластин, для которых эффективные значения модуля Юнга существенно отклоняются от значений, предсказанных правилом смесей, увеличивается. При одинаковой ориентации кристаллофизических систем координат таких пластин около 400. Если двухслойная пластина составлена из неауксетических кристаллов различной ориентации, то этот эффект проявляется более чем у 3000 пластин (из 113568), а в случаях когда один из слоев является ауксетиком количество таких пластин составляет 11 425 (из 74310). Это в несколько раз превосходит количество пластин с таким поведением при  $\varphi = 0$ . Отметим, что при нулевом угле ориентации ауксетиками являются кубические кристаллы только с  $s_{12} > 0$ . У кубических кристаллов с  $s_{12} < 0$  ауксетические свойства могут проявляться при углах ориентации близких к  $\pi/4$ . Наибольшее различие между величиной эффективного модуля Юнга и модулей Юнга слоев в относительных и абсолютных величинах имеет место у пластин  $CuCl-NiCr_2O_4$  (Рис.6(a)) и  $Ag_2Al - Cu-14.5 \text{ wt\% } Al-3.15 \text{ wt\% } Ni$  (Рис.6(б)), соответственно. Первая пластина составлена из кристаллов с близкими величинами модуля Юнга ( $E^1 = 18.9 \text{ ГПа}$ ,  $E^2 = 26.0 \text{ ГПа}$ ) и большим различием между коэффициентами Пуассона ( $\nu_{xy}^1 = 0.68$ ,  $\nu_{xy}^2 = -0.77$ ). Эффективный модуль Юнга этой пластины достигает своей максимальной величины  $E^{eff} = 46.7 \text{ ГПа}$  при  $\lambda = 0.85$ , что почти на 80% превосходит модуль Юнга наиболее жесткого слоя. В случае пластины  $Ag_2Al - Cu-14.5 \text{ wt\% } Al-3.15 \text{ wt\% } Ni$  модули Юнга слоев равны  $E^1 = 84.0 \text{ ГПа}$ ,

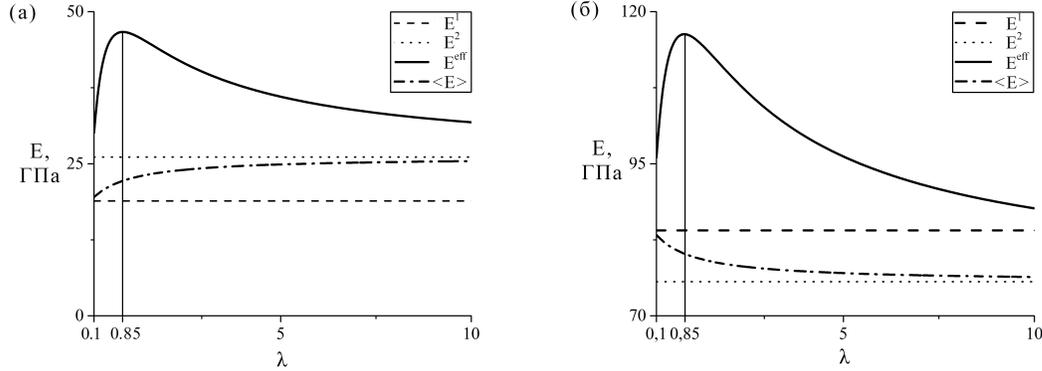


Рис. 6. Эффективный модуль Юнга пластин  $\text{CuCl-NiCr}_2\text{O}_4$  (а) и  $\text{Ag}_2\text{Al-Cu-14.5 wt\% Al-3.15 wt\% Ni}$  (б) при  $\varphi = \pi/4$

$E^2 = 75.6$  ГПа, а эффективный модуль Юнга равен  $E^{\text{eff}} = 116$  ГПа, который достигается при  $\lambda = 0.85$ , что почти на 38% превосходит модуль Юнга наиболее жесткого слоя. Экстремальные значения эффективного модуля Юнга почти всех пластин достигаются при  $\varphi = 0$  или  $\varphi = \pi/4$ . Исключением являются двухслойные пластины, составленные из гексагональных кристаллов ( $\text{Be}$ ,  $\text{MoS}_2$ ,  $\text{Zn}$ ) с близкими к нулю коэффициентами Пуассона  $\nu_{xy}$  и кубических кристаллов  $\text{W}$ ,  $\text{Ti-71 at\% V}$ ,  $\text{Mo-26.9 at\% Re}$ ,  $\{\text{Gd}_{0.67}\text{Er}_{0.33}\}_3(\text{Sc}, \text{Ga})_2\text{Ga}_3\text{O}_{12}$  с близким к нулю параметром анизотропии  $\Delta$ , чьи эффективные характеристики практически не изменяются с  $\varphi$ .

Эффективный продольный коэффициент Пуассона при изменении отношения толщин от 0.1 до 10 принимает отрицательные значения только для пластин, у которых один из слоев является ауксетиком. Не обнаружено пластин, для которых эффективный продольный коэффициент Пуассона имел бы отрицательные значения большей величины, чем у составляющих кристаллов. С изменением угла  $\varphi$  поведение пластины может значительно изменяться за счет того, что коэффициент Пуассона одного из слоев становится отрицательным. Такое поведение имеет место у пластины из кристаллов  $\text{C}_7\text{H}_{12}$  и  $\text{TmSe}$ . При  $\varphi = 0$  кристалл  $\text{TmSe}$  является ауксетиком и эффективный продольный коэффициент Пуассона пластины отрицателен (Рис.7(а)), а при  $\varphi = \pi/4$   $\nu_{xy}^{\text{eff}} > 0$  (Рис.7(б)) для всех отношений толщин. Некоторые пластины могут иметь отрицательный эффективный продольный коэффициент Пуассона значительной величины и эффективный модуль Юнга, превышающий значение модуля Юнга наиболее жесткого слоя. Примерами таких пластин являются  $\text{C}_7\text{H}_{12} - \text{In-25 at\% Tl}$  и  $\text{Cd-Mg 14.01 at\% Mg} - \{\text{Y}_{0.74}\text{Er}_{0.26}\}\text{Al}_5\text{O}_{12}$ .

Важным частным случаем является случай двухслойной пластины из различным образом ориентированных гексагонального и кубического кристаллов одинаковой толщины. Эффективный модуль Юнга пластин, составленных из двух неауксетических слоев, при  $\lambda = 1$  может превосходить модуль Юнга наиболее жесткого слоя. Таких пластин насчитывается более 2500 и во всех случаях наибольшее различие между эффективным модулем Юнга и наибольшим модулем Юнга составляющего слоя достигается при  $\varphi = 0$  или  $\varphi = \pi/4$ . Более чем у 7600 пластин (из 113000) коэффициент

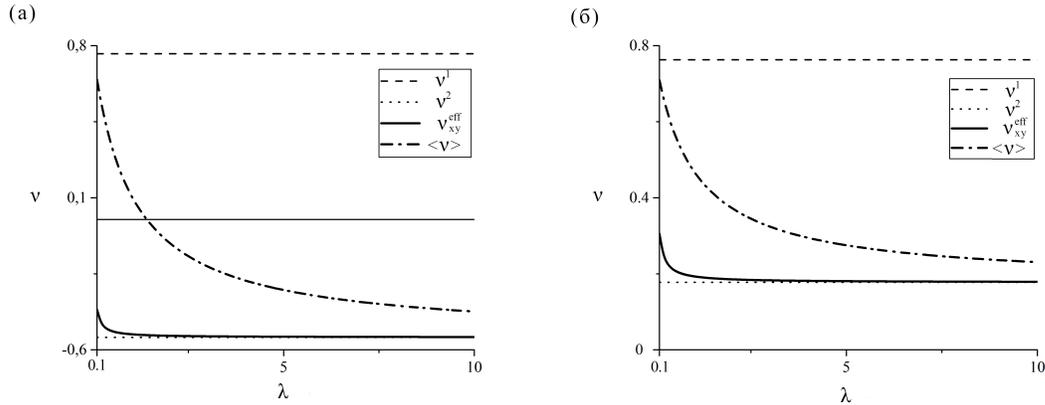


Рис. 7. Эффективный продольный коэффициент Пуассона  $\nu_{xy}^{eff}$  двухслойной пластины  $C_7H_{12} - TmSe$  при  $\varphi = 0$  (а) и  $\varphi = \pi/4$ (б)

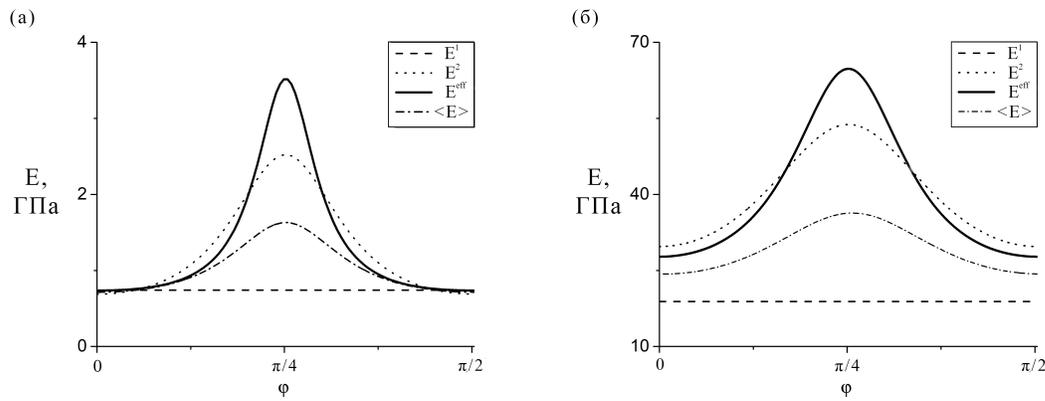


Рис. 8. Эффективный модуль Юнга  $E^{eff}$  и средний модуль Юнга по Фойгту  $\langle E \rangle$  двухслойных пластин  $C_7H_{12} - In-25 \text{ at\% Tl}$  (а) и  $CuCl - \{Y_{0.74}Er_{0.26}\}Al_5O_{12}$  (б) при  $\lambda = 1$

$\alpha > 1.01$ . Более чем на 5% значения эффективного модуля Юнга превосходят значения модуля Юнга, предсказанного по правилу смесей, у 2300 пластин. Если один из слоев содержит ауксетик, то эффективный модуль Юнга превосходит значения модуля Юнга наиболее жесткого слоя у 9257 пластин из 74310. Количество пластин, для которых  $\alpha > 1.05$ , возрастает по сравнению с предыдущим случаем и составляет более 4700 пластин. В обоих случаях коэффициент  $\alpha$  меняется в широком диапазоне: от 0.9 до 1.26 в случае двух неауксетиков, и от 0.93 до 2.16 при наличии ауксетического слоя. Так, эффективный модуль Юнга более чем в 2 раза превосходит предсказание по правилу смесей у пластины  $C_7H_{12} - In-25 \text{ at\% Tl}$  (Рис.8(а)) и более чем на 75% у пластины  $CuCl - \{Y_{0.74}Er_{0.26}\}Al_5O_{12}$  (Рис.8(б)).

Эффективный продольный коэффициент Пуассона всех пластин из неауксетических кристаллов при переменном  $\varphi$  и  $\lambda = 1$  остается положительным. Минимальные значения этого эффективного коэффициента Пуассона практически у всех пластин

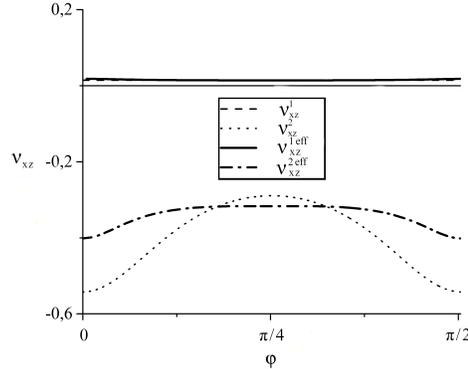


Рис. 9. Поперечные эффективные коэффициенты Пуассона пластины Be-TmSe при  $\lambda = 1$

достигаются при  $\varphi$  равном 0 или  $\pi/4$ , исключение составляют 400 пластин, содержащих кубические кристаллы с  $\Delta = 0$ . То же справедливо для пластинок, содержащих ауксетический слой. Среди таких пластин находятся те, для которых  $\nu_{xy}^{eff}$  отрицателен, однако не выявлено ни одной пластины для которой данный коэффициент Пуассона принимал бы отрицательные значения большей величины чем у исходных кристаллов.

Эффективные поперечные коэффициенты Пуассона большинства пластин положительны. Это связано с тем, что отношение, входящее в (7) и (8), всегда положительно. Данное отношение входит в оба эффективных поперечных коэффициента Пуассона и, поэтому, качественно поведение этих коэффициентов Пуассона для каждого слоя одинаковы. Эффективные поперечные коэффициенты Пуассона могут принимать отрицательные значения только для пластин с  $s_{13}^1 > 0$  или  $s_{12}^2 > 0$ . Пластина из кристаллов Be-TmSe (Рис.9) является примером пластины с таким поведением. В случае слоев одинаковой толщины ( $\lambda = 1$ ) эффективные поперечные коэффициенты Пуассона слоев значительно различаются. Такая пластина будет расширяться в поперечном направлении при растяжении.

### Заключение

Рассмотрена задача продольного растяжения двухслойных пластин из гексагональных и кубических кристаллов. Проведен анализ изменчивости эффективных характеристик пластин для всех возможных комбинаций из двух типов кристаллов перечисленных в справочнике [13]. Установлено, что значения эффективных характеристик пластин могут существенно отклоняться от значений, полученных по правилу смесей. Показано, что если модули Юнга исходных кристаллов имеют близкие значения, то эффективный модуль Юнга пластины может превосходить модуль Юнга наиболее жесткого слоя. Показано, что эффективный модуль Юнга может значительно превосходить модуль Юнга наиболее жесткого слоя как в абсолютных, так и в относительных величинах. Установлено, что на данный эффект оказывает существенное влияние разница между величинами коэффициента Пуассона кристаллов. Так, в случае если один из кристаллов является ауксетиком, при различии между модулями Юнга в несколько

десятков ГПа эффективный модуль Юнга превосходит модуль Юнга наиболее жесткого слоя при  $|\nu_{xy}^1 - \nu_{xy}^2| > 0.7$ . Не обнаружено пластин, для которых бы продольный коэффициент Пуассона  $\nu_{xy}^{eff}$  превосходил величины коэффициентов Пуассона, как положительные, так и отрицательные, исходных кристаллов. Значения  $\nu_{xy}^{eff}$  некоторых пластин значительно отличаются от значений даваемых правилом смесей по Фойгту.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Carneiro V. H., Meireles J., Puga H. Auxetic materials - A review // *Mater. Sci.-Pol.* 2013. Vol. 31, no. 4. P. 561–571. URL: <https://doi.org/10.2478/s13536-013-0140-6>.
- [2] Auxetic metamaterials and structures: a review / X. Ren, R. Das, P. Tran et al. // *Smart Mater. Struct.* 2018. Vol. 27, no. 2. p. 023001. URL: <https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaa61c>.
- [3] Liu B., Feng X., Zhang S.-M. The effective Young's modulus of composites beyond the Voigt estimation due to the Poisson effect // *Comp. Sci. Tech.* 2009. Vol. 69, no. 13. P. 2198–2204. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.06.004>.
- [4] Kocer C., McKenzie D. R., Bilek M. M. Elastic properties of a material composed of alternating layers of negative and positive Poisson's ratio // *Mater. Sci. Eng. A.* 2009. Vol. 505, no. 1-2. P. 111–115. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.msea.2008.11.002>.
- [5] Lim T. C. In-plane stiffness of semiauxetic laminates // *J. Eng. Mech.* 2010. T. 136, № 9. С. 1176–1180. URL: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000167](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000167).
- [6] Lim T. C. Out-of-plane modulus of semi-auxetic laminates // *Eur. J. Mech. A Solids.* 2009. Vol. 28, no. 4. P. 752–756. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2009.02.001>.
- [7] Streck T., Jopek H. Effective mechanical properties of concentric cylindrical composites with auxetic phase // *Phys Status Solidi B.* 2012. Vol. 249, no. 7. P. 1359–1365. URL: <http://dx.doi.org/10.1002/pssb.201084218>.
- [8] Lim T. C. Auxeticity of concentric auxetic-conventional foam rods with high modulus interface adhesive // *Materials.* 2018. Vol. 11, no. 2. p. 223. URL: <https://doi.org/10.3390/ma11020223>.
- [9] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Longitudinal elastic tension of two-layered plates from isotropic auxetics-nonauxetics and cubic crystals // *Eur. J. Mech. A. Solids.* 2017. Vol. 63. P. 122–127. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.01.001>.
- [10] Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S., Lim T.-C. Three-layered plate exhibiting auxeticity based on stretching and bending modes // *Compos. Struct.* 2018. Vol. 194. P. 643–651. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.03.092>.
- [11] Тонкие однородные двухслойные пластины из кубических кристаллов с различной ориентацией слоев / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов, Д.С. Лисовенко [и др.] // *Физ. Мезомех.* 2018. Т. 21, № 2. С. 5–13.
- [12] Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Tension of thin two-layered plates of hexagonal crystals // *Compos. Struct.* 2019. Vol. 209. P. 453–459. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.10.063>.
- [13] Second and Higher Order Elastic Constants / Ed. by D. F. Nelson. Springer, 1992. Vol. 29a of *Landolt-Börnstein - Group III Condensed Matter*. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/b44185>.
- [14] Отрицательный коэффициент Пуассона для кубических кристаллов и нано/микротрубок / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов, Д.С. Лисовенко [и др.] // *Физ. Мезомех.* 2014. Т. 16, № 6. С. 13–31.
- [15] Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Extreme values of Young's modulus and Poisson's ratio of hexagonal crystals // *Mech. Mater.* 2019. Vol. 134. P. 1–8.

M. A. Volkov, A. I. Demin, V. A. Gorodtsov, D. S. Lisovenko

## TWO-LAYERED PLATES OF HEXAGONAL AND CUBIC CRYSTALS

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS*

**Abstract.** The problem of longitudinal tension of two-layered plate of hexagonal and cubic crystals with different orientations of crystallophysic coordinate systems is discussed. Analytical dependences of effective Young's modulus and Poisson's ratios on layer thickness ratio are obtained. Numerical analysis of plates from all possible combinations of hexagonal and cubic crystals is performed. It is established that significant deviation of effective Young's modulus values from predictions by mixture rule takes place in the case when one of the layers is auxetic. Effective Young's modulus can have greater value than values of Young's modulus of crystals at both layers. The ratio of Young's modulus of crystals has great influence on the value of effective Poisson's ratio.

**Keywords:** two-layered plates, effective properties, cubic crystals, hexagonal crystals

### REFERENCES

- [1] Carneiro V. H., Meireles J., Puga H. Auxetic materials - A review // *Mater. Sci.-Pol.* 2013. Vol. 31, no. 4. P. 561–571. URL: <https://doi.org/10.2478/s13536-013-0140-6>.
- [2] Auxetic metamaterials and structures: a review / X. Ren, R. Das, P. Tran et al. // *Smart Materials and Structures.* 2018. Vol. 27, no. 2. p. 023001. URL: <https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaa61c>.
- [3] Liu B., Feng X., Zhang S.-M. The effective Young's modulus of composites beyond the Voigt estimation due to the Poisson effect // *Comp. Sci. Tech.* 2009. Vol. 69, no. 13. P. 2198–2204. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.06.004>.
- [4] Kocer C., McKenzie D. R., Bilek M. M. Elastic properties of a material composed of alternating layers of negative and positive Poisson's ratio // *Mater. Sci. Eng. A.* 2009. Vol. 505, no. 1-2. P. 111–115. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.msea.2008.11.002>.
- [5] Lim T. C. In-plane stiffness of semiauxetic laminates // *J. Eng. Mech.* 2010. Vol. 136, no. 9. P. 1176–1180. URL: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000167](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000167).
- [6] Lim T. C. Out-of-plane modulus of semi-auxetic laminates // *Eur. J. Mech. A Solids.* 2009. Vol. 28, no. 4. P. 752–756. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2009.02.001>.
- [7] Streck T., Jopek H. Effective mechanical properties of concentric cylindrical composites with auxetic phase // *Phys. Status Solidi B.* 2012. Vol. 249, no. 7. P. 1359–1365. URL: <http://dx.doi.org/10.1002/pssb.201084218>.
- [8] Lim T. C. Auxeticity of concentric auxetic-conventional foam rods with high modulus interface adhesive // *Materials.* 2018. Vol. 11, no. 2. p. 223. URL: <https://doi.org/10.3390/ma11020223>.
- [9] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Longitudinal elastic tension of two-layered plates from isotropic auxetics-nonauxetics and cubic crystals // *European Journal of Mechanics - A/Solids.* 2017. Vol. 63. P. 122–127. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.01.001>.

---

*Volkov Mikhail Andreevich*, Ph. D. Phys. & Math., Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

*Demin Aleksandr Ivanovich*, Postgraduate Stud., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

*Gorodtsov Valentin Aleksandrovich*, Dr. Sc. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

*Lisovenko Dmitry Sergeevich*, Dr. Sc. Phys. & Math., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

- 
- [10] Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S., Lim T.-C. Three-layered plate exhibiting auxeticity based on stretching and bending modes // *Compos. Struct.* 2018. Vol. 194. P. 643–651. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.03.092>.
- [11] Thin Homogeneous Two-Layered Plates of Cubic Crystals with Different Layer Orientation / R. V. Goldstein, V. A. Gorodtsov, D. S. Lisovenko et al. // *Physical Mesomechanics*. 2019. Vol. 22, no. 4. P. 261–268.
- [12] Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Tension of thin two-layered plates of hexagonal crystals // *Compos. Struct.* 2019. Vol. 209. P. 453–459. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.10.063>.
- [13] Second and Higher Order Elastic Constants / Ed. by D. F. Nelson. Springer, 1992. Vol. 29a of *Landolt-Börnstein - Group III Condensed Matter*. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/b44185>.
- [14] Negative Poisson's ratio for cubic crystals and nano/microtubes / R. V. Goldstein, V. A. Gorodtsov, D. S. Lisovenko et al. // *Physical Mesomechanics*. 2014. Vol. 17, no. 2. P. 97–115. URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S1029959914020027>.
- [15] Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Extreme values of Young's modulus and Poisson's ratio of hexagonal crystals // *Mechanics of Materials*. 2019. Vol. 134. P. 1–8.