

Б. Г. Миронов¹, Ю. Б. Миронов²

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ ИЗ АНИЗОТРОПНО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА ПРИ ЛИНЕАРИЗОВАННОМ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

¹Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

²Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе исследовано кручение стержней из анизотропно упрочняющегося жесткопластического материала. Получены интегралы, определяющие напряженное и деформированное состояния стержня при линеаризованном условии пластичности. Построены линии разрыва напряжений.

Ключевые слова: кручение, напряжение, деформация, пластичность, упрочнение, анизотропия, жесткопластический стержень, условие текучести, уравнения равновесия, линеаризованное соотношение.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.013

УДК: 539.735

Введение. Кручение представляет собой один из видов деформации тел, характеризующийся взаимным поворотом его поперечных сечений под влиянием моментов, действующих в этих сечениях. Кручение стержней довольно часто встречается в инженерной практике, особенно в машиностроении. Теория кручения изотропных и анизотропных стержней из идеального жесткопластического материала изложена в работах [1–3]. В работах [4–6] исследовано кручение неоднородных и составных стержней из идеального жесткопластического материала. Переход к случаю кручения стержней из упрочняющегося материала приводит к определенным трудностям: задача перестает быть статически определенной, необходимо совместное рассмотрение полей напряжений и деформаций. Возникают трудности при точной постановке задачи. Отдельные случаи в линеаризованной постановке рассмотрены в работе [7].

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б., 2020

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mbg.chspru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

Миронов Юрий Борисович

e-mail: mistiam@gmail.com, кандидат технических наук, декан, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 01.07.2020

Основные результаты. Соотношения теории кручения стержней из анизотропно упрочняющегося жесткопластического материала могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \\ \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y); \end{aligned} \quad (1)$$

уравнение равновесия —

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

условие текучести —

$$(\tau_{xz} - ce_{xz})^2 + (\tau_{yz} - ce_{yz})^2 = k, \quad (k = \text{const}); \quad (3)$$

соотношения ассоциированного закона течения —

$$\frac{de_{xz}}{\tau_{xz} - ce_{xz}} = \frac{de_{yz}}{\tau_{yz} - ce_{yz}}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0, \quad (4)$$

где σ_{ij} — компоненты напряжения; e_{ij} — компоненты деформации; k — предел текучести.

Будем предполагать, что упрочнение линейное ($c = \text{const}$).

Условие текучести (3) в плоскости τ_{xz}, τ_{yz} представляет окружность радиуса k (рис. 1), центр которой находится в точке с координатами $\gamma_1 = ce_{xz}, \gamma_2 = ce_{yz}$.

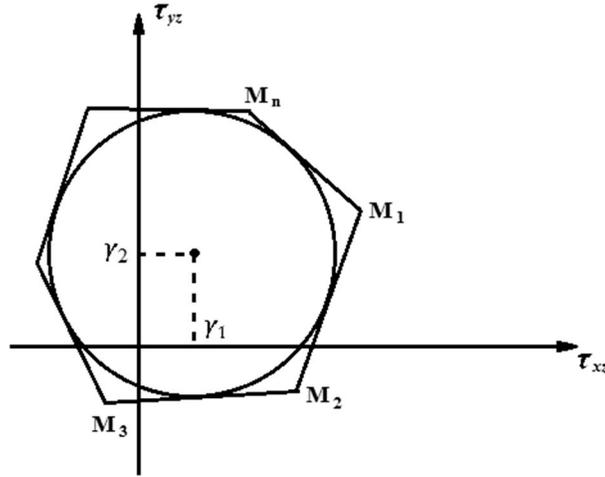


Рис. 1.

Предположим, что окружность условия текучести (3) заменена замкнутой ломаной $M_1M_2M_3\dots M_nM_1$ (рис. 1):

$$A_i(\tau_{xz} - ce_{xz}) + B_i(\tau_{yz} - ce_{yz}) = k, \quad (5)$$

где $A_i^2 + B_i^2 = 1$; $A_i, B_i = \text{const}$; $i = 1, 2, \dots, n$. Условие (5) представляет на некотором отрезке линеаризованное условие текучести (3). Рассматривая условие (5) в качестве пластического потенциала, получим вместо (4) соотношение

$$\frac{de_{xz}}{A_i} = \frac{de_{yz}}{B_i}. \quad (6)$$

Интегрируя соотношение (6) и часть соотношений (4) и учитывая, что в начальный момент закручивания компоненты деформации e_{ij} равны 0, получим

$$\frac{e_{xz}}{A_i} = \frac{e_{yz}}{B_i}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0. \quad (7)$$

Из (7) следует

$$B_i e_{xz} - A_i e_{yz} = 0. \quad (8)$$

Предположим, что компоненты перемещения u, v, w имеют вид

$$u = \theta yz, \quad v = -\theta xz, \quad w = w(x, y), \quad (9)$$

где θ — крутка, w — депланация.

Соотношения связи между компонентами деформации и компоненты перемещения с учетом (8) имеют вид

$$e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta y \right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta x \right). \quad (10)$$

Из (10) получим

$$\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = \theta. \quad (11)$$

Согласно (8) из (5) получим

$$A_i \left(\tau_{xz} - \frac{A_i}{B_i} c e_{yz} \right) + B_i (\tau_{yz} - c e_{xz}) = k. \quad (12)$$

Тогда из соотношений (12), (8) имеем

$$e_{yz} = \frac{B_i}{c} (-k + A_i \tau_{xz} + B_i \tau_{yz}), \quad (13)$$

$$e_{xz} = \frac{A_i}{c} (-k + A_i \tau_{xz} + B_i \tau_{yz}). \quad (14)$$

Подставив выражения (13), (14) для компонент деформаций в (11), получим

$$A_i^2 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + A_i B_i \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) - B_i^2 \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = c\theta. \quad (15)$$

Уравнению равновесия (2) удовлетворим, полагая

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (16)$$

Подставляя выражения (16) в соотношение (15), получим уравнение

$$A_i^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2A_i B_i \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + B_i^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = c\theta. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) будем искать в виде полинома

$$U = a_i x^2 + b_i y^2 + c_i xy + d_i x + g_i y, \quad (18)$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i, g_i = \text{const}$. Согласно (18) из (17) следует

$$2b_i A_i^2 + 2a_i B_i^2 - 2A_i B_i c_i = c\theta. \quad (19)$$

Согласно (18) из (16) следует, что для компонент напряжения справедливы соотношения

$$\tau_{xz} = 2b_i y + c_i x + g_i, \quad \tau_{yz} = -2a_i x - c_i y - d_i. \quad (20)$$

С учетом (20) из (13), (14) имеем

$$e_{yz} = \frac{B_i}{c} (-k + (2b_i A_i - c_i B_i)y + (c_i A_i - 2a_i B_i)x + g_i A_i - d_i B_i), \quad (21)$$

$$e_{xz} = \frac{A_i}{c} (-k + (2b_i A_i - c_i B_i)y + (c_i A_i - 2a_i B_i)x + g_i A_i - d_i B_i). \quad (22)$$

Рассмотрим кручение стержня прямоугольного сечения $m_1 m_2 m_3 m_4$ со сторонами $2l$ и $2n$ (рис. 2, слева). На контуре сечения вектор касательного напряжения $\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ параллелен контуру.

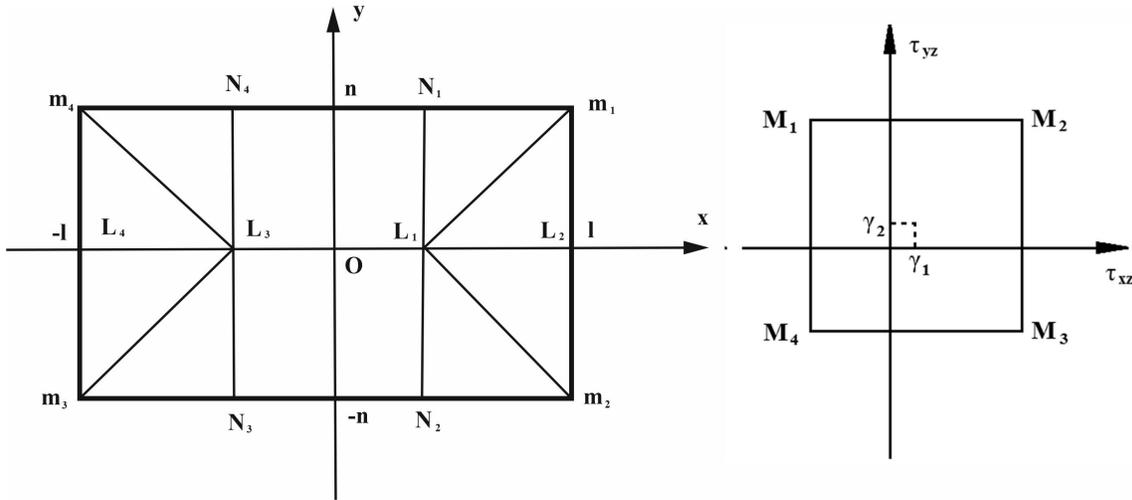


Рис. 2.

В рассматриваемом случае линеаризованное условие пластичности (5) выберем таким образом, чтобы вектор $\vec{r}_l = (A_i, B_i)$ был параллелен отрезку $m_i m_{i+1}$ контура (рис. 2). Здесь мы имеем четыре линеаризованных условия текучести:

$$A_1(\tau_{xz} - ce_{xz}) + B_1(\tau_{yz} - ce_{yz}) = k, \quad (23)$$

$$A_2(\tau_{xz} - ce_{xz}) + B_2(\tau_{yz} - ce_{yz}) = k, \quad (24)$$

$$A_3(\tau_{xz} - ce_{xz}) + B_3(\tau_{yz} - ce_{yz}) = k, \quad (25)$$

$$A_4(\tau_{xz} - ce_{xz}) + B_4(\tau_{yz} - ce_{yz}) = k. \quad (26)$$

Вдоль отрезка $m_1 m_2$ имеем

$$x = l, \quad \tau_{xz} = 0, \quad A_1 = 0, \quad B_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2}c\theta.$$

В области, примыкающей к отрезку $m_1 m_2$,

$$\tau_{xz} = c_1(x - l), \quad \tau_{yz} = -c\theta x - c_1 y - d_i, \quad (27)$$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = \frac{1}{c}(-k - c_1 y - c\theta x - d_i). \quad (28)$$

Вдоль отрезка $m_2 m_3$ имеем

$$y = -n, \quad \tau_{yz} = 0, \quad A_2 = 1, \quad B_2 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{2}c\theta.$$

В области, примыкающей к отрезку m_2m_3 ,

$$\tau_{yz} = -c_2(y + n), \quad \tau_{xz} = c\theta y + c_2x + g_2, \quad (29)$$

$$e_{yz} = 0, \quad e_{xz} = \frac{1}{c}(-k - c\theta y + c_2x + g_2). \quad (30)$$

Вдоль отрезка m_3m_4 имеем

$$x = l, \quad \tau_{xz} = 0, \quad A_3 = 0, \quad B_3 = -1, \quad b_3 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{2}c\theta.$$

В области, примыкающей к отрезку m_3m_4 ,

$$\tau_{xz} = c_3(x + l), \quad \tau_{yz} = -c\theta x - c_3y - d_i, \quad (31)$$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = \frac{1}{c}(k - c_3y - c\theta x - d_i). \quad (32)$$

Вдоль отрезка m_4m_1 имеем

$$y = -n, \quad \tau_{yz} = 0, \quad A_4 = -1, \quad B_4 = 0, \quad a_4 = 0, \quad b_4 = \frac{1}{2}c\theta.$$

В области, примыкающей к отрезку m_4m_1 ,

$$\tau_{yz} = -c_4(y - n), \quad \tau_{xz} = c\theta y + c_4x + g_2, \quad (33)$$

$$e_{yz} = 0, \quad e_{xz} = \frac{1}{c}(k + c\theta y + c_4x + g_2). \quad (34)$$

Особо следует остановиться на линиях разрыва напряжений (линии m_1L_1 , m_2L_1 , m_3L_3 , m_4L_3 , L_1L_3 на рис. 2), которые являются следом исчезающих жестких областей. На них всегда выполняются соотношения

$$e_{xz} = e_{yz} = 0. \quad (35)$$

Согласно (27)–(34) и (36) получим следующие уравнения линий разрыва напряжений:

$$m_1L_1 : \quad y = n + (x - l), \quad (36)$$

$$m_2L_1 : \quad y = -n - (x - l), \quad (37)$$

$$m_3L_3 : \quad y = -n + (x + l), \quad (38)$$

$$m_4L_3 : \quad y = n - (x - l), \quad (39)$$

$$L_1L_3 : \quad y = 0. \quad (40)$$

На рис. 2 построены линии разрыва напряжений m_1L_1 , m_2L_1 , m_3L_3 , m_4L_3 , L_1L_3 , которые пересекаются в точках L_1 , L_3 .

Согласно (36), (37), (38), (39), (40) из (27)–(34) имеем следующие соотношения для компонент напряжений и деформаций:

в области $m_1L_1L_2$:

$$\tau_{xz} = -c\theta(x - l), \quad \tau_{yz} = k - c\theta(-y + n + x - l), \quad (41)$$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = -\theta(-y + n + x - l); \quad (42)$$

в области $m_2L_1L_2$:

$$\tau_{xz} = c\theta(x - l), \quad \tau_{yz} = k - c\theta(y + n + x - l), \quad (43)$$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = -\theta(y + n + x - l); \quad (44)$$

в области $m_2L_1N_2$:

$$\tau_{xz} = k + c\theta(y + n + x - l), \quad \tau_{yz} = -c\theta(y + n), \quad (45)$$

$$e_{xz} = \theta(y + n + x - l), \quad e_{yz} = 0; \quad (46)$$

в области $L_1N_2N_3L_3$:

$$\tau_{xz} = k + c\theta y, \quad \tau_{yz} = 0, \quad (47)$$

$$e_{xz} = \theta y, \quad e_{yz} = 0; \quad (48)$$

в области $m_3L_3N_3$:

$$\tau_{xz} = k - c\theta(-y - n + x + l), \quad \tau_{yz} = c\theta(y + n), \quad (49)$$

$$e_{xz} = -\theta(-y - n + x + l), \quad e_{yz} = 0; \quad (50)$$

в области $m_3L_3L_4$:

$$\tau_{xz} = -c\theta(x + l), \quad \tau_{yz} = -k + c\theta(y + n - x - l), \quad (51)$$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = \theta(y + n - x - l); \quad (52)$$

в области $m_4L_3L_4$:

$$\tau_{xz} = c\theta(x + l), \quad \tau_{yz} = -k - c\theta(y - n + x + l), \quad (53)$$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = -\theta(y - n + x + l); \quad (54)$$

в области $m_4L_3N_4$:

$$\tau_{xz} = -k + c\theta(y - n + x + l), \quad \tau_{yz} = -c\theta(y - n), \quad (55)$$

$$e_{xz} = \theta(y - n + x + l), \quad e_{yz} = 0; \quad (56)$$

в области $L_1N_1N_4L_3$:

$$\tau_{xz} = -k + c\theta y, \quad \tau_{yz} = 0, \quad (57)$$

$$e_{xz} = \theta y, \quad e_{yz} = 0; \quad (58)$$

в области $m_1L_1N_1$:

$$\tau_{xz} = -k + c\theta(y - n - x + l), \quad \tau_{yz} = c\theta(y - n), \quad (59)$$

$$e_{xz} = \theta(y - n - x + l), \quad e_{yz} = 0. \quad (60)$$

На отрезках L_1L_2 , L_3L_4 терпит разрыв компонента напряжения τ_{xz} . Разрыв компоненты τ_{xz} в данном случае допустим, контактирующее напряжение τ_{yz} при переходе через отрезки L_1L_2 , L_3L_4 непрерывно. Аналогично, на отрезках N_1N_2 , N_3N_4 терпит разрыв компонента напряжения τ_{yz} , а контактирующее напряжение τ_{xz} непрерывно. Следует отметить, что линии разрыва напряжений L_1L_2 , L_3L_4 , N_1N_2 , N_3N_4 не являются следом жесткой области, а являются следствием исследуемой предельной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский В. В. Теория пластичности. Москва: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [2] Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. Москва: ИЛ, 1956. 398 с.
- [3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Москва: Наука, 1966. 232 с.
- [4] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. Москва: Мир, 1964. 156 с.
- [5] Миронов Б. Г. К теории кручения неоднородных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 236–240.
- [6] Mironov V. G., Mironov Y. V. Torsion of anisotropic and composite cylindrical rod // Journal of Physics: Conference Series. 2019. 012009.
- [7] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: в 2-х т. — Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. Москва: Физматлит, 2002. 448 с.

B. G. Mironov¹, Yu. B. Mironov²

**TORSION OF RODS MADE OF ANISOTROPICALLY HARDENING
MATERIAL UNDER A LINEARIZED PLASTICITY CONDITION**

¹*Russian University of transport, Moscow, Russia*

²*Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

Abstract. The torsion of rods made of anisotropically hardening rigid-plastic material is studied. Integrals are obtained that determine the stress and strain States of the rod under the linearized plasticity condition. Stress discontinuity lines are constructed.

Keywords: torsion, stress, strain, plasticity, hardening, anisotropy, rigid plastic rod, yield condition, equilibrium equations, linearized ratio.

REFERENCES

- [1] Sokolovskij V. V. Theory of plasticity. Moscow: Higher school, 1969. 608 p. (in Russian).
- [2] Prager V., Hoge F. G. Theory of ideally plastic bodies. Moscow: IL, 1956. 398 p. (in Russian).
- [3] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. Moscow: Science, 1966. 232 p. (in Russian).
- [4] Ivlev D. D. Mechanics of plastic media: in 2 vol. — V. 2. General issue. Rigid-plastic and elastic-plastic state of bodies. Strengthening. Deformation theories. Complex environment. Moscow: Fizmatlit, 2002. 448 p. (in Russian).
- [5] Olshak V., Ryhlevskiy Y., Urbanovskiy B. Theory of plasticity of inhomogeneous bodies. Moscow: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).
- [6] Mironov B. G. On the theory of torsion of inhomogeneous rods // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ja. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state. 2014. no. 4(22). P. 236–240. (in Russian).
- [7] Mironov B. G., Mironov Y. B. Torsion of anisotropic and composite cylindrical rod // Journal of Physics: Conference Series. 2019. 012009.

Boris Gurjevich Mironov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of department, Russian University of transport, Moscow, Russia.

Yuri Borisovich Mironov, Candidate of technical Sciences, Dean, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.