

М. Н. Михин, Е. В. Мурашкин

КРУЧЕНИЕ НАРАЩИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ ТРЕУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ИЗГОТОВЛЕННОГО ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА

Российский государственный гуманитарный университет, филиал в г. Домодедово, Россия

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматривается задача о кручении растущего стержня треугольного сечения, изготовленного из вязкоупругого стареющего функционально-градиентного материала, с интегральными краевыми условиями на торцах. Изучается процесс непрерывного наращивания под действием крутящего момента. Предлагаются методы решения поставленных краевых задач путем приведения задач теории наращивания к задачам теории упругости с внутренним параметром. Приводятся формулы расшифровки для восстановления истинных параметров напряженно-деформированного состояния. Исследуется распределение интенсивности касательных напряжений на различных стадиях процесса наращивания. Приводятся расчеты задачи кручения призматического стержня с сечением в форме правильного треугольника.

Ключевые слова: растущее тело, поверхность роста, остаточное напряжение, функционально-градиентный материал, вязкоупругость, стареющий материал

DOI: 10.37972/chgru.2020.44.2.014

УДК: 539.374

1. Введение. Наличие уникальных (экзотических) свойств 3D-материалов (метаматериалов, тканых композитов, аусетиков [1]) являются несомненным преимуществом перед другими инженерными материалами. Эти преимущества делают их

© Михин М. Н., Мурашкин Е. В. 2020

Михин Михаил Николаевич

e-mail: mikhin@inbox.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Российский государственный гуманитарный университет, филиал в г. Домодедово, Россия

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 19.07.2019

пригодными для использования в качестве легких компонент и конструкций в различных отраслях современной промышленности [2]. В настоящее время около 50% деталей самолетов изготавливается из композиционных материалов [3]. Кроме того, композитные материалы все чаще используются в автомобильной промышленности. Исследования показали, что с 2015 года ежегодный рост использования композитов в автомобильной промышленности увеличился на 5%.

Мировой спрос на композиционные материалы растет с каждым днем [4]. Титановые композиты имеют более широкий спектр применения по сравнению с обычными титановыми сплавами из-за их более высокой жесткости и прочности [3–9]. Еще одна особенность титановых композитов — высокая износостойкость и устойчивость к коррозии [9], что также делает их пригодными для широкого спектра автопромышленных и аэрокосмических приложений. Эти свойства обеспечиваются добавлением частиц TiC (карбид титана) или TiB (борид титана) [6]. Превосходная механическая прочность, отличная биосовместимость, низкая плотность, устойчивость к коррозии и высокие температурные характеристики делают титановые композиты применимыми в большинстве отраслей, где требуется использование легких материалов, например, в компонентах газотурбинных двигателей, предприятиях пищевой промышленности, высокопроизводительных автомобильных деталях, авиакосмической промышленности, атомных электростанциях, химической промышленности, теплообменниках нефтеперерабатывающих заводов, морском оборудовании, медицинских устройствах, электронике, биомедицинских приложениях (имплантаты и протезы), энергетике и оборонной промышленности.

Технологии аддитивного производства — наиболее экономически выгодная технология для производства и обработки титановых композитов, поскольку она решает большинство проблем традиционного производства композитов [9]. Композиционные материалы обычно состоят из определенной матрицы в виде однородной фазы, армирования в виде дисперсной фазы и границы раздела или связующего вещества, которое соединяет материалы вместе [5, 6]. Механические свойства и микроструктура композитных материалов могут контролироваться путем правильного выбора составляющих материалов. Преимущества аддитивного производства композитов очевидны. Прежде всего — это создание геометрически сложных деталей, которые невозможно создать с помощью субтрактивных производственных процессов. Кроме того, были проведены исследования по улучшению физико-механических свойств титана за счет введения других материалов в композиты, которые являются подходящими материалами для большинства современных промышленных применений.

Проблемы математического анализа процессов наращивания твердых тел в живой [10–14] и не живой природе [15–29] неизменно привлекают внимание отечественных и зарубежных исследователей. Далее в статье будем придерживаться терминологией и аппаратом теории подробно изложенной в монографии [18].

2. Постановка задачи. Исследуем напряженно-деформируемое состояние наращиваемого тела изготовленного из однородного вязкоупругого стареющего материала. Момент изготовления основного тела примем за начало отсчета внутреннего времени задачи. Примем, что в начальный момент времени основное тело занимало некоторую область Ω_1 с треугольным поперечным сечением, имеющим границу L_1

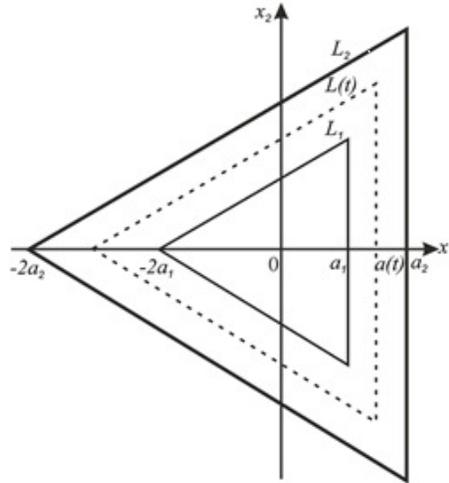


Рис. 1. Поперечное сечение наращиваемого призматического стержня

(см. рис. 1). В момент τ_0 к торцам основного призматического тела прикладываются нагружающие усилия, статически эквивалентные паре с моментом $M(t)$. Будем полагать, что боковая поверхность основного тела свободна от напряжений.

Далее, в некоторый момент времени, обозначим его через $\tau_1 \geq \tau_0$, начинается непрерывное наращивание тела последовательным присоединением к внешней поверхности основного тела новых элементов, изготовленных из материала произведенного одновременно с основным телом. Причем, будем полагать, что новые приращиваемые элементы находятся в свободном состоянии. Обозначим через $L(t)$ распространяющуюся границу поперечного сечения дополнительного тела $\Omega(t)$, которая изменяется с течением времени. Кроме того, заметим, что $L(\tau_1) = L_1$ и $\Omega(\tau_1) = \Omega_1$. Граница $L(t)$ сечения $\Omega(t)$ состоит из двух участков $L(t) = \overset{*}{L}(t) \cup L_\sigma(t)$, где $\overset{*}{L}(t)$ — граница роста, к которой в текущий момент времени осуществляется приток материала, при этом $\overset{*}{L}(t) = \overset{*}{L}$ при $\tau \leq \tau_1$, $L_\sigma(t)$ — граница, свободная от напряжений.

Будем считать, что момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам $\tau_0 = \tau_0(x_1, x_2)$ совпадает с моментом их присоединения к наращиваемому основному телу $\overset{*}{\tau} = \overset{*}{\tau}(x_1, x_2)$. Далее примем следующее сокращение

$$\tau_0(x_1, x_2) = \begin{cases} \tau_0, & (x_1, x_2) \in \Omega_1; \\ \overset{*}{\tau}(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \overset{*}{\Omega}(t). \end{cases} \quad (1)$$

Момент времени $\tau_2 \geq \tau_1$ свяжем с окончанием процесса наращивания. С этого момента оно занимает область с поперечным сечением $\Omega_2 = \Omega(\tau_2)$ и границей $L_2 = L(\tau_2)$. Заметим, что всюду далее рассматривается достаточно медленные процессы, такие, что в уравнениях движения сплошной среды можно пренебречь инерционными членами.

3. Методика решения краевой задачи. Краевая задача о деформировании основного тела, изготовленного из вязкоупругого стареющего тела на интервале времени $[\tau_0, \tau_1]$, предшествующем началу процесса наращивания, представляет собой традиционную задачу кручения, аналогичную рассмотренной в [30–32]. Задачу, решение которой моделирует процесс непрерывного наращивания на интервале времени $t \in [\tau_1, \tau_2]$ назовем начально-краевой задачей для непрерывно наращиваемого тела. Дальнейшие рассуждения, для удобства, будем проводить в декартовой прямоугольной системе координат с осью Ox_3 совпадающей с осью симметрии стержня.

Для рассматриваемого случая призматического стержня уравнения равновесия следует принять в виде

$$\partial_3 \sigma_{13} = 0, \quad \partial_1 \sigma_{23} = 0, \quad \partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} = 0, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial k}. \quad (2)$$

Соотношения Коши между скоростями деформации D_{ij} и скоростями перемещений v_i в декартовой прямоугольной системе координат, учитывая симметрию краевой задачи, примут вид

$$\begin{aligned} D_{11} = \partial_1 v_1 = 0, & \quad D_{22} = \partial_2 v_2 = 0, & \quad D_{33} = \partial_3 v_3 = 0, \\ 2D_{12} = \partial_1 v_2 + \partial_2 v_1 = 0, & \quad 2D_{13} = \partial_1 v_3 + \partial_3 v_1, & \quad 2D_{23} = \partial_3 v_2 + \partial_2 v_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Определяющие уравнения однородного вязкоупругого стареющего континуума для не нулевых компонент тензора напряжений σ_{ij} и тензора малых деформаций ε_{ij} можно принять в форме

$$\sigma_{13} = 2G(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{\tau_0})\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2G(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{\tau_0})\varepsilon_{23}, \quad (4)$$

где G — модуль сдвига или второй параметр Ламе, \mathbf{I} — тождественный интегральный оператор, а для интегрального оператора \mathbf{N} справедливы соотношения

$$(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{\tau_0})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{L}_{\tau_0}, \quad \mathbf{L}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) K_1(t, \tau) d\tau, \quad (5)$$

$$K_1(t, \tau) = G(\tau) \partial_\tau [G^{-1}(\tau) + \omega(t, \tau)]. \quad (6)$$

Здесь $K_1(t, \tau)$ — ядро ползучести, $\omega(t, \tau)$ — мера ползучести при сдвиге.

Краевое условие на неподвижной части наращиваемой границы принимает вид

$$(x_1, x_2) \in L_\sigma(t) : \quad n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} = 0. \quad (7)$$

Краевое условие на распространяющейся поверхности наращивания $\dot{L}^*(t)$ запишем в форме

$$(x_1, x_2) \in \dot{L}^*(t) : \quad n_1 \partial_t \sigma_{13} + n_2 \partial_t \sigma_{23} = 0. \quad (8)$$

При этом необходимо потребовать выполнения условия равновесия торцевых сечений дополнительного тела $\Omega(t)$, т.е.

$$M(t) = \iint_{\Omega(t)} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dx_1 dx_2, \quad \iint_{\Omega(t)} \sigma_{13} dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega(t)} \sigma_{23} dx_1 dx_2 = 0. \quad (9)$$

В соотношениях (7)–(9) $n = \{n_1, n_2\}$ — единичный вектор внешней нормали боковой поверхности тела. Значения всех физических полей в момент времени $\tau_0 \leq t \leq \tau_1$ известны из решения задачи для основного тела.

Отличительными особенностями начально-краевой задачи для растущего тела (2)–(9), выводящими ее за рамки классических задач механики деформируемого твердого тела, являются:

- (i) нарушение условия совместности деформаций в области, занимаемой дополнительным телом, и выполнение лишь его аналога и аналога соотношений Коши в скоростях соответствующих величин (это обстоятельство позволяет учитывать этот факт, что приращиваемые элементы до момента присоединения к основному телу могут подвергаться деформирующим воздействиям независимо от процессов, протекающих в самом теле);
- (ii) зависимость определяющих соотношений от функции $\tau_0 = \tau_0(x_1, x_2)$, которая может иметь разрывы первого рода.

Введем обозначение $\sigma_{ij}^0 = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_{\tau_0})\sigma_{ij}G^{-1}$ и преобразуем задачу наращиваемого вязкоупругого тела с определяющими соотношениями (2)–(9) к задаче наращивания упругого тела, описываемого законом Гука. В результате не сложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \partial_1\sigma_{13}^0 + \partial_2\sigma_{23}^0 &= 0, & 2D_{13} &= \partial_1v_3 + \partial_3v_1, & 2D_{23} &= \partial_3v_2 + \partial_2v_3, \\ \sigma_{13}^0 &= 2\varepsilon_{13}, & \sigma_{23}^0 &= 2\varepsilon_{23}, & M(t) &= \iint_{\Omega(t)} (x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13})dx_1dx_2, \\ (x_1, x_2) \in L_\sigma(t) &: n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23} &= 0, & (x_1, x_2) \in L^*(t) &: n_1\partial_t\sigma_{13} + n_2\partial_t\sigma_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Преобразуем начально-краевую задачу (10) к краевой задаче относительно скоростей деформации, скоростей перемещений и скоростей операторных напряжений. Для этого продифференцируем по t уравнение равновесия и уравнения состояния. В итоге получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \partial_1S_{13} + \partial_2S_{23} &= 0, & 2D_{13} &= \partial_1v_3 + \partial_3v_1, & 2D_{23} &= \partial_3v_2 + \partial_2v_3, \\ S_{13}^0 &= 2D_{13}, & S_{23}^0 &= 2D_{23}, & S_{ij} &= \partial_t\sigma_{ij}^0, & (x_1, x_2) \in L(t) &: n_1S_{13} + n_2S_{23} &= 0, \\ \partial_tM^0(t) &= \iint_{\Omega(t)} (x_1S_{23} - x_2S_{13})dx_1dx_2 + \oint_{L^*(t)} (x_1\sigma_{23}^* - x_2\sigma_{13}^*)s_n dl, \end{aligned} \quad (11)$$

причем $\sigma_{13}^*(x_1, x_2) = \sigma_{13}(x_1, x_2, \tau^*(x_1, x_2))$ и $\sigma_{23}^*(x_1, x_2) = \sigma_{23}(x_1, x_2, \tau^*(x_1, x_2))$, s_n — скорость движения растущей границы вдоль нормали.

Дополненные начальными условиями для основного тела при $t = \tau_1$ соотношения (12), ставят начально-краевую задачу с внутренним параметром времени t .

Для величин S_{ij} и v_i справедливы формулы:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\partial_t\theta(t)x_2x_3, & v_2 &= \partial_t\theta(t)x_1x_3, & v_3 &= \partial_t\theta(t)\varphi_t, \\ S_{13} &= \partial_t\theta(t)(\partial_1\varphi_t - x_2), & S_{23} &= \partial_t\theta(t)(\partial_2\varphi_t + x_1), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\varphi_t = \varphi(x_1, x_2, t)$ — неизвестная функция кручения, $\theta(t)$ — угол закручивания стержня. Функция кручения φ_t является гармонической в области $\Omega(t)$, а значит удовлетворяет краевому условию

$$(x_1, x_2) \in L(t) : \partial_{\mathbf{n}}\varphi_t = x_2n_1 - x_1n_2.$$

Таким образом, решение задачи кручения с использованием функции кручения φ_t сводится к определению в области поперечного сечения $\Omega(t)$ гармонической функции

по заданному значению ее нормальной производной на контуре $L(t)$, т.е. к решению классической задачи Неймана.

Очевидно, что с учетом (12) можно получить

$$\begin{aligned} \partial_t M^0(t) &= \partial_t \theta(t) D(t) + \int_{L^*(t)} (x_1 \sigma_{23}^* - x_2 \sigma_{13}^*) dl, \\ D(t) &= \iint_{\Omega(t)} (x_1^2 + x_2^2 + x_1 \partial_2 \varphi - x_2 \partial_1 \varphi) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (13)$$

где $D(t)$ — переменная жесткость растущего тела при кручении.

Рассмотрим два возможных варианта постановки задачи:

- (i) задан момент $M(t)$, а требуется определить напряжения σ_{ij} , перемещения u_i и крутку $\theta(t)$;
- (ii) задана крутка $\theta(t)$, а требуется определить σ_{ij} , u_i и момент $M(t)$.

Решение первого варианта постановки (когда задан крутящий момент $M(t)$) можно построить следующим образом: по краевому условию определим функцию φ_t , по формулам (13) найдем $\theta(t)$, по формулам (12) найдем v_i и S_{ij} , наконец, истинные напряжения σ_{ij} восстановим по формуле (10).

Для второго варианта постановки определим функцию кручения $\varphi(x_1, x_2, t)$, найдем v_i и S_{ij} по формулам (12), восстановим истинные напряжения σ_{ij} при помощи (10), определим крутящий момент $M(t)$ на основании условия равновесия торцевых сечений (9).

4. Кручение тела после прекращения процесса наращивания. Рассмотрим теперь этап кручения тела после прекращения роста. Пусть в момент времени τ_2 наращивание тела прекращается. В этот момент оно занимает область с поперечным сечением Ω_2 , ограниченную кривой L_2 . В этом случае получаем задачу, аналогичную (10). Тогда для величин v_i и S_{ij} применимы формулы (12), в которых необходимо положить $t = \tau_2$. Напряжения, перемещения и крутка в этом случае можно найти согласно формулам (10).

В итоге неклассические краевые задачи, возникающие при исследовании кручения наращиваемых тел сводятся к известным краевым задачам, содержащим некоторый внутренний параметр. По найденным решениям последних полностью восстанавливается напряженно-деформированное состояние тела при помощи формул расшифровки:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_1, x_2, t) &= G(t) \left\{ \sigma_{ij}(x_1, x_2, \tau_0) G^{-1}(\tau_0) \left[1 + \int_{\tau_0}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_0}^t [S_{ij}(x_1, x_2, \tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} S_{ij}(x_1, x_2, \varsigma) d\varsigma R_{ij}(t, \tau)] d\tau \right\}, \\ u(x_1, x_2, t) &= u(x_1, x_2, \tau_0) + \int_{\tau_0}^t v(x_1, x_2, \tau) d\tau, \quad \theta(t) = \theta(\tau_0) + \int_{\tau_0}^t \partial_t \theta(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Для решения классических краевых задач с параметром применим два метода теории функций комплексного переменного. Первый метод основан на применении конформного отображения, а второй — на приведении уравнения границы растущего тела к специальному виду (см. [31, 32]).

Рассмотрим метод конформного отображения. Введем сопряженную с $\varphi(x_1, x_2, t)$ гармоническую функцию $\psi(x_1, x_2, t)$, связанную с ней условиями Коши–Римана [31]:

$$\partial_1\varphi = \partial_2\psi, \quad \partial_2\varphi = -\partial_1\psi.$$

Граничное условие для функции $\psi(x_1, x_2, t)$ примет вид

$$(x_1, x_2) \in L(t) : \psi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + C(t),$$

где $C(t)$ некоторая произвольная функция времени.

Таким образом, задачу кручения можно считать решенной, если мы сумеем отобразить конформно область $\Omega(t)$ на круг [32]. В этом случае, естественно, область $\Omega(t)$ должна быть односвязной.

Пусть $z = x_1 + ix_2 = \omega(\zeta, t)$ конформное отображение области Ω на круг $|\zeta| < 1$, окружность, которую обозначим γ .

Определим комплексную функцию кручения

$$F(z, t) = \varphi + i\psi,$$

где φ — функция кручения, а ψ сопряженная с ней функция. Если функция $F(z, t)$ будет выражена через ζ , т.е. $F(z, t) = f(\zeta, t)$, то $f(\zeta)$ будет функцией, голоморфной внутри γ .

Действительная часть ψ функции

$$-if(\zeta, t) = \psi - i\varphi$$

будет удовлетворять на γ граничному условию $\psi = (x_1^2 + x_2^2)/2$. Обозначая через $\sigma = e^{i\rho}$ точки на контуре получим, что на γ имеем

$$\psi = \frac{1}{2}\omega(\sigma, t)\overline{\omega(\sigma, t)}.$$

Теперь найдем голоморфную внутри γ функцию по граничным значениям ее действительной части [31, 32]:

$$f(\zeta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma, t)\overline{\omega(\sigma, t)}}{\sigma - \zeta} d\sigma + C_1(t), \tag{15}$$

где $C_1(t)$ — произвольная функция.

Используя (15), мы можем определить как функцию $\psi(x_1, x_2, t)$, которая является действительной частью функции $-if(\zeta, t)$, так и функцию $\varphi(x_1, x_2, t)$, которая является мнимой частью функции $-if(\zeta, t)$.

Таким образом, по найденной гармонической функции, можно напряжения, перемещения и крутку (или момент) растущего призматического тела в любой момент времени.

Теперь рассмотрим метод основанный на приведении уравнения границы к специальному виду.

Рассмотрим комплексную функцию кручения

$$F(z, t) = \varphi + i\psi,$$

где φ — функция кручения, а ψ сопряженная с ней функция.

С учетом формул

$$F(z, t) + \overline{F(z, t)} = 2\operatorname{Re}F(z, t), \quad F(z, t) - \overline{F(z, t)} = 2i\operatorname{Im}F(z, t).$$

Граничное условие в комплексной форме запишется следующим образом:

$$z \in L(t) : \quad F(z, t) - \overline{F(z, t)} = z\bar{z}.$$

Пусть соотношение между z и \bar{z} для точек контура можно привести к виду

$$z \in L(t) : \quad z\bar{z} = h(z, t) + \overline{h(z, t)},$$

причем $\overline{h(z, t)}$ — функция, аналитическая внутри контура поперечного сечения. Тогда справедливо равенство

$$F(z, t) = ih(z, t) + C(t),$$

где $C(t)$ — произвольная функция, которую можно принять равной нулю.

Определив комплексную функцию кручения $F(z, t)$, получим функцию кручения $\varphi = \operatorname{Re}\{F(z, t)\}$. Данным методом решаются такие задачи, как кручение эллипса, кручение равностороннего треугольника, кручение кругового вала с продольной выточкой.

5. Решение задачи кручения растущего треугольного вязкоупругого стержня. В качестве примера рассмотрим задачу кручения растущего призматического стержня с поперечным сечением в форме правильного треугольника под действием крутящего момента $M(t)$. Граница поперечного сечения $L(t)$ является границей роста, т.е. $L(t) = \overset{*}{L}(t)$. Материал среды вязкоупругий и стареющий, т.е. его свойства зависят от времени. Рассмотрим наращивание стержня по закону подобия, при котором за время наращивания сторона равностороннего треугольника увеличится в два раза, $a_2 = 2a_1$ (рис. 1).

Будем считать, что новые приращиваемые элементы не напряжены. Ввиду математической эквивалентности получаемых задач на каждом рассматриваемом этапе, достаточно рассмотреть только этап наращивания.

Найдем функцию кручения $\varphi(x_1, x_2, t)$. Для этого уравнение

$$(x_1 - a(t))((x_1 + 2a(t))^2 - 3x_2^2) = 0,$$

контур $L(t)$ преобразуем в комплексную форму, сделав замену

$$x_1 = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad x_2 = -\frac{i}{2}(z - \bar{z})$$

В комплексной форме уравнение равностороннего треугольника примет вид

$$F(z, t) = -\frac{i}{6a(t)}z^3.$$

Отделяя действительную часть, получим функцию кручения в виде

$$\varphi(x_1, x_2, t) = (3x_1^2x_2 - x_2^3)/(6a(t)). \quad (16)$$

Если задана крутка $\theta(t)$, то вычислив производную $\partial_t\theta(t)$, находим величины v_i , S_{13} и S_{23} :

$$\begin{aligned} v_1 &= -\partial_t\theta(t)x_2x_3, \quad v_2 = \partial_t\theta(t)x_1x_3, \quad v_3 = \partial_t\theta(t)(3x_1^2x_2 - x_2^3)/(6a(t)), \\ S_{13} &= \partial_t\theta(t)(\partial_1\varphi_t - x_2) = \frac{\partial_t\theta(t)}{a(t)}(x_1 - a(t))x_2, \\ S_{23} &= \partial_t\theta(t)(\partial_2\varphi_t + x_1) = \frac{\partial_t\theta(t)}{2a(t)}(x_1^2 + 2a(t)x_1 - x_2^2). \end{aligned} \quad (17)$$

Истинные напряжения и перемещения восстанавливаются по формулам (14). И наконец, определим $M(t)$ на основании первой формулы из (9).

При заданном моменте $M(t)$ поступим следующим образом. Сначала находим производную $\partial_t M^0(t)$ по формуле

$$\partial_t M^0(t) = \partial_t M(t)G^{-1}(t) + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t \partial_\tau M(t)\partial_t\omega(t, \tau)d\tau + M(\tau_0(x_1, x_2))\partial_t\omega(t, \tau_0(x_1, x_2)).$$

Затем находим скорость крутки $\partial_t\theta(t)$

$$\partial_t\theta(t) = \frac{5}{9\sqrt{3}a^4(t)}\partial_t M^0(t).$$

Скорость перемещений v_i находим по формулам (17), а величины S_{13} и S_{23} находим по формулам

$$\begin{aligned} S_{13} &= \frac{5(x_1 - a(t))x_2}{9\sqrt{3}a^5(t)}\partial_t M^0(t), \\ S_{23} &= \frac{5(x_1^2 + 2a(t)x_1 - x_2^2)}{18\sqrt{3}a^5(t)}\partial_t M^0(t). \end{aligned}$$

Истинные напряжения, перемещения и крутка восстанавливаются по формулам (14).

Для построения решений на этапах до и после наращивания достаточно в функции кручения принять $t = \tau_1$ и $t = \tau_2$ соответственно.

6. Пример расчета задачи кручения растущего треугольного призматического стержня. Решим краевую задачу описанную в предыдущих разделах статьи для материала с модулем упруго-мгновенной деформации сдвига и мерой ползучести при сдвиге в форме [18]

$$G(t) = G_0(1 - e^{-\alpha_0 t}), \quad \omega(t, \tau) = (D_0 + Fe^{-\beta\tau})(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}).$$

Перейдем к безразмерным величинам, используя: предельный модуль сдвига G_0 , коэффициент γ в аппроксимации меры ползучести и начальную длину $a_1 = a(\tau_1)$ стороны равностороннего треугольника. Сделаем замену переменных по формулам:

$$\begin{aligned} t^* &= \gamma t, \quad \tau_1^* = \gamma\tau_1, \quad \tau_2^* = \gamma\tau_2, \quad a^*(t^*) = a(t)/a_1, \quad a_1^* = a_1/a_1 = 1, \quad a_2^* = a_2/a_1, \\ M^*(t^*) &= M(t)G_0^{-1}a^{-3}, \quad \alpha^* = \alpha_0/\gamma, \quad \beta^* = \beta/\gamma, \quad \gamma^* = \gamma/\gamma = 1, \quad D_0^* = D_0G_0, \quad F^* = FG_0 \end{aligned}$$

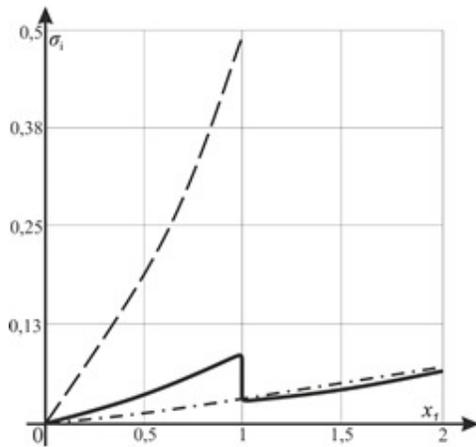


Рис. 2. Интенсивность касательных напряжений для процесса быстрого наращивания, которое начинается одновременно с приложением постоянного крутящего момента

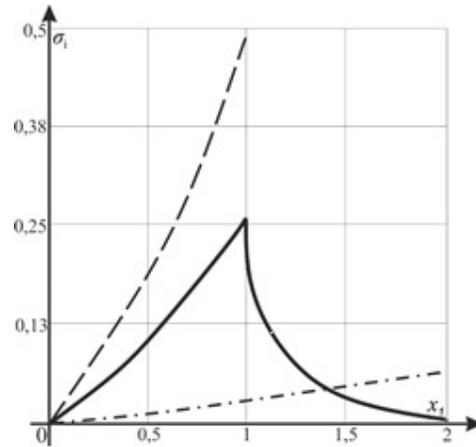


Рис. 3. Интенсивность касательных напряжений для процесса медленного наращивания, которое начинается одновременно с приложением постоянного крутящего момента

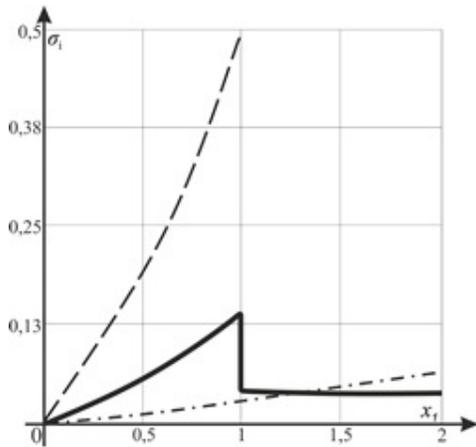


Рис. 4. Интенсивность касательных напряжений для процесса быстрого наращивания, которое начинается с некоторой паузой, после приложения постоянного крутящего момента

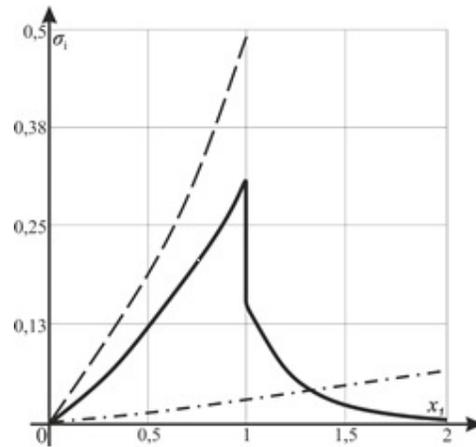


Рис. 5. Интенсивность касательных напряжений для процесса медленного наращивания, которое начинается с некоторой паузой, после приложения постоянного крутящего момента

и, опуская звездочки в обозначениях, зададимся следующими значениями функций и параметров:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a(t) = a_1(t + \tau_2 - 2\tau_1)(\tau_2 - \tau_1)^{-1}, \quad \alpha_0 = 2, \\ \gamma = 0.06, \quad \beta = 0.031/0.06, \quad A = 0.5, \quad D_0 = 0.5522, \quad F = 4.$$

Исследуем распределение интенсивности касательных напряжений вдоль отрезка, соединяющего центр тяжести треугольника и середину стороны треугольника. Интенсивность касательных напряжений при кручении дается формулой $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}$.

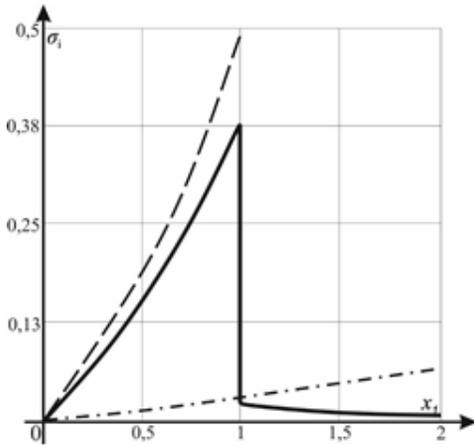


Рис. 6. Интенсивность касательных напряжений для процесса быстрого наращивания, которое начинается спустя длительный промежуток времени, после приложения постоянно крутящего момента

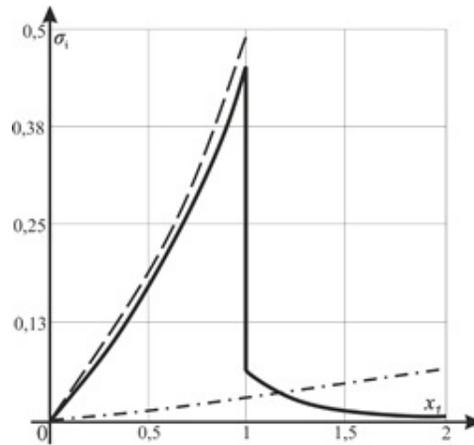


Рис. 7. Интенсивность касательных напряжений для процесса медленного наращивания, которое начинается спустя длительный промежуток времени, после приложения постоянно крутящего момента

Всюду далее на графиках штриховыми линиями будем обозначать распределения интенсивности касательных напряжений в момент начала наращивания, штрихпунктирной — в готовом теле без учета процесса наращивания, сплошной линией — предельное распределение интенсивности касательных напряжений при больших значениях времени.

Рассмотрим случай постоянного момента $M(t) = 1$. Рассмотрим процессы наращивания, которые начинаются одновременно с приложением крутящего момента ($\tau_0 = \tau_1 = 0.1$). На рис. 2 показано распределение интенсивности касательных напряжений при быстром наращивании ($\tau_2 = 0.4$); а на рис. 3 — распределение интенсивности касательных напряжений при медленном наращивании ($\tau_2 = 5.1$).

Рассмотрим процессы наращивания, которые начинаются с некоторой паузой, после приложения крутящего момента ($\tau_0 = 0.1, \tau_1 = 0.3$). На рис. 4 показано распределение интенсивности касательных напряжений при быстром наращивании ($\tau_2 = 0.6$); а на рис. 5 — распределение интенсивности касательных напряжений при медленном наращивании ($\tau_2 = 5.3$).

Рассмотрим процессы наращивания, которые начинаются спустя длительный промежуток времени, после приложения крутящего момента ($\tau_0 = 0.1, \tau_1 = 2$). На Рис. 6 показано распределение интенсивности касательных напряжений при быстром наращивании ($\tau_2 = 2.3$); а на рис. 7 — распределение интенсивности касательных напряжений при медленном наращивании ($\tau_2 = 7$).

Предположим, что момент возрастает по линейному закону: $M(t) = t$. На рис. 8 показано распределение интенсивности касательных напряжений при медленном наращивании, которое начинается в момент приложения крутящего момента ($\tau_0 = \tau_1 = 0.1, \tau_2 = 5.1$); а на рис. 9 — распределение интенсивности касательных напряжений при быстром наращивании, которое начинается спустя малый промежуток времени ($\tau_0 = 0.1, \tau_1 = 0.3, \tau_2 = 5.1$). В каждом рассматриваемом случае максимум интенсивности касательных напряжений достигается на границе готового тела.

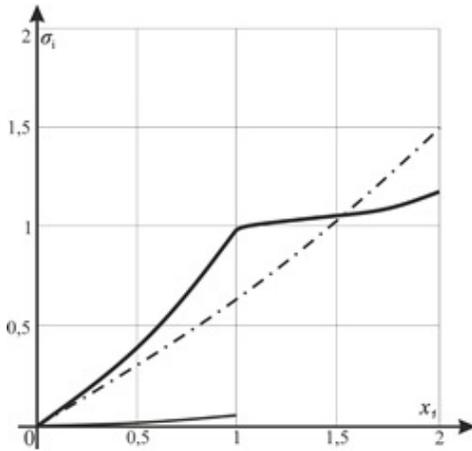


Рис. 8. Интенсивность касательных напряжений для процесса медленного наращивания, которое начинается в момент приложения линейного крутящего момента

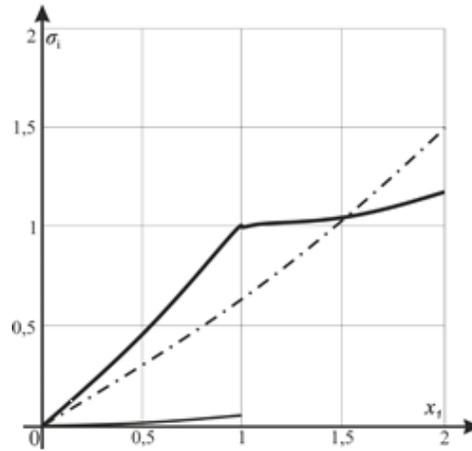


Рис. 9. Интенсивность касательных напряжений для процесса быстрого наращивания, которое начинается спустя малый промежуток времени, после приложения линейного крутящего момента

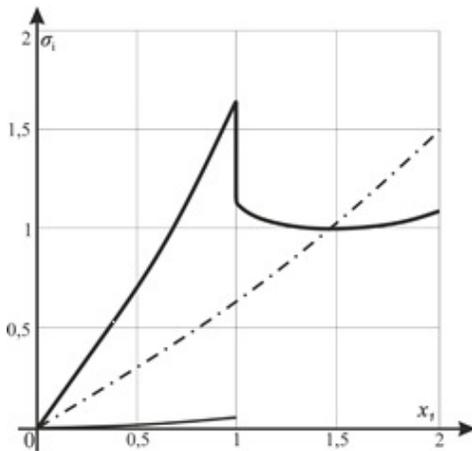


Рис. 10. Интенсивность касательных напряжений для процесса медленного наращивания, которое начинается спустя малый промежуток времени, после приложения линейного крутящего момента

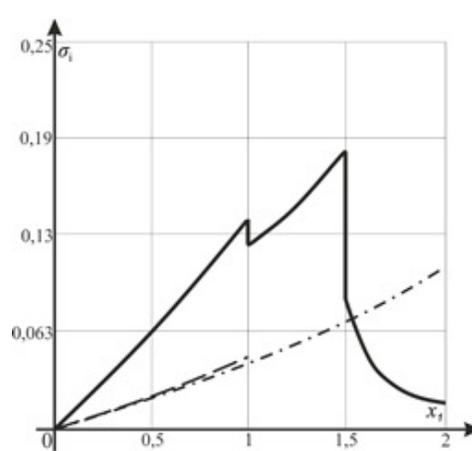


Рис. 11. Распределение интенсивности касательных напряжений при котором максимум достигается во внутренней точке дополнительного тела

На рис 10 показано распределение интенсивности касательных напряжений при медленном наращивании, которое начинается спустя малый промежуток времени ($\tau_0 = 0.1$, $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 7$). В этом случае максимум интенсивности касательных напряжений достигается на границе основного и дополнительного тел.

Рассмотрим случай ступенчатого момента

$$M(t) = \begin{cases} 0,1 & t \leq T, \\ 1,8 & t > T. \end{cases}$$

Если взять $T \in (\tau_1, \tau_2)$, то максимум интенсивности касательных напряжений достигается внутри дополнительного тела. На рис 11 приведены изменения интенсивности касательных напряжений при $T = 3$.

7. Выводы.

- (i) В предлагаемой работе приводится пример применения теории поверхностного роста развиваемой в школе академика Н. Х. Арутюняна для исследования задачи кручения призматического стержня.
- (ii) Дана постановка начально-краевых задач деформирования наращиваемого по боковой поверхности стержня треугольного сечения.
- (iii) Предложены методы решения поставленных краевых задач. Методы решения основаны на приведении неклассических задач наращивания вязкоупругих стареющих тел к задачам теории упругости с внутренним параметром, использовании теории аналитических функций для решения. Истинные параметры напряженно-деформированного состояния восстановлены по формулам расшифровки.
- (iv) Численными экспериментами установлено, что при кручении в готовом теле без учета процесса наращивания максимум интенсивности касательных напряжений достигается на границе тела. При наращивании максимум интенсивности касательных напряжений может достигаться на границе раздела основного и дополнительного тел, на границе готового тела и даже в произвольной точке дополнительного тела.
- (v) Полученные результаты могут служить основой для решения важных прикладных задач для деталей и элементов конструкций, изготавливаемых при помощи современных технологий из функционально градиентных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Classification of cubic auxetics // *physica status solidi (b)*. 2013. Vol. 250, no. 10. P. 2038–2043.
- [2] Hegab H. A. Design for additive manufacturing of composite materials and potential alloys: a review // *Manufacturing Review*. 2016. Vol. 3. p. 11.
- [3] Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood, S. Akinlabi, M. Shatalov et al. // *Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology*. 2019. Dec. Vol. 30. P. 51–58. URL: <https://www.gup.ugal.ro/ugaljournals/index.php/awet/article/view/2639>.
- [4] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // *Business horizons*. 1990. Vol. 55. P. 155–162.
- [5] Experimental Investigation of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. M. Lasisi, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, 2020. P. 515–522.
- [6] Effect of Process Parameters on the Hardness Property of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. M. Lasisi, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, 2020. P. 523–529.
- [7] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi, G. A. Soliu, R. M. Mahamood et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 555–564.
- [8] Study of Additive Manufactured Ti–Al–Si–Cu/Ti–6Al–4V Composite Coating by Direct Laser Metal Deposition (DLMD) Technique / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 503–513.

- [9] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu/Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*. 2020. Vol. 51, no. 6. P. 766–773.
- [10] Ciarletta P. Preziosi L. M. G. A. Mechanobiology of interfacial growth // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2013. Vol. 61. P. 852–872.
- [11] Ciarletta P. Ambrosi D. M. G. A. P. L. Mechano-transduction in tumour growth modelling Physical constraints of morphogenesis and evolution // *European Physical Journal E*. 2013. Vol. 36. p. 23.
- [12] Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth*. Springer, 2017.
- [13] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses computing in blood vessels in virtue of pathological growth processes // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. 2018. P. 618–622.
- [14] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // *AIP Conference Proceedings*. 2019. Vol. 2116, no. 1. p. 380013.
- [15] Southwell R. V. *Introduction to the theory of elasticity*, 2nd ed. Oxford Univ. Press., 1941.
- [16] Рашба Э. И. Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения. 1953.
- [17] Харлаб В. Д. Линейная теория ползучести наращиваемого тела // *Механика стержневых систем и сплошных сред*: Тр. ЛИСИ. 1966. С. 93–119.
- [18] Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э. *Механика растущих вязкоупругопластических тел*. М: Наука, 1987. 472 с.
- [19] Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 1. Движение потока осаждаемых частиц с переменной скоростью // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1992. № 5. С. 6–24.
- [20] Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 2. Случай падения приращиваемых частиц с постоянной скоростью // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1992. № 6. С. 99–112.
- [21] Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Термомеханическая модель наращиваемого тела: вариационная формулировка. Препринт. Ин-т проблем механики РАН. М.
- [22] Дмитриева А. М., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Наращивание термоупругого сферического слоя: применение вариационного подхода. Препринт. Ин-т проблем механики РАН. М.,.
- [23] Arutyunyan N. K., Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1984. Vol. 48, no. 1. P. 1–10.
- [24] Тринчер В. К. Общая геометрически линейная постановка задачи определения деформированного состояния для тела с переменной границей // *Проблемы современной механики*. Ч.2. Под ред. Л.И. Седова. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 119–124.
- [25] Быковцев Г. И. *Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред*: Сборник статей. Владивосток: Дальнаука.
- [26] Murashkin, E. V., Stadnik, N. E. Compatibility Conditions in Continua with Microstructure // *MATEC Web Conf*. 2017. Vol. 95. p. 12001.
- [27] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном дифференциальном ограничении в асимметричных теориях механики растущих тел // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2019. № 6. С. 38–46.
- [28] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // *Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2019. № 3(41). С. 11–29.
- [29] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* Т. 23.
- [30] Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматлит, 1961. 519 с.
- [31] Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. *Кручение упругих тел*. м: Физматгиз, 1963. 667 с.
- [32] Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Springer, 1977. xxxi + 732 с.

M. N. Mikhin, E. V. Murashkin

TORSION OF A GROWING PRISMATIC BAR WITH TRIANGULAR CROSS-SECTION MADE OF A FUNCTIONAL-GRADED MATERIAL

Russian State University for the Humanities, Branch in Domodedovo, Russia

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper considers the problem of torsion of a growing triangular cross-section bar made of a viscoelastic aging functionally-graded material with integral boundary conditions at the ends. The process of continuous growth under the influence of torque is studied. Methods for solving the set boundary value problems by reducing the problems of the growth theory to the problems of the theory of elasticity with an internal parameter are proposed. Deciphering formulas are given to restore the true parameters of the stress-strain state. The distribution of the shear stress intensity at different stages of the growth process is investigated. Calculations of the problem of torsion of a prismatic bar with a cross-section in the form of a regular triangle are presented.

Keywords: growing solids, propagating growing surface, residual stress, functionally-graded material, viscoelasticity, aging material

REFERENCES

- [1] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisoenko D. S. Classification of cubic auxetics // *physica status solidi (b)*. 2013. Vol. 250, no. 10. P. 2038–2043.
- [2] Hegab H. A. Design for additive manufacturing of composite materials and potential alloys: a review // *Manufacturing Review*. 2016. Vol. 3. p. 11.
- [3] Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood, S. Akinlabi, M. Shatalov et al. // *Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology*. 2019. Dec. Vol. 30. P. 51–58. URL: <https://www.gup.ugal.ro/ugaljournals/index.php/awet/article/view/2639>.
- [4] Berman B. 3–D printing: The new industrial revolution // *Business horizons*. 1990. Vol. 55. P. 155–162.
- [5] Effect of Process Parameters on the Hardness Property of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. M. Lasisi, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, 2020. P. 523–529.
- [6] Experimental Investigation of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. M. Lasisi, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, 2020. P. 515–522.
- [7] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi, G. A. Soliu, R. M. Mahamood et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 555–564.

Mikhin Mikhail Nikolaevich

e-mail: mmokin@inbox.ru, PhD, Associated Professor, Branch of the Russian State University for the Humanities, Domodedovo, Russia

Murashkin Evgenii Valerievich

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, PhD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 19-51-60001, 20-01-00666.

- [8] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu/Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*. 2020. Vol. 51, no. 6. P. 766–773.
- [9] Study of Additive Manufactured Ti–Al–Si–Cu/Ti–6Al–4V Composite Coating by Direct Laser Metal Deposition (DLMD) Technique / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 503–513.
- [10] Ciarletta P. Preziosi L. M. G. A. Mechanobiology of interfacial growth // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2013. Vol. 61. P. 852–872.
- [11] Ciarletta P. Ambrosi D. M. G. A. P. L. Mechano-transduction in tumour growth modelling Physical constraints of morphogenesis and evolution // *European Physical Journal E*. 2013. Vol. 36. p. 23.
- [12] Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth*. Springer, 2017.
- [13] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // *AIP Conference Proceedings*. 2019. Vol. 2116, no. 1. p. 380013.
- [14] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses computing in blood vessels in virtue of pathological growth processes // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. 2018. P. 618–622.
- [15] Southwell R. V. *Introduction to the theory of elasticity*, 2nd ed. Oxford Univ. Press., 1941.
- [16] Rashba E. I. *Determination of stresses in arrays from the action of their own weight, taking into account the order of their construction*. 1953.
- [17] Harlab V. D. *Linear theory of creep of a growing solids* // *The mechanics of rod systems and continuous media: Tr. LISP*. 1966. P. 93–119.
- [18] Arutyunyan N. K., Drozdov A. D., Naumov V. E. *Mechanics of growing viscoelastoplastic solids*. Moscow, Nauka, 1987. 472 p.
- [19] Arutyunyan N. K., Naumov V. E., Radaev Y. N. Dynamic accretion of the elastic layer. Part 1. The motion of the flow of deposited particles with a variable velocity // *Izv. USSR AS. MTT*. 1992. no. 5. P. 6–24.
- [20] Arutyunyan N. K., Naumov V. E., Radaev Y. N. Dynamic accretion of the elastic layer. Part 2. The case of deposition of incremental particles at a constant velocity // *Izv. AN SSSR. MTT*. 1992. no. 6. P. 99–112.
- [21] Naumov V. E., Radaev Yu. N. Thermomechanical model of an growing solids: variational formulation. Preprint. M.: Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences.
- [22] Dmitrieva A. M., Naumov V. E., Radaev Yu. N. Growth of thermoelastic spherical layer: variational approach application. Preprint. M.: Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences.
- [23] Arutyunyan N. K., Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1984. Vol. 48, no. 1. P. 1–10.
- [24] Trincher V. K. On the statement of the problem of determining stresses in the gravitational state of a growing solid // *Izv. USSR AS. MTT*.
- [25] Bykovtsev G. I. *Selected fundamental problems in the mechanics of solids: Collection of papers*. Vladivostok: Dal'nauka.
- [26] Murashkin, E. V., Stadnik, N. E. Compatibility Conditions in Continua with Microstructure // *MATEC Web Conf*. 2017. Vol. 95. p. 12001.
- [27] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54, no. 8. P. 1157–1164.
- [28] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a class of constitutive equations on propagating growing surface // *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state*. 2019. no. 3(41). P. 11–29.
- [29] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. T*. 23.
- [30] Arutyunyan N. K., Abramyan B. L. *Torsion of Elastic Solids*. Moscow, Fizmatgiz, 1963. 667 p.
- [31] Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Springer, 1977. xxxi + 732 p.
- [32] Saint-Venant B. *Memoir on prism torsion. Memoir on prism bending*. Moscow, Fizmatgiz, 1961. 519 p.