Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 2 (44). С. 155–160

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

СОВМЕСТНОСТЬ СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ В МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ СРЕДАХ. ПСЕВДОТЕНЗОРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В статье рассматривается процедура вывода условий совместности на поверхностях сильных разрывов в микрополярных термоупругих средах. Условия совместности сильных разрывов 4-тензора Пиолы–Кирхгофа и 4-тензора энергии–импульса выводятся из принципа наименьшего действия. Приведена определяющая форма микрополярного термоупругого потенциала для изотропных и гемитропных сред. Развиваемая псевдотензорная формулировка условий совместности сильных разрывов может быть применена при моделировании динамики изотропных и гемитропных микрополярных термоупругих сред.

Ключевые слова: микроструктура, микрополярность, директор, сильный разрыв, условие совместности, Лагранжиан, изотропия, гемитропия, аддитивные технологии

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.015

УДК: 539.3

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Термодинамика физико-механических процессов зачастую связана с распространением в трехмерном пространстве поверхности, при переходе через которую исследуемые физические поля претерпевают сильный разрыв, т.е. сами поля непрерывны, а их производные, начиная с первой, вообще говоря, разрывны. Это наблюдается, например, при моделировании ударных воздействий, коротко-импульсных возмущений, процессов фазового перехода, многочисленных процессов аддитивный технологий. Современные конструкционные материалы (в частности, метаматериалы, биоматериалы и т.д.) могут обладать

Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 18-01-00844, № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.06.2020

микроструктурными особенностями и для моделирования их поведения может потребоваться привлечение неклассических моделей механики сплошных сред [1, 2].

Бурное развитие методов аддитивных технологий существенно упростило производство 3D–материалов. Лазерное напыление металлических сплавов ускоряет процессы изготовления изделий из титановых сплавов сложной геометрии и состава. Производимые таким способом 3D–изделия и 3D–материалы обладают сложными анизотропными термомеханическими свойствами, в том числе, наличием микроструктуры.

Постановка краевых условий на поверхностях разрывов физических полей является нетривиальной задачей механики континуума. Для корректного решения волновых задач теории микрополярной термоупругости требуется привлечение теоретико-полевого формализма [1–3] и аппарата алгебры относительных тензоров [4–11]. Относительные тензоры естественным образом возникают в механике и термодинамике микрополярных упругих сред. В частности, таковыми выступают: естественных элемент объема, псевдоплотность Лагранжиана, 4-псевдотензор Пиолы–Кирхгофа, 4-псевдотензор энергии–импульса. Формулировка основных законов термодинамики и определяющих уравнений микрополярной теории упругости в терминах относительных тензоров (псевдотензоров) позволяет более глубоко понять физическую и геометрическую природу физических полей.

В настоящей работе мы будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в монографии [1].

Первый вводный раздел статьи посвящен краткому литературному обзору исследуемой проблемы и ее актуальности.

Во втором разделе сформулирован принцип наименьшего действия. Получена дивергентная форма законов сохранения. Указана форма вектора тока в условиях конечных вариаций.

Третий раздел статьи посвящен проблемам вывода условий совместности сильных разрывов на распространяющихся в трехмерном пространстве поверхностях. Вводится понятие скачка физического поля. Получены 4-ковариантные условия совместности сильных разрывов 4-псевдотензора Пиолы—Кирхгофа и 4-псевдотензора энергии—импульса поля и их трехмерные аналоги.

Полученные в предыдущем разделе условия совместности сильных разрывов конкретизируются в четвертом разделе статьи для термоупругих микрополярных сред.

2. Принцип наименьшего действия в механике сплошных деформируемых сред. В основе теоретико-полевого формализма лежит принцип наименьшего действия. Интегральный функционал действия в четырехмерном пространстве—времени с элементарным естественным объемом $d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4$ можно представить в виде

$$\Im = \int \mathcal{L}(X^\beta, \varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k) d^4X, \tag{1}$$

где φ^k — полевые переменные, ∂_α $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ — оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате X^α.

Использование естественного элемента объема подразумевает, что Лагранжиан будет являться относительным скаляром (псевдоскаляром) веса $+1$. При использовании инвариантного элемента объема dV, имеющего нулевой вес, Лагранжиан будет абсолютным скаляром.[1]

Согласно принципу наименьшего действия (δ — символ первой вариации интегрального функционала)

$$\delta\Im = 0,$$

т.е. действие (1) экстремально для всех допустимых вариаций физических полей φ^k и неварьируемых пространственных координатах X^α.

Законы сохранения при использовании теоретико–полевого формализма записываются через вектор тока в дивергентной форме

$$\partial_\beta J^\beta = 0,$$

причем вектор тока J^β вычисляется в терминах конечных вариаций согласно

$$J^\beta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\delta'\varphi^k + \left(\mathcal{L}\delta^\beta_\alpha - (\partial_\alpha\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right)\delta' X^\alpha. \tag{2}$$

где δ' обозначает конечную вариацию.

Первая вариация действия (1) для конечных вариаций физических полей и пространственно-временных координат получается в виде [1]

$$\delta'\Im = \int(\partial_\beta J^\beta)d^4X. \tag{3}$$

Отметим, что выражение (2) для вектора тока по существу получено Э. Нетер в 1918 г. с помощью теории вариационных симметрий интегрального функционала действия.

3. Совместность сильных разрывов на распространяющихся в трехмерном пространстве поверхностях. Рассмотрим в трехмерном пространстве распространяющуюся двустороннюю поверхность $\Sigma^\pm$. Ее аналог $\underset{4}{\Sigma}^\pm$ в четырехмерном пространстве неподвижен. Будем полагать, что физическое поле непрерывно при переходе через эту поверхность, а его пространственные градиенты терпят разрыв.

Воспользовавшись теоремой Остроградского–Гаусса, перейдем к поверхностным интегралам в формуле (3), в итоге при закрепленных вариациях $\delta\varphi^k$ и δX^β получим

$$\delta\Im = \int\limits_{\Sigma^+} J^\beta\mathcal{N}_\beta d\Sigma - \int\limits_{\Sigma^-} J^\beta\mathcal{N}_\beta d\Sigma, \tag{4}$$

где $\mathcal{N}_\beta$ — 4-вектор нормали к поверхности $\underset{4}{\Sigma}$.

Отсюда при условии непрерывности вариаций $\delta\varphi^k$ и δX^β можно получить 4-ковариантные условия совместности сильных разрывов

$$\mathcal{N}_\beta\left[-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right] = 0, \quad \mathcal{N}_\beta\left[\mathcal{L}\delta^\beta_\alpha - (\partial_\alpha\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right] = 0. \tag{5}$$

Здесь и далее, квадратными скобками будем обозначать скачки заключенных в них величин при переходе через поверхность $\underset{4}{\Sigma}$.

---

[1]Заинтересованный читатель может найти теорию отсноительных тензоров (псевдотензоров) в многомерных пространствах (в нашем случае, четырехмерных пространствах) в классических руководствах по тензорному анализу и многомерной геометрии [4–13].

Приняв обозначения для 4-псевдотензора Пиола—Кирхгофа и 4-псевдотензора энергии—импульса поля

$$\underset{4}{S}{}^{\beta\cdot}_{\cdot k} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)}, \qquad T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = \mathcal{L}\delta^\beta_\alpha - (\partial_\alpha \varphi^k)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)}, \tag{6}$$

условия совместности (5) можно преобразовать к трехмерной форме

$$\begin{aligned} &-c\,[T^{4\cdot}_{\cdot 4}] + n_\mu\,[T^{\mu\cdot}_{\cdot 4}] = 0, \quad -c\,[T^{4\cdot}_{\cdot\lambda}] + n_\mu\,[T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda}] = 0 \qquad (\lambda,\, \mu = 1,2,3), \\ &-c[\underset{4}{S}{}^{4\cdot}_{\cdot k}] + n_\mu[\underset{4}{S}{}^{\mu\cdot}_{\cdot k}] = 0 \qquad (\mu = 1,2,3), \end{aligned} \tag{7}$$

где c — нормальная скорость распространения поверхности Σ, n_μ — единичный вектор 3-нормали.

Условия совместности для сильных разрывов физических полей необходимо дополнить геометрическими и кинематическими условиями совместности Адамара—Томаса [14] второго и первого порядка справедливыми для произвольного поля φ^k.

4. Условия совместности сильных разрывов в термоупругих микрополярных средах. Псевдоскалярную плотность действия в (1) зададим в форме

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{kj}\partial_4 x^k \partial_4 x^j + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{ij} \overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{J}} \partial_4 \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^i \partial_4 \underset{\mathfrak{b}}{d}{}^j - \psi(X^\alpha, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j, \vartheta, \partial_4\vartheta, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j, \partial_\alpha\vartheta). \tag{8}$$

Здесь X^α $(\alpha = 1,2,3)$ — лагранжевы координаты; x^j $(j = 1,2,3)$ — эйлеровы координаты; $\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j$ $(\mathfrak{a} = 1,2,3)$ — директоры, детерминирующие микроповорот;[2] ϑ — температурное смещение. Здесь $\overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{J}}$ — тензор микроинерции, ρ_{R} — референциальная плотность, g_{ij} — метрический тензор пространства, ψ — псевдоплотность свободной энергии Гельмгольца.

Уравнения поля в этом случае принимают вид:

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \partial_4 P_j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} && (\alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3), \\ &\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}_j - \partial_4(\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_j) = 0 && (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3), \\ &\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \partial_4 s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} && (\alpha = 1,2,3), \end{aligned} \tag{9}$$

и дополняются определяющими уравнениями:

$$\begin{aligned} &S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}, \quad \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j)}, \quad \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j}, \\ &P_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_4 x^j)}, \qquad \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_4 \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j)}, \qquad s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_4\vartheta)}, \quad j^\alpha_{\mathrm{R}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\vartheta)}. \end{aligned} \tag{10}$$

[2] Отметим, что микроповорот может быть как малым, так и конечным.

Условия совместности на поверхности сильного разрыва поля в микрополярной среде, согласно (7), записываются в форме:

$$
\begin{gathered}
-c[\mathcal{L} - P_l \partial_4 x^l - \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_l \partial_4 \underset{\mathfrak{a}}{d}^l - s\partial_4 \vartheta] + n_\mu [S^{\mu\cdot}_{\cdot l} \partial_4 x^l + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l} \partial_4 \underset{\mathfrak{a}}{d}^l - j^\mu_{\mathrm{R}} \partial_4 \vartheta] = 0, \\
c[P_l \partial_\lambda x^l + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_l \partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}^l + s\partial_\lambda \vartheta] + n_\mu [\mathcal{L}\delta^\mu_\lambda + S^{\mu\cdot}_{\cdot l} \partial_\lambda x^l + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l} \partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}^l - j^\mu_{\mathrm{R}} \partial_\lambda \vartheta] = 0, \\
c\rho_R g_{kl} [\partial_4 x^k] = n_\mu [S^{\mu\cdot}_{\cdot l}], \quad c\rho_R g_{kl} \overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{I}} [\partial_4 \underset{\mathfrak{a}}{d}^k] = n_\mu [\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}], \\
c[s] = n_\mu [j^\mu_{\mathrm{R}}] \quad (l, \lambda, \mu = 1, 2, 3).
\end{gathered}
\tag{11}
$$

5. Заключение и выводы.

(1) Рассматривается конвенциональная процедура вывода условий совместности на поверхностях сильных разрывов в термоупругих микрополярных континуумах.

(2) Теоретико-полевой формализм дополняется аппаратом алгебры и анализа относительных тензоров в четырехмерном пространстве.

(3) Условия совместности сильных разрывов 4-псевдотензора Пиолы–Кирхгофа и 4-псевдотензора энергии–импульса выводятся из принципа наименьшего действия.

(4) Сформулированы условия совместности на распространяющейся в трехмерном пространстве поверхности сильного разрыва перемещений, температурных перемещений и микровращений для микрополярного термоупругого континуума.

(5) Развитую в работе псевдотензорную формулировку условий совместности сильных разрывов можно применять в динамике изотропных и гемитропных микрополярных термоупругих сред.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. Физматлит, 2009. 156 с.

[2] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.

[3] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.

[4] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с.

[5] Ricci and Levi-Civita's Tensor Analysis Papers: Translation, Comments, and Additional Material / G. Ricci-Curbastro, R. Hermann, M. M. G. Ricci et al. Brookline: Math Science Press, 1975. Vol. 2. 260 p.

[6] Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с.

[7] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.

[8] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto university press, 1949. Vol. 5. 334 p.

[9] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.

[10] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: https://www.jstor.org/stable/1989146.

[11] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 2007. XII+290 p.

[12] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.

[13] Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. 547 с.

[14] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York: Academic Press, 1961. 267 с.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

COMPATIBILITY OF STRONG DISCONTINUITIES IN MICROPOLAR THERMOELASTIC MEDIA. A PSEUDOTENSOR FORMULATION

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper deals with the regular procedures for deriving compatibility conditions on the surfaces of strong discontinuities in thermoelastic micropolar media. The jump conditions of the Piola–Kirchhoff 4-pseudotensor and the energy-momentum 4-pseudotensor are derived from the principle of least action. The compatibility conditions on the propagating strong discontinuity surface are explicitly formulated for a micropolar thermoelastic continuum. The developed pseudotensor formulation of the compatibility conditions for strong discontinuities can be applied to the dynamic problems for isotropic and hemitropic micropolar thermoelastic media.

Keywords: microstructure, micropolarity, director, strong rupture, compatibility condition, Lagrangian, isotropy, hemitropia, additive technologies

REFERENCES

[1] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Elements of the Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants. FIZMATLIT, 2009. 156 p.
[2] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Wave Problems of the Field Theory and Thermomechanics. Saratov University Press, 2010. 328 p.
[3] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
[4] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen: Noordhoff, 1964. 429 p.
[5] Ricci and Levi-Civita's Tensor Analysis Paper: Translation, Comments, and Additional Material / G. Ricci-Curbastro, R. Hermann, M. M. G. Ricci et al. Brookline: Math Science Press, 1975. Vol. 2. 260 p.
[6] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p.
[7] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.
[8] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto university press, 1949. Vol. 5. 334 p.
[9] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
[10] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: https://www.jstor.org/stable/1989146.
[11] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 2007. XII+290 p.
[12] Rosenfeld B. A. Multidimensional Spaces. Moscow: Nauka, 1966. 648 p.
[13] Rosenfeld B. A. Non-euclidean Spaces. Moscow: Nauka, 1969. 547 p.
[14] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York: Academic Press, 1961. 267 c.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.