Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 35–48

Ю. Н. Радаев

МЕТАГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В МЕХАНИКЕ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматриваются дифференциальные уравнения для потенциалов перемещений и микровращений, замещающие связанные векторные дифференциальные уравнения линейной теории микрополярной упругости. Исследуются только гармонические зависимости от времени. Опираясь на представление векторов перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторов, обеспечивающее выполнимость связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости, получены новые представления в терминах двух метагармонических векторных полей. Проблема нахождения вихревых составляющих перемещений и микровращений приводится к решению двух несвязанных между собой векторных метагармонических уравнений. Часто указанные уравнения могут быть решены разделением пространственных переменных. Поэтому полученные представления могут находить применение в прикладных задачах механики деформируемого твердого тела, связанных с распространением гармонических волн перемещений и микровращений, характеризующихся заданным азимутальным числом, вдоль длинных цилиндрических волноводов.

Ключевые слова: микрополярная теория упругости, вектор перемещения, вектор микровращения, связанный, векторный потенциал, вихревая часть, винтовое уравнение, винтовое поле, уравнение Гельмгольца, метагармоническре уравнение, волновод

DOI: 10.37972/chgpu.2020.86.27.003

УДК: 539.374

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Истоки микрополярных теорий следует искать в трудах В. Фойгта (W. Voigt, 1887 г.). Микрополярная теория упругости, впервые с необходимой полнотой изложенная в [1], может рассматриваться

Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 „Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности").

Поступила 01.06.2020

как дальнейшее обобщение теории упругости. Теория упругости, как известно, давно сформировалась сначала как инженерная, а затем и как физическая наука [2]. Классическая теория упругости довольно хорошо объясняет механическое поведение реальных твердых деформируемых тел во всех случаях, когда «зернистость» строения тел не является существенной для объяснения их деформаций, т.е когда внутренний характерный размер «зерна» заметно меньше геометрических размеров самого тела.

Моделирование состояний подобных «зернистых» структур основывается на предположении о том, что положение элемента тела задается его местом в пространстве, а его пространственная ориентация — при помощи трех ортонормированных векторов, которые называются директорами. В микрополярных теориях положения и ориентации считаются кинематически независимыми. В линейной теории вместо одного тензора деформаций необходимо использовать два асимметричных тензора второго ранга. В этих моделях напряженное состояние представляется асимметричным тензором силовых напряжений и дополнительно — асимметричным тензором моментных напряжений, поэтому упругие тела в любой несимметричной теории характеризуются весьма значительным числом определяющих постоянных.

Уравнения микрополярной теории упругости достаточно хорошо известны [3–5] (см. также более ранние первоисточники [6–9]). Их вывод, основанный на принципе виртуальных перемещений, имеется в статье [10].

Целью работы является изучение связанной системы векторных дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории изотропного упругого тела в случае гармонической зависимости полей перемещений и микровращений от времени. Их внимательный анализ и различные преобразования с помощью потенциалов перемещений и микровращений (безвихревых и вихревых) позволяют получить новые системы векторных дифференциальных уравнений (как связанные, так и не связанные). Естественно, что наиболее интересны только те, которые обеспечивают переход от связанных уравнений к несвязанным. Ясно, что несвязанные уравнения лучше поддаются дальнейшему исследованию.

Весьма похожие постановки задач возникают также в прикладных задачах связанной линейной термоупругости [11]. Особенно это относится к вопросам распространения гармонических волн в *гиперболических* термоупругих средах [12]. Представляемая работа может рассматриваться как развитие подхода, изложенного в нашей предыдущей работе [13], где выполнено расщепление основной связанной системы векторных дифференциальных уравнений гармонической микрополярной теории упругости на несвязанные уравнения. В этой же работе показано фундаментальное значение винтовых уравнений в теории гармонических задач механики упругих тел. Заметим, что минимально необходимые сведения, относящиеся к винтовым уравнениям, могут быть найдены, например, в книге [14]. Полученные в настоящей работе результаты могут найти применение в прикладных задачах механики деформируемого твердого тела, связанных с распространением гармонических волн перемещений и микровращений, характеризующихся заданным азимутальным числом, вдоль длинных цилиндрических волноводов. С другой стороны они выступают как дальнейшее развитие методов и результатов, изложенных в книге [12].

Содержание представляемой работы может быть охарактеризовано следующим образом. После вводного раздела рассматриваются линейные связанные дифференциальные уравнения микрополярной теории упругости, сформулированные в терминах вектора перемещений и вектора микровращений. Приводится ряд форм таких уравнений. Затем, в третьем разделе, вводятся потенциалы перемещений и микровращений, исходя из разложения векторного поля на вихревую и безвихревую составляющие. Для потенциалов (двух скалярных и двух векторных) получена несвязанная система для скалярных потенциалов и связанная система дифференциальных уравнений для векторных потенциалов, которые замещают исходную систему уравнений линейной микрополярной теории упругости в том смысле, что обеспечивают выполнимость основных уравнений микрополярной теории. В следующем, четвертом разделе вводится вихревое векторное поле, удовлетворяющее естественному калибровочному условию, которое само по себе оказывается в состоянии выступить как полная реализация вихревых частей перемещений и микровращений. Указанное векторное поле на самом деле складывается из четырех винтовых векторных полей. В пятом разделе получено представление четырех винтовых векторных полей в терминах двух метагармонических векторов. Шестой раздел посвящен тем соотношениям микрополярной теории, которые необходимы для представления асимметричного тензора деформации, тензора изгиба—кручения, векторов и тензоров напряжений и моментных напряжений в терминах метагармонических потенциалов. Аккуратное оперирование с этими формулами подразумевает введение фундаментальных антисимметричных псевдотензоров и символов.

2. Связаннные уравнения линейной теории микрополярной упругости в терминах перемещений и микровращений. Связанные векторные дифференциальные уравнения линейной микрополярной теории упругости, сформулированные в терминах перемещений и микровращений, имеют вид [10]:

$$\begin{cases} G[(1+c_1)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}+(1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}+2c_1\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}]=\rho\partial^2_{\cdot\cdot}\mathbf{u}, \\ GL^2[(1+c_2)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}+(1-c_2+2c_3)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}]-2Gc_1(2\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})=\Im\partial^2_{\cdot\cdot}\boldsymbol{\phi}. \end{cases} \tag{1}$$

где ρ — плотность; $\Im$ — коэффициент микроинерции; $\mathbf{u}$ — вектор перемещения; $\boldsymbol{\phi}$ — вектор микровращения; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная длина микрополярной теории упругости; c_1, c_2, c_3 — физически безразмерные определяющие постоянные; $\boldsymbol{\nabla}$ — трехмерный оператор Гамильтона; $\partial_{\cdot}$ — частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных переменных.

Система векторных дифференциальных уравнений с частными производными (1) в современной литературе обычно заменяется другой. Достаточно ввести определяющие постоянные α, β, γ, λ, μ, ε согласно

$$\begin{gathered} G=\mu, \quad \frac{2\nu}{1-2\nu}=\frac{\lambda}{\mu}, \quad GL^2=\gamma, \\ c_1=\frac{\alpha}{\mu}, \quad c_2=\frac{\varepsilon}{\gamma}, \quad c_3=\frac{\beta}{2\gamma} \end{gathered}$$

после чего система (1) преобразуется к следующей более или менее общепринятой форме [3, 4]:

$$\begin{cases} (\mu+\alpha)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}+(\mu-\alpha+\lambda)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}+2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}=\rho\partial^2_{\cdot\cdot}\mathbf{u}, \\ (\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}+(\gamma-\varepsilon+\beta)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}-2\alpha(2\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})=\Im\partial^2_{\cdot\cdot}\boldsymbol{\phi}, \end{cases} \tag{2}$$

которая без труда преобразуется в

$$\begin{cases} (\lambda+2\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}-(\mu+\alpha)\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})+2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}=\rho\partial_{..}^2\mathbf{u}, \\ (\beta+2\gamma)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}-(\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi})-2\alpha(2\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})=\mathfrak{I}\partial_{..}^2\boldsymbol{\phi}. \end{cases} \tag{3}$$

В настоящей работе векторное дифференциальное уравнение (3) будет рассматриваться в областях трехмерного пространства, обладающих свойством поверхностной односвязанности: любая замкнутая поверхность, целиком расположенная в области может быть стянута в точку, не выходя за границу области.

Зависимость от времени в дальнейшем исследовании предполагается гармонической, т.е. любое физическое поле $\mathbf{\Gamma}$ представляется как произведение комплексной амплитуды (за которой мы сохраним то же самое обозначение $\mathbf{\Gamma}$, что и для самого поля) на комплексную гармоническую экспоненту $e^{i\omega t}$, где ω — циклическая частота.

3. Связанные уравнения для потенциалов перемещений и микровращенией. Воспользуемся хорошо известными разложениями Гельмгольца для векторов перемещений и микровращений на вихревые и безвихревые части

$$\begin{aligned} \mathbf{u}&=\boldsymbol{\nabla}\Phi+\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\Psi}, \\ \boldsymbol{\phi}&=\boldsymbol{\nabla}\Sigma+\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}, \end{aligned} \tag{4}$$

которые представляют указанные векторные поля с помощью скалярных потенциалов Φ, Σ и векторных потенциалов $\boldsymbol{\Psi}$, $\mathbf{H}$.

Присоединим к (4) (хотя по-существу в этом нет никакой необходимости) калибровочные соотношения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Psi}&=0, \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{H}&=0. \end{aligned} \tag{5}$$

Подстановка разложений Гельмгольца (4) в систему дифференциальных уравнений (3) позволяет после ряда преобразований (не использующих калибровочные условия) получить уравнения для скалярных и векторных потенциалов.

Дифференциальные уравнения для скалярных потенциалов Φ, Σ не связаны между собой и поэтому рассматриваются как два независимых уравнения

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi-\frac{1}{c_\parallel^2}(\partial_.)^2\Phi=0, \\ &\Delta\Sigma-\frac{1}{{}_\mu c_\parallel^2}(\partial_.)^2\Sigma-\frac{\Omega^2}{{}_\mu c_\parallel^2}\Sigma=0. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь постоянные $c_\parallel^2$, ${}_\mu c_\parallel^2$ и Ω^2 выражаются в терминах определяющих постоянных согласно

$$c_\parallel^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho},\qquad {}_\mu c_\parallel^2=\frac{\beta+2\gamma}{\mathfrak{I}},\qquad \Omega^2=\frac{4\alpha}{\mathfrak{I}}.$$

Для векторных потенциалов $\boldsymbol{\Psi}$, $\mathbf{H}$ получаются два связанных между собой векторных дифференциальных уравнения

$$\begin{cases} \mathscr{A}_\perp\boldsymbol{\Psi}+2d_\perp^2\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}=\mathbf{0}, \\ \mathscr{B}_\perp\mathbf{H}+\dfrac{\Omega^2}{2\,{}_\mu c_\perp^2}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{0}, \end{cases} \tag{7}$$

где были введены постоянные

$$d_{\perp}^{2} = \frac{{}^{\backprime}c_{\perp}^{2}}{{}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^{2}}, \quad {}^{\backprime}c_{\perp}^{2} = \frac{\alpha}{\rho}, \quad {}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^{2} = \frac{\mu+\alpha}{\rho}, \quad {}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2} = \frac{\gamma+\epsilon}{\mathfrak{I}}; \tag{8}$$

и, кроме того, — два дифференциальных оператора второго порядка

$$\mathscr{A}_{\perp} = \Delta - \frac{1}{{}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^{2}}(\partial.)^{2}, \qquad \mathscr{B}_{\perp} = \Delta - \frac{1}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}}(\partial.)^{2} - \frac{\Omega^{2}}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}}. \tag{9}$$

Исследование связанных уравнений для векторных потенциалов перемещений и микровращений вызывает значительные трудности и поэтому мы сосредоточимся именно на этих уравнениях.

Прежде всего заметим, что дифференциальные операторы $\mathscr{A}_{\perp}$ и $\mathscr{B}_{\perp}$ в условиях гармонической зависимости от времени сводятся к

$$\mathscr{A}_{\perp} = \Delta + \frac{\omega^{2}}{{}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^{2}}, \qquad \mathscr{B}_{\perp} = \Delta + \frac{\omega^{2}}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}} - \frac{\Omega^{2}}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}}. \tag{10}$$

Далее введем следующие две постоянные:

$$\alpha_{\perp}^{2} = \frac{\omega^{2}}{{}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^{2}}, \quad \beta_{\perp}^{2} = \mathrm{Abs}\frac{\omega^{2}-\Omega^{2}}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}},$$

после чего операторы $\mathscr{A}_{\perp}$ и $\mathscr{B}_{\perp}$ преобразуются к следующему виду:

$$\mathscr{A}_{\perp} = \Delta + \alpha_{\perp}^{2}, \qquad \mathscr{B}_{\perp} = \Delta \pm \beta_{\perp}^{2}, \tag{11}$$

где выбор того или иного знака в выражении для $\mathscr{B}_{\perp}$ зависит от величины циклической частоты изменения гармонических полей

$$\omega^{2} - \Omega^{2} \gtrless 0.$$

В итоге в гармоническом случае связанная система уравнений для потенциалов приобретает вид

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_{\perp}^{2})\mathbf{\Psi} + 2d_{\perp}^{2}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta \pm \beta_{\perp}^{2})\mathbf{H} + \dfrac{\Omega^{2}}{2\,{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{\Psi} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{12}$$

Ограничимся исследованием высокочастотных гармонических волн, когда циклическая частота ω оказывается выше порогового значения, определяемого постоянной Ω. Тогда система уравнений (12) приводится к

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_{\perp}^{2})\mathbf{\Psi} + 2d_{\perp}^{2}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta + \beta_{\perp}^{2})\mathbf{H} + \dfrac{\Omega^{2}}{2\,{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{\Psi} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{13}$$

Для упрощения записи введем обозначение

$$g_{\perp}^{2} = \frac{\Omega^{2}}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}}d_{\perp}^{2}.$$

Окончательно приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_\perp^2)\boldsymbol{\Psi} + 2d_\perp^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta + \beta_\perp^2)\mathbf{H} + \dfrac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{14}$$

Внимательный анализ проведенных рассуждений показывает, что связанная система уравнений для потенциалов (14) получается также и в несколько иной форме (и снова без учета калибровки потенциалов):

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi}) + \alpha_\perp^2 \boldsymbol{\Psi} + 2d_\perp^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ -\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}) + \beta_\perp^2 \mathbf{H} + \dfrac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{15}$$

Для скалярных потенциалов Φ, Σ в случае гармонической зависимости полей перемещений и микровращений от времени на основании (6) приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \Phi + \alpha_\parallel^2 \Phi = 0, \\ (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \Sigma + \beta_\parallel^2 \Sigma = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\alpha_\parallel^2 = \frac{\omega^2}{c_\parallel^2}, \quad \beta_\parallel^2 = \mathrm{Abs} \frac{\omega^2 - \Omega^2}{{}_{\mu}^{\parallel}c_\parallel^2}.$$

4. Фундаментальное винтовое векторное поле микрополярной теории упругости. Представление вихревых составляющих перемещений и микровращений с помощью винтовых векторных полей решает главную задачу настоящего исследования: переход от связанной системы дифференциальных уравнений (15) к несвязанным уравнениям, что в конечном итоге должно позволить найти аналитические подходы к решению прикладных задач механики микрополярных континуумов.

Достижение этой цели начинается с рассмотрения вихревых составляющих перемещений и микровращений как одного и того же вихревого векторного поля $\boldsymbol{\Upsilon}$, но с различными масштабными факторами:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} = a\boldsymbol{\Upsilon}, \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = b\boldsymbol{\Upsilon}; \end{cases} \tag{17}$$

при этом a priori будет выполнено *естественное* калибровочное условие

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Upsilon} = 0.$$

Векторное поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ играет центральную роль во всем дальнейшем исследовании, поэтому мы будем называть его фундаментальным винтовым полем микрополярной теории.

Подстановка (17) в систему векторных дифференциальных уравнений (15) позволяет получить следующую систему уравнений относительно поля $\boldsymbol{\Upsilon}$:

$$\begin{cases} -a\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}) + \alpha_\perp^2 a\boldsymbol{\Upsilon} + 2d_\perp^2 b\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}, \\ -b\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}) + \beta_\perp^2 b\boldsymbol{\Upsilon} + \dfrac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} a\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

В левой части первого из уравнений приведенной выше системы добавим и отнимем одно и то же слагаемое (c — некоторая постоянная)

$$c\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon};$$

то же самое выполним и со вторым уравнением и слагаемым (d — некоторая постоянная)

$$d\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}.$$

После ряда преобразований убеждаемся в том, что, если положить

$$\frac{a}{c} = \frac{c + 2d_\perp^2 b}{a\alpha_\perp^2}, \quad \frac{b}{d} = \frac{d + (2d_\perp^2)^{-1} g_\perp^2 a}{b\beta_\perp^2},$$

то связанные уравнения для потенциалов будут удовлетворяться, когда

$$\begin{cases} -c\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} + a\alpha_\perp^2 \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}, \\ -d\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} + b\beta_\perp^2 \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Получить одно независимое уравнение для определения векторного поля $\boldsymbol{\Upsilon}$ удается, если принять, что

$$\frac{c}{d} = \frac{\alpha_\perp^2}{\beta_\perp^2} \frac{a}{b};$$

тогда оказывается достаточной выполнимость следующего *винтового* уравнения

$$-\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} + p\alpha_\perp^2 \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}, \tag{18}$$

где p представляет собой отношение

$$p = \frac{a}{c}.$$

Обратимся далее к нахождению постоянных. Всего их четыре: a, b, c, d. Из них можно образовать три независимых отношения:

$$p = \frac{a}{c}, \quad q = \frac{b}{c}, \quad s = \frac{d}{c}.$$

Для указанных отношений из предыдущих рассуждений получаются ровно три независимых уравнения

$$\begin{cases} p^2\alpha_\perp^2 = 1 + 2qd_\perp^2, \\ q^2\beta_\perp^2 = s^2 + ps\dfrac{g_\perp^2}{2d_\perp^2}, \\ ps\dfrac{\alpha_\perp^2}{\beta_\perp^2} = q. \end{cases}$$

Из данной выше системы уравнений можно определить постоянную q, получив сначала квадратное уравнение

$$2d_\perp^2\alpha_\perp^2 q^2 + (\alpha_\perp^2 - \beta_\perp^2 - g_\perp^2)q - \frac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} = 0,$$

из которого находятся два различных вещественных значения для q:

$$4d_\perp^2\alpha_\perp^2 q = \beta_\perp^2 + g_\perp^2 - \alpha_\perp^2 \pm \sqrt{(\beta_\perp^2 + g_\perp^2 - \alpha_\perp^2)^2 + 4g_\perp^2\alpha_\perp^2}.$$

Для постоянной p^2 также получаются два различных вещественных значения согласно

$$2\alpha_\perp^4 p^2 = \beta_\perp^2 + g_\perp^2 + \alpha_\perp^2 \pm \sqrt{(\beta_\perp^2 + g_\perp^2 + \alpha_\perp^2)^2 - 4\alpha_\perp^2\beta_\perp^2}.$$

Начиная с этого момента, введем два значения p_1, p_2, которые соответствуют положительному и отрицательному знакам в приведенной только что формуле, и введем также два *положительных* значения K_1, K_2 с помощью соотношений

$$\alpha_\perp^4 p_{1,2}^2 = K_{2,1}^2, \quad \alpha_\perp^2 p_1 = \mp K_2, \quad \alpha_\perp^2 p_2 = \mp K_1.$$

Ясно, что постоянные (волновые числа) K_1, K_2 могут быть вычислены на основании

$$\begin{aligned}\sqrt{2}K_2 &= \sqrt{\beta_\perp^2 + g_\perp^2 + \alpha_\perp^2 + \sqrt{(\beta_\perp^2 + g_\perp^2 + \alpha_\perp^2)^2 - 4\alpha_\perp^2\beta_\perp^2}},\\ \sqrt{2}K_1 &= \sqrt{\beta_\perp^2 + g_\perp^2 + \alpha_\perp^2 - \sqrt{(\beta_\perp^2 + g_\perp^2 + \alpha_\perp^2)^2 - 4\alpha_\perp^2\beta_\perp^2}}.\end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что волновые числа K_1, K_2 в силу своего определения упорядочены согласно

$$K_2 > K_1 > 0.$$

Таким образом, всего для параметра p имеется *четыре* различных вещественных значения

$$\mp K_1, \quad \mp K_2;$$

в результате векторное поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ должно удовлетворять одному из *четырех* винтовых уравнений

$$-\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} \mp K_{2,1}\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}, \tag{20}$$

где знаки $\mp$ и индексы 1, 2 между собой никак не согласованы.

Таким образом, имеется ровно четыре независимых поля[1]

$$\underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_-, \quad \underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_+, \quad \underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_-, \quad \underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_+,$$

которые должны быть интегралами несвязанных векторных уравнений (20) и линейные комбинации которых будут определять вихревые части векторов перемещений и микровращений в соответствии с (17). При этом следует учитывать, что однозначно определяется лишь отношение b/a и, поскольку

$$\frac{b}{a} = \frac{q}{p},$$

то отношение b/a имеет четыре различных значения, которые без труда находятся из данных выше формул.

Обозначая четыре указанных значения отношения b/a через

$$\frac{b}{a} = \mp g_{2,1},$$

в итоге приходим к формуле для вихревых частей перемещений и микровращений

$$\boldsymbol{\nabla} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Psi} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -g_2 \end{pmatrix} \underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_- + \begin{pmatrix} 1 \\ g_2 \end{pmatrix} \underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_+ + \begin{pmatrix} 1 \\ -g_1 \end{pmatrix} \underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_- + \begin{pmatrix} 1 \\ g_1 \end{pmatrix} \underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_+. \tag{21}$$

[1] Приводимые ниже обозначения для четырех различных вариантов векторного поля $\boldsymbol{\Upsilon}$ согласованы с четырьмя уравнениями (20), выписанными в сокращенной форме.

В этой формуле мы полагаем

$$g_{2,1} = \frac{\beta_\perp^2 + g_\perp^2 - \alpha_\perp^2 \pm \sqrt{(\beta_\perp^2 + g_\perp^2 - \alpha_\perp^2)^2 + 4\alpha_\perp^2 g_\perp^2}}{4d_\perp^2 K_{2,1}}. \tag{22}$$

Заметим, что здесь знаки $\pm$ согласованы с индексами 2, 1, т.е. последняя формула на самом деле определяет два вещественных значения параметра g.

5. Представление вихревых частей перемещений и микровращений в терминах двух метагармонических векторов. Следуя [13], винтовые уравнения (20) будем решать, вводя два новых вихревых векторных потенциала $\underset{1}{\mathbf{\Pi}}$ и $\underset{2}{\mathbf{\Pi}}$ в соответствии с

$$\begin{aligned} \underset{1}{\mathbf{\Upsilon}}_{\mp} &= \boldsymbol{\nabla} \times \underset{1}{\mathbf{\Pi}} \mp K_1 \underset{1}{\mathbf{\Pi}}, \\ \underset{2}{\mathbf{\Upsilon}}_{\mp} &= \boldsymbol{\nabla} \times \underset{2}{\mathbf{\Pi}} \mp K_2 \underset{2}{\mathbf{\Pi}}. \end{aligned} \tag{23}$$

Эти два потенциала предполагаются вихревыми, т.е.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \underset{1}{\mathbf{\Pi}} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \underset{2}{\mathbf{\Pi}} = 0.$$

Для того, чтобы векторные поля $\underset{2}{\mathbf{\Upsilon}}_{-}$, $\underset{2}{\mathbf{\Upsilon}}_{+}$, $\underset{1}{\mathbf{\Upsilon}}_{-}$, $\underset{1}{\mathbf{\Upsilon}}_{+}$ удовлетворяли винтовым уравнениям (20) потенциалы $\underset{1}{\mathbf{\Pi}}$ и $\underset{2}{\mathbf{\Pi}}$, в свою очередь, должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца[2]

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \underset{1}{\mathbf{\Pi}} + K_1^2 \underset{1}{\mathbf{\Pi}} &= \mathbf{0}, \\ (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \underset{2}{\mathbf{\Pi}} + K_2^2 \underset{2}{\mathbf{\Pi}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{24}$$

Подставляя в формулу (21) представления (23) для векторных полей $\underset{2}{\mathbf{\Upsilon}}_{-}$, $\underset{2}{\mathbf{\Upsilon}}_{+}$, $\underset{1}{\mathbf{\Upsilon}}_{-}$, $\underset{1}{\mathbf{\Upsilon}}_{+}$, пренебрегая затем несущественным множителем 2, после ряда преобразований получаем

$$\boldsymbol{\nabla} \times \begin{pmatrix} \mathbf{\Psi} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla} \times \underset{1}{\mathbf{\Pi}} + \boldsymbol{\nabla} \times \underset{2}{\mathbf{\Pi}} \\ g_1 K_1 \underset{1}{\mathbf{\Pi}} + g_2 K_2 \underset{2}{\mathbf{\Pi}} \end{pmatrix}$$

или также

$$\boldsymbol{\nabla} \times \begin{pmatrix} \mathbf{\Psi} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla} \times & \boldsymbol{\nabla} \times \\ g_1 K_1 & g_2 K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{1}{\mathbf{\Pi}} \\ \underset{2}{\mathbf{\Pi}} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Заметим, что

$$g_{2,1} K_{2,1} = \frac{\beta_\perp^2 + g_\perp^2 - \alpha_\perp^2 \pm \sqrt{(\beta_\perp^2 + g_\perp^2 - \alpha_\perp^2)^2 + 4\alpha_\perp^2 g_\perp^2}}{4d_\perp^2}$$

и справедливы неравенства

$$g_2 > 0 > g_1.$$

[2] В современной научной литературе уравнения Гельмгольца часто называют метагармоническими уравнениями (metaharmonic equations), а их регулярные решения — метагармоническими функциями (в данном случае — метагармоническими векторными полями).

Принимая во внимание разложения (4) и (25), приходим к следующему представлению перемещений и микровращений в терминах двух метагармонических потенциалов:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\phi}\end{pmatrix} = \boldsymbol{\nabla}\begin{pmatrix}\Phi\\ \Sigma\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}\times\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}} + \boldsymbol{\nabla}\times\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}\\ g_1K_1\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}} + g_2K_2\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}\end{pmatrix}. \tag{26}$$

Здесь скалярные и векторные потенциалы должны удовлетворять метагармоническим уравнениям (см. (16) и (24)) с волновыми числами $\alpha_\|$, $\beta_\|$, K_1, K_2:

$$\begin{aligned}
&((\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}) + \alpha_\|^2)\Phi = 0,\\
&((\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}) + \beta_\|^2)\Sigma = 0;\\
&((\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}) + K_1^2)\,\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}} = \mathbf{0},\\
&((\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}) + K_2^2)\,\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{27}$$

6. Представления для деформаций, силовых и моментных напряжений. На основании представлений (26) могут быть получены также выражения для деформаций, силовых и моментных напряжений в терминах метагармонических потенциалов. Сначала нам потребуются некоторые вспомогательные представления и формулы микрополярной теории упругости.

Определим имеющие фундаментальное значение в микрополярных теориях символы перестановок ϵ^{ijk}, ϵ_{ijk} соотношениями

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } i,j,k = 123, 231, 312;\\ -1, & \text{если } i,j,k = 132, 213, 321;\\ \ \ 0, & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Символы перестановок — относительные тензоры (псевдотензоры) весов $+1$ и -1 соответственно.

Далее рассмотрим локальные базисные триэдры, связанные с выбранной координатной системой в трехмерном пространстве: $\underset{s}{\boldsymbol{\imath}}$ $(s = 1, 2, 3)$ — локальный ковариантный базис; $\overset{s}{\boldsymbol{\imath}}$ $(s = 1, 2, 3)$ — локальный контравариантный (взаимный) базис.

Базисные векторы и взаимные базисные векторы удовлетворяют следующему соотношению: $\underset{s}{\boldsymbol{\imath}}\cdot\overset{k}{\boldsymbol{\imath}} = \overset{k}{\underset{s}{\delta}}$ $(k = 1, 2, 3;\ s = 1, 2, 3)$.

Наряду с символами перестановок определим ориентирующий псевдоскаляр (относительный скаляр веса $+1$)

$$e = \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}\cdot(\underset{2}{\boldsymbol{\imath}}\times\underset{3}{\boldsymbol{\imath}}).$$

Подчеркнем, что $e > 0$ для правоориентированной координатной системы, $e < 0$ для левоориентированной координатной системы.

Введем также следующий относительный скаляр отрицательного веса -1:

$$e^{-1} = \overset{1}{\boldsymbol{\imath}}\cdot(\overset{2}{\boldsymbol{\imath}}\times\overset{3}{\boldsymbol{\imath}}).$$

Наконец, рассмотрим истинные e-тензоры (тензоры перестановок) e^{ijk}, e_{ijk}:

$$\begin{aligned}
e_{ijk} &= e\epsilon_{ijk},\\
e^{ijk} &= e^{-1}\epsilon^{ijk},
\end{aligned}$$

т.е.

$$e_{skl} = \begin{cases} +\sqrt{g}\epsilon_{skl}, & \text{если } e > 0; \\ -\sqrt{g}\epsilon_{skl}, & \text{если } e < 0; \end{cases}$$

$$e^{skl} = \begin{cases} +\dfrac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{skl}, & \text{если } e > 0; \\ -\dfrac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{skl}, & \text{если } e < 0. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\underset{s}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{k}{\boldsymbol{\imath}} = e_{skl}\overset{l}{\boldsymbol{\imath}},$$

$$\overset{s}{\boldsymbol{\imath}} \times \overset{k}{\boldsymbol{\imath}} = e^{skl}\underset{l}{\boldsymbol{\imath}},$$

$$e_{skl} = \underset{s}{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\underset{k}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{l}{\boldsymbol{\imath}}),$$

$$e^{skl} = \overset{s}{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\overset{k}{\boldsymbol{\imath}} \times \overset{l}{\boldsymbol{\imath}}).$$

Учитывая изложенное выше, для e-тензора

$$\boldsymbol{e} = e^{skl}\underset{s}{\boldsymbol{\imath}} \otimes \underset{k}{\boldsymbol{\imath}} \otimes \underset{l}{\boldsymbol{\imath}}$$

нетрудно получить формулу

$$-\mathbf{I} \times \mathbf{I} = \boldsymbol{e},$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор.

Далее рассмотрим асимметричный тензор деформации линейной микрополярной теории упругости

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\phi},$$

или

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{e},$$

а также

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} + \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{I} \times \mathbf{I})$$

и

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} + (\mathbf{I} \times \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\phi}.$$

Тензор изгиба—кручения представляет собой градиент поля микроповоротов, т.е. он представляет собой тензор второго ранга

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\phi}$$

Следующие фундаментальные соотношения позволяют определить тензоры силовых и моментных напряжений

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu},$$

где $\mathbf{t}$, $\mathbf{m}$ — векторы сил и моментов, действующих на плоский элемент, нормальный единичному директору $\mathbf{n}$.

В случае изотропной среды определяющие уравнения линейного микрополярного упругого тела будут иметь вид

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mu + \alpha)\boldsymbol{\epsilon} + (\mu - \alpha)\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{T}} + \lambda \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\epsilon}\, \mathbf{I},$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\gamma + \epsilon)\boldsymbol{\kappa} + (\gamma - \epsilon)\boldsymbol{\kappa}^{\mathrm{T}} + \beta \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{I}.$$

С их помощью без труда получаются формулы для векторов силовых и моментных напряжений $\mathbf{t}$ и $\mathbf{m}$

$$\begin{cases} \mathbf{t} = 2\mu(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} + (\mu-\alpha)\mathbf{n}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) + \lambda\mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + 2\alpha\mathbf{n}\times\boldsymbol{\phi}, \\ \mathbf{m} = \beta\mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}) + 2\gamma(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\phi} + (\gamma-\varepsilon)\mathbf{n}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}). \end{cases}$$

Они используются в прикладных задачах микрополярной теории упругости при постановке граничных условий.

Метагармонические потенциалы вводятся в данные выше формулы на основании

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = -\alpha_{\|}^{2}\Phi, \\ &\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} = -\beta_{\|}^{2}\Sigma; \\ &\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} = -(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\underset{1}{\mathbf{\Pi}} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\underset{2}{\mathbf{\Pi}} = K_1^2\underset{1}{\mathbf{\Pi}} + K_2^2\underset{2}{\mathbf{\Pi}}, \\ &\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} = g_1K_1\boldsymbol{\nabla}\times\underset{1}{\mathbf{\Pi}} + g_2K_2\boldsymbol{\nabla}\times\underset{2}{\mathbf{\Pi}}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что в некоторых случаях метагармонические уравнения (27) могут быть решены разделением пространственных переменных. Это справедливо, в частности, в случае цилиндрической области. Поэтому полученные представления (26) могут находить применение в прикладных задачах механики деформируемого твердого тела, связанных с распространением гармонических волн перемещений и микровращений, характеризующихся заданным азимутальным числом, вдоль длинных цилиндрических волноводов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 pp.

[2] Саусвелл Р.В. Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 676 с.

[3] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.

[4] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

[5] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics.) Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xv+345 pp.

[6] Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums// Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band 10. 1958. S. 195–213.

[7] Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums// Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band 16. 1964. S. 1–22.

[8] Palmov V.A. Fundamental Equations of the Theory of Asymmetric Elasticity// Prikl. Math. Mech. Vol. 28, No. 3. 1964. Pp. 401–408.

[9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper// Acta Mechanica. Vol. 2. 1966. pp. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729

[10] Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2018. Т. 22. №3. С. 504–517. doi: 10.14498/vsgtu1635.

[11] Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. In: North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Eds. H.A. Lauwerier, W.T. Koiter. Vol. 16. Amsterdam, London: North-Holland; New York: American Elsevier, 1973. xiv+425 pp.

[12] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

[13] Радаев Ю.Н. Представление перемещений в пространственной гармонической теории упругости с помощью двух винтовых векторов// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. №6. 2020. (в печати)

[14] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories/ In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. Pp. 226–902.

Y. N. Radayev

METAHARMONIC POTENTIALS IN MECHANICS OF MICROPOLAR MEDIA

Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The coupled vector differential equations of the linear theory of micropolar elasticity formulated in terms of displacements and micro-rotations are studied. A harmonic dependence of the physical fields on time is assumed. By employing the displacements and micro-rotations representation formula in the terms of four screw vectors a new representation based on two metaharmonic vectors are obtained. Thus the problem of determination of the vortex parts of the displacement and micro-rotation fields is reduced to solution of two uncoupled vector metaharmonic equations. The latter can be oftenly solved by the separation of variables technique. For this reason obtained results can be applied to various problems of the micropolar elasticity related to harmonic wave propagation in waveguides. In particular this is true for waves of a given azimuthal number in a long cylindrical waveguide.

Keywords: micropolar elasticity, displacement vector, micro-rotation vector, coupled, vector potential, vortex part, screw equation, screw field, Helmholtz equation, metaharmonic equation, waveguide

REFERENCES

[1] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 pp.

[2] Саусвелл Р.В. Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 676 с.

[3] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.

[4] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

[5] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics.) Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xv+345 pp.

[6] Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums// Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band 10. 1958. S. 195–213.

[7] Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums// Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band 16. 1964. S. 1–22.

[8] Palmov V.A. Fundamental Equations of the Theory of Asymmetric Elasticity// Prikl. Math. Mech. Vol. 28, No. 3. 1964. Pp. 401–408.

[9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper// Acta Mechanica. Vol. 2. 1966. pp. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729

[10] Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2018. Т. 22. №3. С. 504–517. doi: 10.14498/vsgtu1635.

[11] Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. In: North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Eds. H.A. Lauwerier, W.T. Koiter. Vol. 16. Amsterdam, London: North-Holland; New York: American Elsevier, 1973. xiv+425 pp.

Radayev Yuri Nickolaevich

`e-mail:` radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

[12] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.
[13] Радаев Ю.Н. Представление перемещений в пространственной гармонической теории упругости с помощью двух винтовых векторов// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. №6. 2020. (в печати)
[14] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories/ In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. Pp. 226–902.