

А. А. Алексеев, В. Г. Зубчанинов, В. И. Гультияев

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ПРОЦЕССОВ СЛОЖНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО  
ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПО НЕКОТОРЫМ  
МНОГОЗВЕННЫМ ТРАЕКТОРИЯМ**

*Тверской государственной технической университета, г. Тверь, Россия*

**Аннотация.** Представлена верификация математической модели теории процессов путем сравнения численных расчетов с экспериментальными данными при сложном упругопластическом деформировании стали 45 по некоторым многозвенным ломаным траекториям.

**Ключевые слова:** пластичность, теория процессов, сложное нагружение, многозвенная траектория деформирования, моделирование процессов, экспериментальные данные.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.65.81.006

УДК: 539.374

При численном моделировании процессов сложного неупругого деформирования материалов по плоским неаналитическим траекториям в девиаторном пространстве формоизменения А.А. Ильюшина [1] использованы определяющие соотношения теории упругопластических процессов, которые в скалярной форме имеют вид [2]

$$\frac{dS_k}{ds} = M_1 \frac{d\mathcal{E}_k}{ds} + \left( \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 \right) \frac{S_k}{\sigma}, \quad \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1, \quad (1)$$

где  $S_k, \mathcal{E}_k (k = 1, 3)$  – координаты векторов напряжений  $\bar{\sigma}$  и деформаций  $\bar{\mathcal{E}}$  формоизменения соответственно;  $s$  – длина дуги траектории деформирования;  $\vartheta_1$  – угол

---

© Алексеев А. А., Зубчанинов В. Г., Гультияев В. И., 2020

*Алексеев Андрей Алексеевич*

**e-mail:** alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия,

*Зубчанинов Владимир Георгиевич*

**e-mail:** vlzsub@gmail.com, доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия,

*Гультияев Вадим Иванович*

**e-mail:** vig0@mail.ru, доктор технических наук, заведующий кафедрой автомобильные дороги, основания и фундаменты, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 20.06.2020

сближения, функционал векторных свойств материала;  $\vartheta_1^0$  – значение  $\vartheta_1$  в начальной точке аналитического участка траектории;  $\sigma$  – функционал процесса скалярных свойств материала;  $\kappa_1$  – кривизна,  $M_1, d\sigma/ds$  – функционалы процесса, зависящие от параметров внутренней геометрии траектории деформаций:  $s, \kappa_1, \vartheta_1^0$ . Определяющие соотношениями (1) в соответствии с частным постулатом изотропии А.А. Ильюшина [1] учитывают как скалярные свойства материалов, характеризующие связь между инвариантами девиаторов напряжений и деформаций, так и векторные свойства, характеризующие несоосность девиаторов напряжений, деформаций и их приращений. Угол сближения  $\vartheta_1$  характеризует отклонение вектора напряжений от касательной к траектории деформирования в каждой ее точке и отражает влияние векторных свойств материала на процесс деформирования.

В качестве закона упрочнения для процессов, близких к простому нагружению может быть использован приближенный закон упрочнения Одквиста–Ильюшина  $\sigma = \Phi(s)$ , который мало отличается от универсального закона Роша и Эйхингера  $\sigma = \Phi(\Theta)$  при простом нагружении и не учитывает историю нагружения в явном виде. Такое пренебрежение параметрами внутренней геометрии траектории деформирования  $\kappa_1$  и  $\vartheta_1^0$  может приводить к недостоверным результатам при практических расчетах, особенно для траекторий большой кривизны и траекторий с  $\vartheta_1^0 > 90^\circ$ . Поэтому создание новых математических моделей, описывающих неупругое деформирование материалов и построение на их базе более точных аппроксимаций функционалов, учитывающих все параметры сложности процесса, является важной задачей теории пластичности.

Для многозвенных прямолинейных траекторий, имеющих сложную историю нагружения, предложены аппроксимации функционалов

$$\sigma(s) = \Phi(s) + Af_0^p \Omega(\Delta s) - \Delta\sigma_k, \quad (2)$$

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0) f^q, \quad (3)$$

где  $\Delta s = s - s_k^T$  – приращение длины дуги траектории после ее первого излома в некоторой точке  $K$ ;  $\Delta\sigma_k = \Phi(s_k^T) - \sigma_k^T$  – разница в точках излома между значениями универсальной функции Одквиста–Ильюшина и расчетным значением модуля вектора напряжений  $\sigma_k^T$ ;  $G$  – модуль упругости второго рода (модуль сдвига);  $2G_p = \Phi(s)/s$  – удвоенный пластический модуль при простом нагружении; индекс «нолик» у пластического модуля сдвига  $G_p$  соответствует его значению в точке излома траектории;

$$\Omega(\Delta s) = - [\gamma\Delta s e^{-\gamma\Delta s} + b(1 - e^{-\gamma\Delta s})]$$

– функция, описывающая после излома траектории скалярный нырок напряжений при сложной разгрузке и последующем вторичном пластическом деформировании;

$$f = \frac{1 - \cos\vartheta_1}{2}; \quad f_0 = f(\vartheta_1^0) = \frac{1 - \cos\vartheta_1^0}{2}$$

– функция, учитывающая ориентацию вектора напряжений в процессе деформирования и ее значение в точке излома для каждого из участков неаналитической траектории;  $A, b, \gamma, p, q$  – параметры аппроксимаций, которые определялись по предложенной методике на основе базовых опытов по двузвенным ломаным [3], для которых имеется

уже достаточно большой банк экспериментальных данных. Для аппроксимации универсальной функции упрочнения Одквиста–Ильюшина использовались выражения

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} \frac{2G}{\alpha}(1 - e^{-\alpha s}), & \text{если } 0 < s \leq s^T, \\ \sigma^T + 2G_*(s - s^T) + \sigma_*(1 - e^{-\beta(s-s^T)}), & \text{если } s > s^T, \end{cases}$$

где  $\sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$ ;  $\sigma_T$  – предел текучести при растяжении;  $s^T$  – граница участков диаграммы деформирования, разделяющая упругую часть и площадку текучести ( $0 \leq s \leq s^T$ ) от участка самоупрочнения материала ( $s > s^T$ );  $\sigma_*$ ,  $G_*$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – экспериментально определяемые параметры материала из опытов на простое нагружение.

Для определения параметров аппроксимаций функционалов [3] использован базовый опыт для двузвенной ломаной с углом 135 градусов. Общая диаграмма прослеживания процесса деформирования  $\sigma(s)$  такой траектории в сравнении с универсальной функцией  $\sigma = \Phi(s)$  представлена на рис. 1.

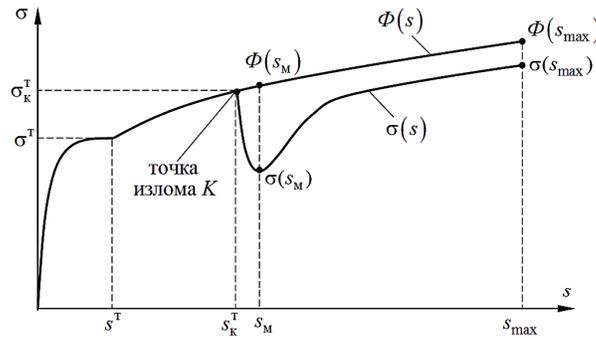


Рис. 1. К определению параметров аппроксимаций функционалов.

Для вычисления параметров были получены формулы

$$\omega = \frac{\Phi(s_{\max}) - \sigma(s_{\max})}{\Phi(s_M) - \sigma(s_M)} = \frac{b}{b + e^{-(1+b)}}, \quad b = \text{LambertW}\left(-\frac{\omega e^{-1}}{\omega - 1}\right);$$

$$A = \frac{\Phi(s_{\max}) - \sigma(s_{\max})}{b f_0^p}, \quad \gamma = \frac{\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G}{A(1+b)} = \frac{b f_0^p \left(\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G\right)}{[\Phi(s_{\max}) - \sigma(s_{\max})](1+b)},$$

позволяющие при найденном значении параметра  $b$  и различных показателях степени  $p$  найти спектр значений параметров  $A$ ,  $b$ ,  $\gamma$ , выбор которых определяется наилучшим соответствием данным базового опыта.

При заданных начальных условиях для координат вектора деформаций  $\mathcal{E}_k$  ( $k = 1, 3$ ) и угла сближения  $\vartheta_1^0$  определяющие соотношения (1) с конкретизированными функционалами (2), (3) сведены к задаче Коши, для численного решения которой и определения координат вектора напряжений  $S_k$  ( $k = 1, 3$ ) и угла  $\vartheta_1$  для каждого участка неаналитической траектории использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности в программном приложении MathWorks MATLAB. То есть, для моделирования процессов задаются экспериментальные траектории деформаций, а траектории напряжений получаются в результате интегрирования определяющих соотношений.

Экспериментальное исследование было выполнено на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ имени А.А. Ильюшина в лаборатории механических испытаний кафедры «Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета. В качестве образцов для макроэкспериментальных исследований были использованы тонкостенные цилиндрические оболочки из стали 45, имеющие в рабочей части длину  $l = 110$  мм, толщину  $h = 1$  мм и диаметр срединной поверхности  $d = 31$  мм, в стенках которых при достаточно большом отношении радиуса к толщине реализуется плоское напряженное состояние. Процесс нагружения предполагался изотермическим, а деформации – малыми. Начальная изотропия материала образцов с достаточной степенью точности была подтверждена в опытах при простом (пропорциональном) нагружении. Эксперименты реализованы при непрерывном деформировании образцов с постоянной скоростью  $10^{-6}$  сек $^{-1}$ , которая позволяет выбрать кратковременную ползучесть материала при нормальной температуре и исследовать процессы упругопластического деформирования без эффектов ползучести.

Для оценки достоверности расчетных результатов по предлагаемой математической модели на плоскости  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$  девиаторного пространства деформаций  $E_5$  реализованы неаналитические многозвенные кусочно-ломаные траектории. Программа первого эксперимента [3] при жестком (кинематическом) нагружении по траектории деформаций, состоящей из четырех звеньев с углами излома  $\theta = 135^\circ$ , представлена на рис. 2, а экспериментальные и расчетные результаты – на рис. 3–5. Экспериментальные данные на рисунках обозначены точками, модельные данные – сплошной линией.

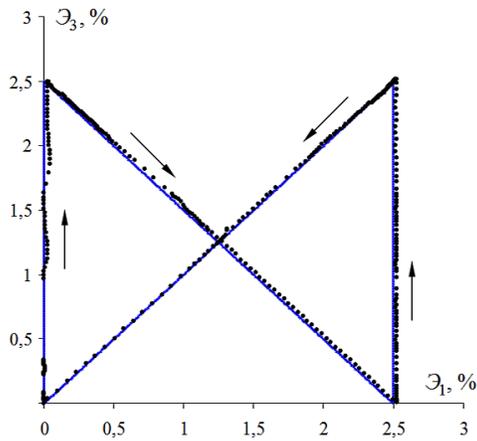


Рис. 2. Четырехзвенная траектория деформаций.

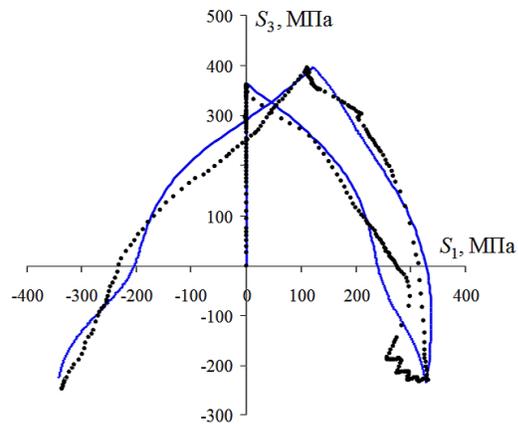
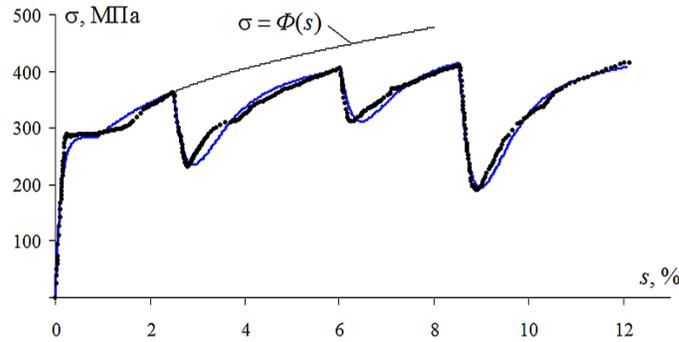
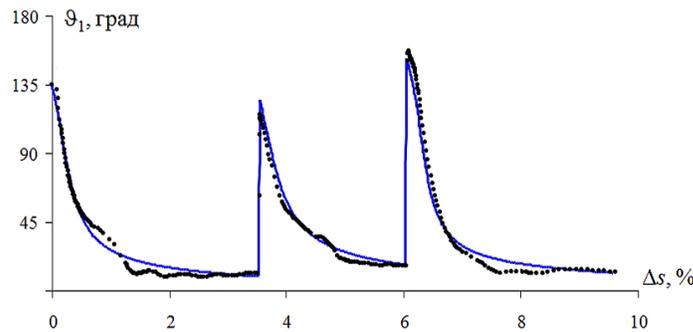


Рис. 3. Отклик по напряжениям.

Эксперименты показывают, что начальное отклонение  $\vartheta_1^0$  вектора напряжений при изломе траектории соответствует углу излома  $\vartheta_1^0 \approx \theta$  только в случае предшествующего простого нагружения, то есть при первом изломе многозвенной траектории или для двузвенных ломаных [4]. Поэтому, например, для траектории деформаций на рис. 2 углы излома одинаковые  $\theta = 135^\circ$ , но величины скалярных «нырков» напряжений различны (см. рис. 4). Значение  $\vartheta_1^0$  уменьшается (см. рис. 5), если излом траектории

Рис. 4. Диаграмма деформирования  $\sigma - s$ .Рис. 5. Диаграмма  $\vartheta_1 - \Delta s$ .

происходит в сторону отклонения вектора напряжений (второй излом для траектории на рис. 2), и увеличивается когда излом происходит в сторону противоположную отклонению вектора напряжений (третий излом). Таким образом, на величины «нырков» напряжений влияют не углы излома траектории  $\theta$ , одинаковые в данном опыте, а начальное отклонение  $\vartheta_1^0$  вектора напряжений. Это необходимо учитывать в численных расчетах, поэтому в модели при последующих изломах для начального отклонения вектора напряжений принималось  $\vartheta_1^0 = \theta \pm \vartheta_1^k$ , где  $\vartheta_1^k$  - расчетное значение угла сближения в конце предшествующего участка перед изломом траектории деформаций.

Программа второго эксперимента (рис. 6) представляет пятизвенную траекторию деформаций [5] с углами излома  $56, 3^\circ, 33, 7^\circ, 90^\circ, 121^\circ$ , причем в этой траектории все изломы производились в сторону противоположную от отклонения вектора напряжений, то есть значение  $\vartheta_1^0$  увеличивалось. Экспериментальные и модельные данные для данной траектории изображены на рис. 7–9.

Для рассмотренных траекторий деформаций сопоставление модельных данных с экспериментальными показывает их качественное и удовлетворительное количественное соответствие по скалярным свойствам, в том числе модельные данные адекватно описывают нырки напряжений (см рис. 4, 8) после изломов траектории на различные

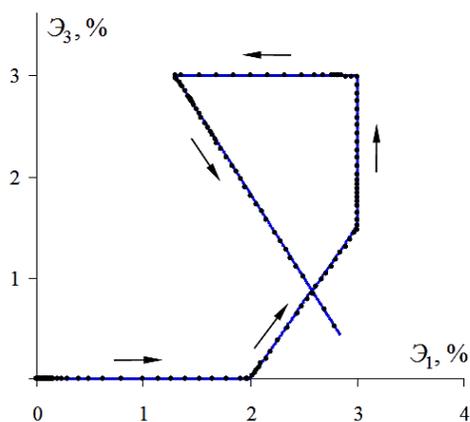


Рис. 6. Пятизвенная траектория деформаций.

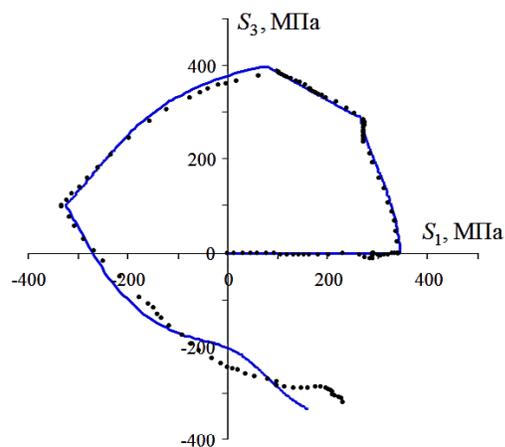


Рис. 7. Отклик по напряжениям.

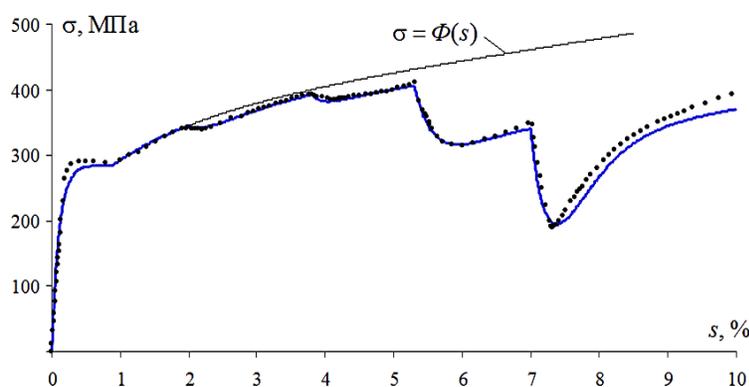


Рис. 8. Диаграмма деформирования  $\sigma - s$ .

по величине углы. Также наблюдается хорошее соответствие расчетной и экспериментальных кривых, характеризующих векторные свойства материала (см. рис. 5, 9). Это показывает достаточную для практических задач точность построенных аппроксимаций функционалов используемой математической модели теории процессов.

Таким образом, проведенная верификация математической модели теории процессов при сопоставлении результатов расчета и экспериментальных данных при упругопластическом деформировании материала сталь 45 по плоским многозвенным кусочно-ломаным траекториям подтверждает правильность моделирования процессов сложного нагружения материала для данного класса траекторий деформаций.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильющин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
- [2] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.

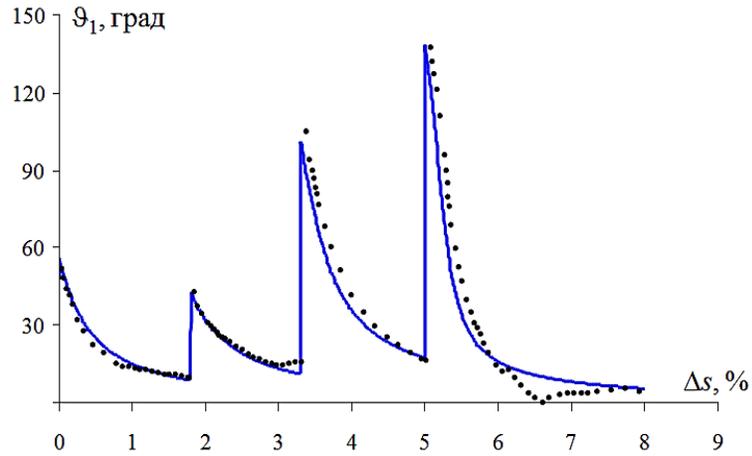


Рис. 9. Диаграмма  $\vartheta_1 - \Delta s$ .

- [3] Зубчанинов В. Г., Алексеев А.А., Гультяев В.И. Моделирование процессов упругопластического деформирования материалов по многозвенным кусочно-ломаным прямолинейным траекториям // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 3. с. 203–215.
- [4] Modeling of elastoplastic steel deformation in two-link broken trajectories and delaying of vector and scalar material properties / V. G. Zubchaninov, E. G. Alekseeva, A. A. Alekseev et al. // Mater.Phys.Mech.(MPM). 2019. Vol. 42, no. 4. p. 436–444.
- [5] Процессы сложного нагружения конструкционной стали по пятизвенной кусочно-ломаной траектории деформирования / В. Г. Зубчанинов, А. А. Алексеев, В. И. Гультяев [и др.] // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. Т. 61. с. 32–44.

A. A. Alekseev, V. G. Zubchaninov, V. I. Gultiaev

**EXPERIMENTAL STUDY AND NUMERICAL CALCULATION OF THE  
PROCESSES OF COMPLEX ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF  
MATERIALS ALONG SOME MULTI-LINK STRAIN PATHS**

*Tver State Technical University, Tver, Russia*

**Abstract.** The verification of the mathematical model of the theory of processes by comparing numerical calculations with experimental data for complex elastoplastic deformation of steel 45 along some multi-link broken paths is presented.

**Keywords:** plasticity, theory of elastoplastic processes, complex loading, multi-link strain path, modeling of processes, experimental data.

**REFERENCES**

- [1] Ilyushin A. A. Plasticity. Fundamentals of General Mathematical Theory. M.: Publishing house of the USSR Academy of Sciences, 1963. 271 p.
- [2] Zubchaninov V. Mechanics of plastic media processes. M.: Fizmatlit, 2010. 352 p.
- [3] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gultyaev V. Modeling of processes of elastoplastic deformation of materials along multi-link piecewise-broken rectilinear trajectories // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2017. no. 3. P. 203–215.
- [4] Modeling of elastoplastic steel deformation in two-link broken trajectories and delaying of vector and scalar material properties / V. G. Zubchaninov, E. G. Alekseeva, A. A. Alekseev et al. // Mater.Phys.Mech. (MPM). 2019. Vol. 42, no. 4. p. 436–444.
- [5] Processes of complex loading of structural steel along a five-bar piecewise-broken path of deformation / V. G. Zubchaninov, A. A. Alekseev, V. I. Gultyaev et al. // Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and Mechanics. 2019. Vol. 61. p. 32–44.

---

*Alekseev, Andrey Alekseevich*, Ph.D. (Technical Sciences), Associate Professor, Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia,

*Zubchaninov, Vladimir Georgievich*, Doctor of technical sciences, Professor, Department of Strength of materials, theory of elasticity and plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia,

*Gulyaev, Vadim Ivanovich*, Doctor of technical sciences, Head of Department of Automobile roads, bases and foundations, Tver State Technical University, Tver, Russia.