Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 80–88

Э. С. Велизаде

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ФРИКЦИОННОЙ ПАРЫ ТОРМОЗНОГО МЕХАНИЗМА С РАВНОМЕРНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджан

Аннотация. В работе теоретически найдена микрогеометрия поверхности трения фрикционной пары тормозного механизма, соответствующая равномерному распределению контактного давления на поверхности. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования пары трения «барабан-накладка» тормозного механизма грузового автомобиля в зависимости от геометрических и механических характеристик его элементов.

Ключевые слова: фрикционная пара, накладка, барабан, износ, равномерное распределение контактного давления.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.56.69.008

УДК: 621.891:622.87

Введение. Исследования напряженно-деформированного состояния в деталях фрикционной пары тормозного механизма «барабан-накладка», широко используемых в различных грузовых автомобилях, показывают, что деформации и контактное давление распределяются неравномерно по трущимся поверхностям. Неравномерное распределение контактного давления на поверхности трения служит причиной неравномерного износа накладки и барабана. В связи с этим необходимо, чтобы проектируемая фрикционная пара «барабан-накладка» обладала минимальной неравномерностью распределения давления на трущихся поверхностях барабана и накладки. Повысить работоспособность фрикционной пары тормозного механизма «барабан-накладка» возможно конструкторско-технологическими методами, в частности, изменяя микрогеометрию узла трения. В настоящее время имеется недостаточно решений задач по определению микрогеометрии поверхности трения [1–12], при которой созданное поле напряжений препятствует разрушению элементов пары трения. Решение этой проблемы будет способствовать повышению работоспособности фрикционной пары «барабан-накладка» тормозного механизма.

Велизаде Эврен Сахиб оглы
`e-mail:` evve2525@gmail.com, докторант, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджан.

Поступила 05.05.2020

Цель работы — разработка математической модели контактного взаимодействия и изнашивания для фрикционной пары «барабан-накладка», позволяющей рассчитать оптимальную микрогеометрию поверхности трения, при которой распределение контактного давления близко к равномерному для заданных режимах торможения автомобиля.

Постановка задачи. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние фрикционной накладки при торможении автомобиля. При многократном повторно-кратковременном режиме торможения происходит взаимодействие между контактирующими поверхностями накладки и барабана, возникают силы трения, приводящие к изнашиванию материалов сопряжения. Для определения контактного давления необходимо рассмотреть износоконтактную задачу о вдавливании накладки в поверхность тормозного барабана [13].

Считается, что к внутренней поверхности барабана с механическими характеристиками G_1 (модуль упругости) и μ_1 (коэффициент Пуассона материала) прижимается накладка с характеристиками G и μ. При этом область контакта занимает всю ширину накладки и не меняется при торможении.

Полагаем, что выполняются условия плоской деформации. Отнесем накладку к полярной системе координат $r\theta$, выбрав начало координат в центре концентрических окружностей L_0 и L с радиусами R_0 и R соответственно. Представим неизвестную границу наружного контура накладки L' в виде

$$r = \rho(\theta); \quad \rho(\theta) = R + \varepsilon H(\theta), \quad H(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k^0 \cos k\theta + b_k^0 \sin k\theta),$$

в которой функция $H(\theta)$ подлежит определению. Здесь $\varepsilon = R_{\max}/R$ — малый параметр; $R_{\max}$ — наибольшая высота впадины (выступа) неровности профиля накладки.

Аналогично, неизвестный заранее внутренний контур барабана близок круговому и может быть представлен в виде

$$\rho_1(\theta) = R_1' + \varepsilon H_1(\theta); \quad H_1(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k^1 \cos k\theta + b_k^1 \sin k\theta),$$

в которой функция $H_1(\theta)$ также подлежит определению при решении задачи оптимизации.

Требуется определить микрогеометрию поверхности трения (функции $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$), при которых распределенное контактное давление трущейся пары было бы близко к равномерному для заданных режимах торможения автомобиля. Это дополнительное условие позволяет определить искомые функции $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$.

Метод решения. Для решения поставленной задачи оптимизации вначале решается износоконтактная задача о вдавливании накладки в поверхность барабана [13].

Условие, связывающее перемещения накладки и барабана, имеет вид

$$v_1 + v_2 = \delta(\theta), \quad (|\theta| \leqslant \theta_0), \tag{1}$$

где $\delta(\theta)$ — осадка точек поверхности накладки и барабана, определяемая формой поверхности накладки и барабана, а также величиной прижимающей силы P; $2\theta_0$ — угол обхвата фрикционных накладок.

В зоне контакта, помимо нормального давления $p(\theta, t)$, действует касательное усилие, связанное с контактным давлением по закону Амонтона–Кулона.

Усилия трения $\tau_{r\theta}(\theta, t)$ способствуют тепловыделению в области контакта. Общее количество тепла в единицу времени пропорционально мощности сил трения. Количество тепла, выделяемое в единицу времени на единичной площади контакта с координатой θ, будет

$$Q(\theta, t) = V f p(\theta, t),$$

где V — скорость движения автомобиля в момент торможения; f — коэффициент трения пары.

Общее количество тепла $Q(\theta, t)$ будет расходоваться следующим образом: поток тепла в накладку $Q_1(\theta, t)$ и поток тепла на повышение температуры барабана $Q_b(\theta, t)$.

Для перемещений накладки и барабана имеем

$$v_1 = v_{1e} + v_{1r} + v_{1w}, \quad v_2 = v_{2e} + v_{2r} + v_{2w}.$$

Здесь v_{1e} — термоупругие перемещения точек контактной поверхности накладки; v_{1r} — перемещения, вызванные смятием микровыступов поверхности накладки; v_{1w} — перемещения, вызванные изнашиванием поверхности накладки; v_{2e}, v_{2r}, v_{2w} — то же для тормозного барабана.

Для определения v_{1e}, v_{1r} и v_{2e}, v_{2r} решаются задачи термоупругости для накладки и барабана соответственно. Коэффициенты теплопроводности материалов накладки и барабана в осевом, окружном и радиальном направлении приняты одинаковыми и независимыми от координат и температуры. Накладку будем моделировать круговым (кривым) брусом с сечением, близким к узкому прямоугольнику (рис. 1).

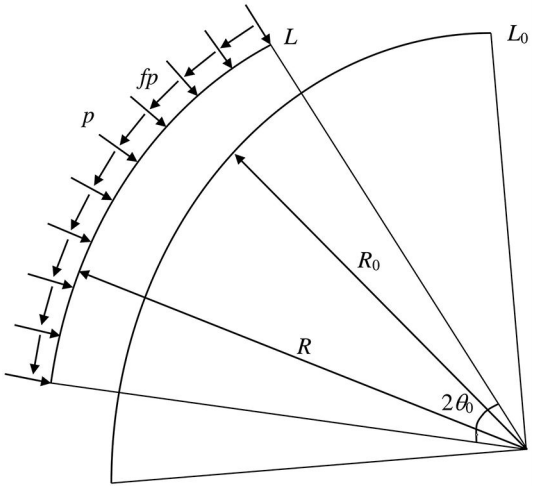

Рис. 1. Схема расчета оптимальной микрогеометрии поверхности трения фрикционной накладки

Для накладки имеет место

$$\Delta T = 0, \quad \text{при } r = \rho(\theta) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -Q, \quad T = T_c \ \text{ при } \ r = R_0,$$

$$T = T_c \ \text{ при } \ \theta = 0; \quad T = T_c \ \text{ при } \ \theta = 2\theta_0,$$

$$\text{при } r = \rho(\theta) \quad \sigma_n = -p(\theta), \ \tau_{nt} = -fp(\theta), \quad \text{при } r = R_0 \quad v_r = 0, \ v_\theta = 0.$$

На прямолинейных концах накладки граничные условия принимаются в виде

$$\int\limits_{R_0}^{R} \sigma_\theta \, dr = 0, \quad \int\limits_{R_0}^{R} \tau_{r\theta} \, dr = 0, \quad \int\limits_{R_0}^{R} \sigma_\theta r \, dr = 0 \quad \text{при } \theta = \pm\theta_0.$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности материала накладки; Δ — оператор Лапласа; T — температурная функция; T_c — температура окружающей среды; n, t — нормаль и касательная к наружной поверхности накладки; v_r, v_θ — радиальная и касательная составляющие вектора перемещений точек L соответственно; σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ — компоненты тензора напряжений.

Аналогично ставится задача термоупругости для определения перемещений v_{2e}, v_{2r} контактной поверхности барабана.

Для определения v_{1w} и v_{2w} используется кинетическое уравнение изнашивания материала для накладки и барабана [14, 15].

Температурные функции, напряжения и перемещения в накладке и тормозном барабане, а также контактное давление ищем в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими степени выше первой:

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \dots, \quad \sigma_t = \sigma_t^{(0)} + \varepsilon \sigma_t^{(1)} + \dots, \quad \tau_{nt} = \tau_{nt}^{(0)} + \varepsilon \tau_{nt}^{1} + \dots,$$

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \dots, \quad v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \dots, \quad p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \dots.$$

Значения температуры и компонент напряжений при $r = \rho(\theta)$ найдем, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r = R$. С помощью метода возмущений для граничной задачи термоупругости получаем последовательность краевых задач для накладки с круговыми границами для внутренней и наружной поверхности [16]. Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений плоской термоупругости. Решение краевой задачи теории теплопроводности в каждом приближении ищется методом разделения переменных. При решении задачи термоупругости в каждом приближении используется термоупругий потенциал перемещений и метод степенных рядов.

На основе полученного решения задачи термоупругости и интегрирования кинетического уравнения изнашивания материала накладки в нулевом приближении находим перемещения v_1^0 ее контактной поверхности. Аналогично решается задача термоупругости для тормозного барабана. На основе полученного решения задачи термоупругости для барабана и кинетического уравнения изнашивания материала тормозного барабана в нулевом приближении находится перемещение v_2^0 его контактной поверхности. Найденные величины v_1^0 и v_2^0 подставляются в основное контактное условие (1) в нулевом приближении.

Алгебраизацию основного контактного уравнения проводим аналогично [1]. В результате получаем бесконечную алгебраическую систему относительно α_k^0 ($k = 0$, 1, 2, ...), β_k^0 ($k = 1$, 2, ...) и α_k^1, β_k^1 и т.д. Полученные системы позволяют численными методами найти контактное давление в нулевом приближении.

Далее аналогично строится решение износоконтактной задачи в первом приближении. Повторяя процедуру построения алгебраических систем для нахождения искомых коэффициентов, получаем бесконечную алгебраическую систему относительно $\alpha_{k,0}^1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $\beta_{k,0}^1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) и $\alpha_{k,1}^1$, $\beta_{k,1}^1$ и т.д.

В правые части бесконечных алгебраических систем входят коэффициенты a_k^0, b_k^0, a_k^1, b_k^1 разложения функций $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$. При известных функциях $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$ полученные системы дают возможность найти контактное давление $p^1(\theta, t)$. Полученная алгебраическая система уравнений пока не является замкнутой.

В правые части полученных алгебраических систем входят коэффициенты a_0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1 разложения функций $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$. Для построения недостающих уравнений используем критерий равномерного распределения контактного давления на поверхности трения накладки и барабана. Пусть $\bar{p}$ будет оптимальное значения контактного давления на поверхности трения. Величину $\bar{p}$ требуется определить в процессе решения задачи оптимального проектирования.

Формула для контактного давления, которую символически можно записать в виде

$$p(\theta, t) = F(\theta, t, a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1) \quad (k = 1, 2, \dots, m), \tag{2}$$

показывает, что контактное давление линейно зависит от искомых коэффициентов a_k^0, b_k^0, a_k^1, b_k^1 рядов Фурье функций $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$.

Таким образом, функции $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$, описывающие профиль поверхности трения, должны быть выбраны так, чтобы обеспечивалось равномерное распределение контактного давления наилучшим образом.

Для построения недостающих алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов a_k^0, b_k^0, a_k^1, b_k^1 функций $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$ используем принцип наименьших квадратов.

Контактное давление p узла трения является независимой переменной θ и $(4m+2)$ параметра a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1. Время считается свободным параметром. Параметры a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1 постоянны (в общем случае зависят от времени), но заранее неизвестны и подлежат определению. Для отыскания неизвестных параметров производим ряд вычислений.

Разобьем отрезок $[-\theta_0, \theta_0]$ изменения θ на M частей, где $M > 4m + 2$:

$$\theta_i = -\theta_0 + i\Delta\theta, \quad \Delta\theta = \frac{2\theta_0}{M}, \tag{3}$$

$$p(\theta_i, t) = F(\theta_i, t, a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1) \quad (i = 1, 2, \dots, M).$$

Найдем такие значения неизвестных параметров, которые будут обеспечивать значениям функции контактного давления (3) постоянное значение наилучшим образом.

Принцип наименьших квадратов утверждает, что наиболее вероятными значениями параметров будут такие, при которых сумма квадратов отклонений ε_i будет наименьшей:

$$U = \sum_{m=1}^{M} \left[F(\theta_i, t, a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1) - \bar{p}\right]^2 \to \min. \tag{4}$$

Для любого момента времени рассматриваем a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1 $(k = 1, 2, \dots, m)$ как независимые переменные и приравниваем нулю частные производные от левой части (4) по этим переменным. В результате получим $(4m+3)$ уравнений с $(4m+3)$ неизвестными:

$$\frac{\partial U}{\partial a_0^0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial a_k^0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial b_k^0} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m), \tag{5}$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_0^1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial a_k^1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial b_k^1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \bar{p}} = 0.$$

Составление и решение системы (5) значительно упрощается, так как функция $F(\theta_i, t, a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1)$ линейна относительно неизвестных параметров. Эта система уравнений замыкает бесконечную алгебраическую систему износоконтактной задачи и совместно с ней должна решаться для фиксированных значений времени.

Анализ результатов моделирования. Совместное решение полученных систем уравнений позволяет найти приближенные значения коэффициентов a_k^0, b_k^0, a_k^1, b_k^1, $\bar{p}$ и α_k, β_k. В рассматриваемой задаче имеется много свободных параметров, таких как различные теплофизические и механические характеристики материалов, геометрические размеры накладки и тормозного барабана, скорость движения автомобиля. Для численной реализации предложенного метода были проведены расчеты применительно к тормозным механизмам грузовых автомобилей КамАЗ-5320. В качестве постоянных параметров были приняты: $R = 0{,}19$ м; $h_H = 0{,}016$ м — толщина накладки; $b_H = 0{,}14$ — ширина накладки; $R_\delta = 0{,}2$ м; $R_\delta^H = 0{,}25$ м — наружный радиус барабана; $f = 0{,}35$; $K_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$; $K_2 = 2 \cdot 10^{-8}$ — коэффициенты износостойкости материала накладки и барабана; $E = 6{,}9 \cdot 10^3$ МПа; $E_1 = 1{,}8 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0{,}4$; $\mu_1 = 0{,}3$ для серого чугуна материала барабана.

Были найдены значения параметров управления (коэффициенты a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1) в зависимости от физико-механических характеристик фрикционной пары «барабан-накладка» для разных моментов времени. В разложении искомых функций $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$ ограничивались $k = 5$ членами.

Результаты расчета по определению микрогеометрии контактной поверхности трения в начальный момент $t = 0$ (для различных скоростей движения автомобиля при торможении) приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения коэффициентов Фурье для оптимальной шероховатости (мкм) (строка 1 относится к шероховатости накладки)

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
						$V = 50$ км/ч					
1	0,432	0,345	–0,273	0,226	0,128	0,080	0,459	0,319	–0,147	0,108	0,072
2	0,304	0,221	0,202	–0,188	0,104	0,076	0,265	0,231	0,126	0,079	0,066
						$V = 80$ км/ч					
1	0,499	0,433	–0,347	0,268	0,155	0,083	0,479	0,329	–0,218	0,137	0,082
2	0,332	0,219	0,149	–0,121	0,103	0,080	0,284	0,249	0,153	0,012	0,079

Заключение. Знание коэффициентов a_k^0, b_k^0, a_k^1, b_k^1 функций $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$ позволяет на стадиях проектирования и изготовления выбирать класс шероховатости обработанной внешней поверхности накладки и внутренней поверхности тормозного барабана, обеспечивающий повышение износостойкости фрикционной пары тормозной системы грузового автомобиля за счет равномерного распределения контактного давления.

Обозначения: $p(\theta, t)$ — контактное давление между накладкой и барабаном при торможении; ε — малый параметр; $H(\theta)$ — функция, описывающая микрогеометрию наружной поверхности накладки; $H_1(\theta)$ — функция, описывающая микрогеометрию внутренней поверхности тормозного барабана; R и R_0 — радиусы окружностей контуров L и L_0 соответственно; a_k^0, b_k^0 — коэффициенты ряда Фурье функции $H(\theta)$;

a_k^1, b_k^1 — коэффициенты ряда Фурье функции $H_1(\theta)$; $\rho(\theta)$ — функция, описывающая наружную поверхность накладки; f — коэффициент трения фрикционной пары; t — время; V — скорость движения автомобиля в момент торможения; α_k^0, β_k^0, $\alpha_{k,0}^0$, $\beta_{k,0}^0$, α_k^1, β_k^1, $\alpha_{k,1}^0$, $\beta_{k,1}^0$ — коэффициенты ряда Фурье для функций, определяющих контактное давление; $T(r,\theta)$ — температурная функция; λ — коэффициент теплопроводности материала накладки; τ^0 — предельная удельная сила трения, ниже которой истирание поверхности фрикционной пары практически не происходит; $R_{\max}$ — наибольшая высота неровности поверхности накладки; Δ — оператор Лапласа; $Q_*(\theta,t)$ — поток тепла на повышение температуры накладки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мирсалимов В. М. Обратная износоконтактная задача для фрикционной пары // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. Т. 37, № 1. С. 62–69.

[2] Мирсалимов В. М., Ахундова П. Э. Минимизация контактного давления для фрикционной пары «втулка-вал» // Трение и износ. 2015. Т. 36, № 5. С. 529–535.

[3] Мирсалимов В. М., Ахундова П. Э. Минимизация абразивного износа внутренней поверхности втулки фрикционной пары // Трение и износ. 2016. Т. 37, № 5. С. 551–557.

[4] Мирсалимов В. М., Ахундова П. Э. Оптимальное проектирование фрикционной пары втулка-плунжер // Трение и износ. 2017. Т. 38, № 5. С. 454–460.

[5] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Inverse problems of damage mechanics for a hub of a friction pair // International Journal of Damage Mechanics. 2018. Vol. 27, Issue 1. P. 82–96.

[6] Мирсалимов В. М., Ахундова П. Э. Минимизация теплового состояния втулки фрикционной пары с помощью критерия равномерного распределения температуры на поверхности трения // Трение и износ. 2018. Т. 39, № 5. С. 514–522.

[7] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Minimization of the thermal state of the hub of a friction pair // Engineering Optimization. 2018. Vol. 50, Issue 4. P. 651–670.

[8] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Minimization of stress state of a hub of friction pair // Advances in Mathematical Physics. 2018. Vol. 2018. Article ID 8242614.

[9] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Inverse wear contact problem of the friction unit // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2018. Vol. 232, Issue 22. P. 4216–4226.

[10] Мирсалимов В. М., Ахундова П. Э. Оптимальное проектирование узла трения с равномерным контактным давлением // Трение и износ. 2019. Т. 40, № 6. С. 740–749.

[11] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Inverse problem of contact fracture mechanics for a hub of friction pair taking into account thermal stresses // Mathematics and Mechanics of Solids. 2019. Vol. 24, Issue 6. P. 1763–1781.

[12] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Optimum problem on wear decrease for a hub of friction pair // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2020. Vol. 27, Issue 5. P. 353–363.

[13] Мирсалимов В. М., Гасанов Ш. Г., Гейдаров Ш. Г. Износоконтактная задача о вдавливании колодки с фрикционной накладкой в поверхность барабана // Тр. XII Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 80-летию ИМАШ РАН «Трибология — машиностроению». Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2018. С. 341–344.

[14] Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. Москва: Машиностроение, 1988. 256 с.

[15] Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. Москва: Наука, 2001. 478 с.

[16] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 2001. 707 с.

E. S. Velizade

OPTIMUM DESIGN OF FRICTION PAIR WITH UNIFORM PRESSURE FOR A BRAKE MECHANISM

Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

Abstract. In the present work a microgeometry of friction surface for friction pair of a brake mechanism is theoretically found. The obtained microgeometry corresponds to uniform distribution of contact pressure on the surface. A closed system of algebraic equations is constructed. It allows one to obtain the solution of the optimal design problem for a "drum-lining" friction pair of the truck's brake mechanism depending on geometric and mechanical characteristics of brake mechanism elements.

Keywords: friction pair, lining, drum, wear, uniform distribution of contact pressure.

REFERENCES

[1] Mirsalimov V. M. An inverse wear contact problem for a friction couple // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2008. Vol. 37, no. 1. P. 53–59. https://doi.org/10.1007/s12001-008-1011-2.

[2] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Minimization of contact pressure for hub-shaft friction pair // Journal of Friction and Wear. 2015. Vol. 36, no. 5. P. 404–408. https://doi.org/10.3103/S1068366615050116.

[3] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Minimization of abrasive wear for the internal surface of the hub of a friction pair // Journal of Friction and Wear. 2016. Vol. 37, no. 5. P. 424–429. https://doi.org/10.3103/S1068366616050135.

[4] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Optimal design of a frictional pair of a hub-plunger // Journal of Friction and Wear. 2017. Vol. 38, no. 5. P. 384–389. https://doi.org/10.3103/S1068366617050075.

[5] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Inverse problems of damage mechanics for a hub of a friction pair // International Journal of Damage Mechanics. 2018. Vol. 27, Issue 1. P. 82–96. https://doi.org/10.1177/1056789516662698.

[6] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Minimization of the thermal state of the hub of a frictional pair using the criterion of uniform temperature distribution on a friction surface // Journal of Friction and Wear. 2018. Vol. 39, no. 5. P. 405–411. https://doi.org/10.3103/S1068366618050112.

[7] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Minimization of the thermal state of the hub of a friction pair // Engineering Optimization. 2018. Vol. 50, Issue 4. P. 651–670. https://doi.org/10.1080/0305215X.2017.1328062.

[8] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Minimization of stress state of a hub of friction pair // Advances in Mathematical Physics. 2018. Vol. 2018. Article ID 8242614. https://doi.org/10.1155/2018/8242614.

[9] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Inverse wear contact problem of the friction unit // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2018. Vol. 232, Issue 22. P. 4216–4226. https://doi.org/10.1177/0954406217749267.

[10] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. The optimal design of a friction unit with uniform contact pressure // Journal of Friction and Wear. 2019. Vol. 40, no. 6. P. 562–568. https://doi.org/10.3103/S1068366619060187.

[11] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Inverse problem of contact fracture mechanics for a hub of friction pair taking into account thermal stresses // Mathematics and Mechanics of Solids. 2019. Vol. 24, Issue 6. P. 1763–1781. https://doi.org/10.1177/1081286518805525.

Evren Sahib oglu Velizade, Post-graduate Student, Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan.

[12] Mirsalimov V. M., Aknundova P. E. Optimum problem on wear decrease for a hub of friction pair // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2020. Vol. 27, Issue 5. P. 353–363. https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1472827.

[13] Mirsalimov V. M., Hasanov S. G., Heidarov S. G. Wear-contact problem of pressing of brake shoe with friction lining into drum surface // XII International scientific conference "Tribology for Mechanical Engineering" dedicated to the 80th anniversary of IMASH RAS. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Research, 2018. P. 341–344. (in Russian).

[14] Goryacheva I. G., Dobychin M. N. Contact problems in tribology. Moscow: Mashinostroyeniye, 1988. 256 p. (in Russian).

[15] Goryacheva I. G. Mechanics of frictional interaction. Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian).

[16] Muskhelishvili N. I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity. Dordrecht: Springer, 1977. 732 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3034-1.