

Б. Г. Миронов<sup>1</sup>, А. В. Никитин<sup>2</sup>

## К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ НЕЛИНЕЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ

<sup>1</sup>Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Чебоксарский институт (ф) Московского Политехнического университета,  
г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** Рассматривается деформированное состояние анизотропной нелинейно-неоднородной трубы. Примем неоднородность материала как зависимость предела текучести от координат. На неоднородность материала способны влиять различные факторы, такие как: ударные воздействия, температура, радиационное облучение и другие. Вдоль эллиптических кривых предел текучести считается неизменным. Результаты, учитывающие влияние анизотропии на напряженно-деформированное состояние различных конструкций и тел являются востребованными в современном мире.

**Ключевые слова:** неоднородность, труба, анизотропия, деформированное состояние.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.34.54.010

УДК: 539.374

Пусть имеется труба, внутри которой действует давление  $p$  (рис. 1), а  $r_a$  — внутренний радиус трубы,  $r_b$  — внешний радиус трубы.

Допустим, что решение задачи будет зависеть от параметра  $\delta$ . Пусть

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^I \delta + \sigma_{ij}^{II} \delta^2 + \dots, \quad u = u^0 + u^I \delta + u^{II} \delta^2 + \dots, \quad v = v^0 + v^I \delta + v^{II} \delta^2 + \dots,$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты напряжений;  $u, v$  — компоненты перемещений вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. Обозначим

$$\frac{r_b}{r_a} = \beta, \quad \frac{r}{r_a} = \rho, \quad \frac{r_s^0}{r_a} = \alpha,$$

где  $r_s^0$  — граница раздела пластической и упругой области в нулевом приближении.

---

© Миронов Б. Г., Никитин А. В., 2020

*Миронов Борис Гурьевич*

**e-mail:** mbg.chspru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

*Никитин Андрей Витальевич*

**e-mail:** ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чебоксарский институт (ф) Московского Политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.07.2020

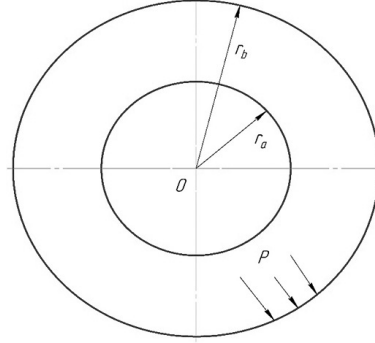


Рис. 1. Толстостенная труба

Предполагается, что в пластической области имеет место условие пластичности следующего вида [1]:

$$\left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2}\right)^2 + \left(\tau_{\rho\theta}^p\right)^2 - 2R\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2}\cos(2\theta + \eta) - 2\tau_{\rho\theta}^p\sin(2\theta + \eta)R + R^2 - 1 - 2\delta\left(\frac{(\rho\cos\theta + A)^2}{a^2} + \frac{(\rho\sin\theta + B)^2}{b^2}\right) = 0. \quad (1)$$

Допустим, что в упругой области материал обладает свойством несжимаемости, коэффициент Пуассона  $\mu = 1/2$ .

Согласно [2] компоненты перемещений в нулевом приближении представлены в виде:

$$u^{(0)e} = \frac{1}{2(\beta^2 - 1)E} \left( p - 2\ln\frac{1}{\alpha} + 3\left(p - 2\ln\frac{1}{\alpha}\right)\beta^2 \right), \quad v^{(0)e} = 0. \quad (2)$$

Найдем компоненты перемещений в приближении №1. При  $r = 1$  на границе раздела пластической и упругой зон, в соответствии с [2] имеет место

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)\rho} &= a_0'' + a_1'' \cos\theta + b_1'' \sin\theta + a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta), \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)\rho} &= a_0''' + a_1''' \cos\theta + b_1''' \sin\theta + a_2''' \cos(2\theta) + b_2''' \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (3)$$

В соответствии с [3] возможны случаи:

1)

$$\begin{aligned} a_0'' &= -\frac{2}{a^2 b^2} (b^2 A^2 + a^2 B^2) \ln \alpha, \\ a_0''' &= a_1''' = a_1'' = a_2''' = a_2'' = b_1''' = b_1'' = b_2''' = b_2'' = 0. \end{aligned}$$

Перемещения примут вид

$$u^{(I)e} = \frac{(b^2 A^2 + a^2 B^2) \ln \alpha (\rho^2 + 3\beta^2)}{\rho(\beta^2 - 1)E a^2 b^2}, \quad v^{(I)e} = 0; \quad (4)$$

2)

$$\begin{aligned} a_1'' &= \frac{2A}{a^2} (1 - \alpha^2), \quad b_1''' = -\frac{2A}{a^2} (\alpha^2 - 1), \\ a_0''' &= a_0'' = a_1''' = a_2''' = a_2'' = b_1''' = b_1'' = b_2''' = b_2'' = 0. \end{aligned}$$

Получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} u^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left( \frac{15}{14} \hat{c}_1 \ln \frac{\rho}{\beta} + \frac{3\beta^2}{2\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \cos \theta, \\ v^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left( -\frac{15}{14} \hat{c}_1 \left[ \ln \frac{\rho}{\beta} + \frac{3}{5} \right] + \frac{3\beta^2}{2\rho^2} \hat{c}_2 + \frac{11}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \sin \theta, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\hat{c}_1 = 0, \quad \hat{c}_2 = \hat{c}_3 = \frac{(\alpha^2 - 1)\beta B}{\beta^4 - 1} \frac{1}{b^2};$$

3)

$$\begin{aligned} b_1'' &= \frac{2\beta}{b^2}(1 - \alpha^2), \quad a_1''' = \frac{2\beta}{b^2}(\alpha^2 - 1), \\ a_0''' &= a_0'' = a_1'' = a_2'' = b_1''' = b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} u^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left( \frac{15}{14} \hat{c}_1 \ln \frac{\rho}{\beta} + \frac{3\beta^2}{2\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \sin \theta, \\ v^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left( \frac{15}{14} \hat{c}_1 \left[ \ln \frac{\rho}{\beta} + \frac{3}{5} \right] + \frac{3\beta^2}{2\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{11}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \cos \theta, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\hat{c}_1 = 0, \quad \hat{c}_2 = \hat{c}_3 = \frac{(\alpha^2 - 1)\beta B}{\beta^4 - 1} \frac{1}{b^2};$$

4)

$$\begin{aligned} a_2'' &= \left( \frac{R'\alpha^2}{a^2} - R'\alpha \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \cos \eta - \sqrt{3} \alpha R' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \cos \eta - \frac{a^3(b^2 - a^2)}{3a^2b^2}, \\ b_2'' &= \left( \frac{R'\alpha^2}{a^2} - R'\alpha \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) (-\sin \eta) - \sqrt{3} \alpha R' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \sin \eta, \\ a_0''' &= a_0'' = a_1''' = b_1''' = a_1'' = b_1'' = a_2''' = b_2''' = 0. \end{aligned}$$

В данном случае имеем

$$\begin{aligned} u^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left( -3\check{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\check{c}_2 - 2\check{c}_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^2 + 4\check{c}_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta)), \\ v^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left( 3\check{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\check{c}_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\check{c}_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \check{c}_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \sin(2\theta) - b_2'' \cos(2\theta)), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \check{c}_1 &= \frac{-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}}{2N}, \quad \check{c}_2 = \left( \frac{-3 + 2\beta^2 + \beta^4}{6N} \right) \beta^{-4}, \\ \check{c}_3 &= \left( \frac{-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}}{6N} \right) \beta^2, \quad \check{c}_4 = \left( \frac{-1 + 2\beta^2 - \beta^4}{2N} \right) \beta^{-2}; \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} a_2''' &= R'\alpha \sin \eta \left[ \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right], \\ b_2''' &= R'\alpha \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \cos \eta + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha^3(a^2 - b^2)}{6a^2b^2} 3 \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) + \frac{b^2 - a^2}{2a^2b^2},$$

$$a_0''' = a_0'' = a_1''' = b_1''' = a_1'' = b_1'' = a_2''' = b_2'' = 0.$$

Тогда получим

$$u^{(I)e} = \frac{\beta}{E} \left( -3\bar{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\bar{c}_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\bar{c}_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\bar{c}_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (-a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta)),$$

$$v^{(I)e} = \frac{\beta}{E} \left( 3\bar{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\bar{c}_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\bar{c}_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \bar{c}_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta)),$$
(8)

где

$$\bar{c}_1 = \frac{4 - 4\beta^2}{4N}, \quad \bar{c}_2 = \left( \frac{4\beta^2 - 4\beta^4}{12N} \right) \beta^{-4},$$

$$\bar{c}_3 = \left( \frac{3 - 4\beta^{-2} - 4\beta^{-4}}{12N} \right) \beta^2, \quad \bar{c}_4 = \left( \frac{-1 + \beta^4}{2N} \right) \beta^{-2}.$$

Сумма перемещений (4), (5), (6), (7), (8) даст результирующее перемещение в упругой зоне:

$$u^{(I)e} = - \frac{(\alpha^2 - 1)(\rho^4 - 3\beta^4)(Ab^2 \cos \theta + Ba^2 \sin \theta)}{2\rho^2 a^2 \beta^4 - Eb^2} +$$

$$+ \frac{\beta}{E} \left( -3\bar{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\bar{c}_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\bar{c}_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\bar{c}_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta)) +$$

$$+ \frac{\beta}{E} \left( -3\bar{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\bar{c}_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\bar{c}_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\bar{c}_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (-a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta)) +$$

$$+ \frac{(b^2 A^2 + a^2 B^2)(b^3 + 3\beta^2) \ln \alpha}{\rho(\beta^2 - 1) E a^2 b^2},$$

$$v^{(I)e} = \frac{(\alpha^2 - 1)(11\rho^4 + 3\beta^4)(Ab^2 \sin \theta - Ba^2 \cos \theta)}{2\rho^2 a^2 (\beta^4 - 1) E b^2} +$$

$$+ \frac{\beta}{E} \left( 3\bar{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\bar{c}_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\bar{c}_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \bar{c}_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \cos(2\theta) - b_2'' \cos(2\theta)) +$$

$$+ \frac{\beta}{E} \left( 3\bar{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\bar{c}_2 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\bar{c}_3 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \bar{c}_4 \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2''' \cos(2\theta) + b_2''' \sin(2\theta)). \quad (9)$$

Ассоциированный закон течения в пластической зоне:

$$\varepsilon_p^p = \frac{de_p^p}{dt} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\rho} = \lambda \left( \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} - R' \cos(2\theta + \eta) \right),$$

$$\varepsilon_\theta^p = \frac{de_\theta^p}{dt} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\theta} = \lambda \left( -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} + R' \cos(2\theta + \eta) \right),$$
(10)

$$\varepsilon_{p\theta}^p = \frac{de_{p\theta}^p}{dt} = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{p\theta}} = \lambda (\tau_{p\theta} - R' \cos(2\theta + \eta)),$$

где  $\varepsilon_{ij}^p$  — компоненты скоростей деформации;  $e_{ij}^p$  — компоненты деформации. В соответствии (10) имеем [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_p^p + \varepsilon_\theta^p &= 0, \\ (\varepsilon_p^p - \varepsilon_\theta^p)\tau_{\rho\theta}^p - \delta R' \cos(2\theta + \eta) &= \varepsilon_{\rho\theta}^p ((\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) - 2\delta R' \cos(2\theta + \eta)). \end{aligned} \quad (11)$$

Составляющие напряжений в каждой точке пластической зоны являются фиксированными. Вследствие этого, когда даны малые деформации, соотношения (11) могут быть проинтегрированы по времени. После этого (11) примет вид

$$\begin{aligned} e_\rho^p + e_\theta^p &= 0, \\ (e_p^p - e_\theta^p) \left( \tau_{\rho\theta}^p - \delta R' \cos(2\theta + \eta) \right) &= \varepsilon_{\rho\theta}^p (\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) - 2\delta R' \cos(2\theta + \eta). \end{aligned} \quad (12)$$

Соотношения Коши имеют вид

$$e_p^p = \frac{\partial u^p}{\partial \rho}, \quad e_\theta^p = \frac{u^p}{\rho} + \frac{\partial v^p}{\partial \theta}, \quad e_{\rho\theta}^p = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^p}{\partial \rho} - \frac{v^p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^p}{\partial \theta} \right). \quad (13)$$

В нулевом приближении (12) примет вид

$$\begin{aligned} e_\rho^{(0)p} + e_\theta^{(0)p} &= 0, \\ (e_\rho^{(0)p} - e_\theta^{(0)p}) \tau_{\rho\theta}^{(0)p} &= e_{\rho\theta}^{(0)p} (\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}). \end{aligned} \quad (14)$$

В исходном нулевом состоянии осесимметрическое состояние трубы задано соотношениями:

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)p} = v^{(0)p} = e_{\rho\theta}^{(0)p} = 0, \quad (15)$$

где  $\tau_{\rho\theta}^{(0)p}$  — часть касательного напряжения в нулевом приближении;  $v^{(0)p}$  — часть перемещения вдоль  $\theta$  в нулевом приближении;  $e_{\rho\theta}^{(0)p}$  — компонента деформации в нулевом приближении [5].

Из (13) в приближении нулевом имеем:

$$e_p^{(0)p} = \frac{\partial u^{(0)p}}{\partial \rho}, \quad e_\theta^{(0)p} = \frac{u^{(0)p}}{\rho}. \quad (16)$$

Из (13),(16):

$$e_\rho^{(0)p} + e_\theta^{(0)p} = \frac{du^{(0)p}}{d\rho} + \frac{u^{(0)p}}{\rho} = 0, \quad (17)$$

где  $u^{(0)p}$  — составляющая перемещений вдоль радиуса  $\rho$ . В соответствии с (2) решение уравнения (17) имеет вид

$$u^{(0)p} = \frac{c}{p}, \quad c = \frac{1}{2(\beta^2 - 1)E} \left[ \left( p - 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right) + 3 \left( p - 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right) \beta^2 \right]. \quad (18)$$

Из (16), (18) имеем:

$$e_p^{(0)p} = \frac{du^{(0)p}}{d\rho} = -\frac{c}{\rho^2}, \quad e_\theta^{(0)p} = \frac{u^{(0)p}}{\rho} = \frac{c}{\rho^2}. \quad (19)$$

Из (12) в первом приближении получим:

$$e_\rho^{(I)p} + e_\theta^{(I)p} = 0, \quad (20)$$

$$(\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p})e_{\rho\theta}^{(I)p} = (e_\rho^{(0)p} - e_\theta^{(0)p})(\tau_{\rho\theta}^{(I)p} - R' \sin(2\theta + \eta)). \quad (21)$$

Из (15), (20) справедливо:

$$e_{\rho}^{(I)p} + e_{\theta}^{(I)p} = \frac{\partial u^{(I)p}}{\partial \rho} + \frac{u^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v^{(I)p}}{\partial \theta} = 0. \quad (22)$$

Перепишем (22) в виде

$$e_{\rho\theta}^{(I)p} = \frac{(e_{\rho}^{(0)p} - e_{\theta}^{(0)p})(\tau_{\rho\theta}^{(I)p} - R' \sin(2\theta + \eta))}{\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p}}, \quad (23)$$

где  $u^{(I)p}$ ,  $v^{(I)p}$  — части перемещений в первом приближении.

Из (15), (23), а также [1] имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{(I)p}}{\partial \rho} - \frac{v^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{(I)p}}{\partial \theta} &= \frac{4c}{a^2 b^2 \rho^3} (Ba^2 \cos \theta - Ab^2 \sin \theta)(\alpha^2 - \rho^2) + \\ &+ \frac{2cR'}{\rho^2} \left\{ \frac{\alpha}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) \right) - 1 \right\} \sin(2\theta + \eta) + \\ &+ \frac{2c\alpha^3(a^2 - b^2)}{6\rho^3 a^2 b^2} \left[ 3 \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) \right] \sin(2\theta) + \\ &+ \frac{c}{a^2 b^2} (b^2 - a^2) \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнение несжимаемости (20) определим, предполагая

$$u^{(I)p} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v^{(I)p} = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (25)$$

Из (24), (25) получим

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} &= \frac{4c}{a^2 b^2 \rho} (Ba^2 \cos \theta - Ab^2 \sin \theta)(\alpha^2 - \rho^2) + \\ &+ 2cR' \left\{ \frac{\alpha}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) \right) - 1 \right\} \sin(2\theta + \eta) + \\ &+ \frac{c\alpha^3(a^2 - b^2)}{3\rho a^2 b^2} \left[ 3 \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) \right] \sin(2\theta) + \\ &+ \frac{\rho^2 c}{a^2 b^2} (b^2 - a^2) \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (26)$$

Сумма решения общего решения уравнения и частного решения неоднородного уравнения даст формулу (26). Частное решение неоднородного уравнения (26):

$$\begin{aligned} \psi_{\text{частн}} &= \frac{c\alpha^2}{\rho} \left( \frac{B}{b^2} \cos \theta - \frac{A}{a^2} \sin \theta \right) + 2c\rho \ln^2 \rho \left( \frac{A}{a^2} \sin \theta - \frac{B}{b^2} \cos \theta \right) + \\ &+ (d_2 \ln \rho + d_1) \rho (\sin \theta - \cos \theta) + \frac{c}{4a^2 b^2} (b^2 - a^2) \rho^2 \sin(2\theta) + \\ &+ \left( \frac{1}{\rho} [S \sin \omega + T \cos \omega] + Q \right) \sin(2\theta + \eta) + \\ &+ \frac{1}{\rho} [S_1 \sin \omega + T_1 \cos \omega] \frac{a^2 - b^2 \alpha^3 \sin(2\theta)}{3a^2 b^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\omega = \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad D = 2cR', \quad S = -\frac{\sqrt{3}\alpha D}{8}, \quad Q = -4, \quad c, d_2, d_1 = \text{const},$$

$$T = -\frac{\alpha D}{8}, \quad D_1 = -\frac{c}{8}, \quad S_1 = \sqrt{3}D_1, \quad T_1 = -3D_1.$$

Из (25), (27) имеем

$$u_{\text{частн}}^{(I)p} = \frac{1}{6\rho^2 b^2 a^2} \left( [-12 \cos(2\theta) + \eta a^2 b^2 T - 4T_1 \alpha^3 (a^2 - b^2) \cos(2\theta)] \cos \omega + \right.$$

$$+ [-12 \cos(2\theta) + \eta a^2 b^2 S - 4S_1 \alpha^3 (a^2 - b^2) \cos(2\theta)] \sin \omega -$$

$$- 12 \cos(2\theta) + \eta a^2 b^2 Q \rho + 3c\rho^3 (a^2 - b^2) \cos(2\theta) -$$

$$- 12b^2 \left( -\frac{c\alpha^2 A}{2} + c\rho^2 A \ln^2 \rho + \frac{1}{2}\rho^2 a^2 d_2 \ln \rho + \frac{1}{2}\rho^2 a^2 d_1 \right) \cos \theta -$$

$$\left. - 12a^2 \left( -\frac{c\alpha^2 A}{2} + c\rho^2 B \ln^2 \rho + \frac{1}{2}\rho^2 b^2 d_2 \ln \rho + \frac{1}{2}\rho^2 b^2 d_1 \right) \sin \theta \right),$$

$$v_{\text{частн}}^{(I)p} = \frac{1}{6\rho^2 b^2 a^2} \left( [6a^2 b^2 (S\sqrt{3} - T) \sin(2\theta + \eta) - 2\alpha^3 (a^2 - b^2) (\sqrt{3}S_1 - T_1) \sin(2\theta)] \sin \omega - \right.$$

$$- 3c\rho^3 (a^2 - b^2) \sin(2\theta) -$$

$$- 12a^2 \left( c\rho^2 B \ln^2 \rho + 2 \left( cB + \frac{1}{4}d_2 b^2 \right) \rho^2 \ln \rho + \frac{1}{2}\rho^2 b^2 (d_1 + d_2) - \frac{1}{2}c\alpha^2 B \right) \cos \theta +$$

$$\left. + 12b^2 \left( c\rho^2 A \ln^2 \rho + 2 \left( cA + \frac{1}{4}d_2 a^2 \right) \rho^2 \ln \rho + \frac{1}{2}\rho^2 a^2 (d_1 + d_2) - \frac{1}{2}c\alpha^2 A \right) \sin \theta \right). \quad (28)$$

Согласно (28) компоненты перемещений в пластической области, соответствующие решению однородного уравнения (32), имеют вид

$$u_{\text{одн}}^{(I)p} = \frac{c_{00}}{\rho} - \check{c}_{11} + \check{c}_{12} \ln \rho \cos \theta - \bar{c}_{11} + \bar{c}_{11} \ln \rho \sin \theta -$$

$$- 2 \left[ c_{11} \cos \sqrt{3} \ln \rho + c_{12} \sin \sqrt{3} \ln \rho \right] \sin(2\theta) - \left[ c_{21} \cos \sqrt{3} \ln \rho + c_{22} \sin \sqrt{3} \ln \rho \right] \cos(2\theta),$$

$$v_{\text{одн}}^{(I)p} = \check{c}_{11} + \check{c}_{12} \ln \rho \sin \theta + \bar{c}_{11} + \bar{c}_{11} \ln \rho \cos \theta +$$

$$+ \left[ c_{11} \sin \sqrt{3} \ln \rho - \sqrt{3} \sin \sqrt{3} \ln \rho + c_{12} \sin \sqrt{3} \ln \rho - \sqrt{3} \cos \sqrt{3} \ln \rho \right] \sin(2\theta) +$$

$$+ \left[ c_{21} \cos \sqrt{3} \ln \rho - \sqrt{3} \sin \sqrt{3} \ln \rho + c_{12} \sin \sqrt{3} \ln \rho - \sqrt{3} \cos \sqrt{3} \ln \rho \right] \cos(2\theta). \quad (29)$$

На упругопластической границе имеют место условия сопряжения [6]

$$u^{(I)p} = u^{(I)e}, \quad v^{(I)p} = v^{(I)e} \quad \text{при } \rho = 1. \quad (30)$$

Из (9), (28)–(30) имеем

$$\begin{aligned}\check{c}_{11} &= \frac{0,5(3\beta^4 - 3\alpha^2\beta^4 - 2c\alpha^2E + 2c\alpha^2E\beta^4 - 1 + \alpha^2A + 0,5 \cdot 2Ea^2d_1 - 2Ea^2d_1\beta^4)}{a^2(\beta^4 - 1)E}, \\ \check{c}_{12} &= \frac{-3(3\beta^4 - 3\alpha^2\beta^4 - 2c\alpha^2E + 2c\alpha^2E\beta^4 + 5 - 5\alpha^2A - Ea^2d_2 - Ea^2d_1\beta^4)}{a^2(\beta^4 - 1)E}, \\ \bar{\check{c}}_{11} &= \frac{0,5(3\beta^4 - 3\alpha^2\beta^4 - 2c\alpha^2E + 2c\alpha^2E\beta^4 - 1 + \alpha^2A + 0,5 \cdot 2Ea^2d_1 - 2Ea^2d_1\beta^4)}{b^2(\beta^4 - 1)E}, \\ \bar{\check{c}}_{12} &= \frac{-(6\alpha^2 - 6)B - (2Eb^2d_1 - d_2b^2E\beta^4 - 2Eb^2d_1\beta^4 + d_2b^2E)}{b^2(\beta^4 - 1)E};\end{aligned}\tag{31}$$

$$c_{21} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5,\tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{\left(a^4b^4S \cos \mu + \frac{1}{3}\alpha^3S_1a^2 - b^2\right) \sin \sqrt{3} \ln \alpha}{a^2b^2}, \\ A_2 &= \frac{-a(T_1(a^2 - b^2) + 3b^4Ta \cos \mu) \cos \sqrt{3} \ln \alpha}{3b^2}, \\ A_3 &= \frac{b_2'''(3\beta^6\bar{c}_2 + 4\beta^4\bar{c}_4 - 3\beta^2\bar{c}_1 - 2\bar{c}_3)}{2\beta^2E}, \\ A_4 &= \frac{a_2''(-3\beta^6c_2 - 4\beta^4c_4 - 3\beta^2c_1 - 2c_3)}{2\beta^2E}, \\ A_5 &= \frac{-(4a^4b^4Q \cos \mu + c(b^2 - a^2))}{4a^2b^2}; \\ c_{22} &= B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7 + B_8 + B_9,\end{aligned}\tag{33}$$

где

$$\begin{aligned}B_1 &= \frac{\sqrt{3}aT_1(a^2 - b^2) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)}{9b^2}, \quad B_2 = \frac{\sqrt{3}\alpha^3S_1(b^2 - a^2) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)}{9a^2b^2}, \\ B_3 &= \frac{\sqrt{3}T \left( [a^2b^2 \cos \eta - \sin \eta] \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - [\sqrt{3} \sin \eta] \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right)}{3}, \\ B_4 &= \frac{\sqrt{3}S \left( - [a^2b^2 \cos \eta + \sin \eta] \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - [\sqrt{3} \sin \eta] \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right)}{3}, \\ B_5 &= \frac{-\sqrt{3}b_2''(3\beta^6\bar{c}_2 + 4\beta^4\bar{c}_4 - 3\bar{c}_1 - 2\bar{c}_3)}{6\beta^2E}, \quad B_6 = \frac{\sqrt{3}b_2''(-3\beta^6\bar{c}_2 + \beta^4\bar{c}_4 - 3\bar{c}_1\beta^2 - 7\bar{c}_3)}{3\beta^2E}, \\ B_7 &= \frac{-\sqrt{3}a_2''' \left( -7\bar{c}_3 - 3\bar{c}_1\beta^2 + \bar{c}_4\beta^4c_2\frac{1}{\beta^3} - 3\beta^3 \right)}{3\beta^2Ec_2\frac{1}{\beta^3}}, \\ B_8 &= \frac{-\sqrt{3}a_2''(-3c_2\beta^6 - 4c_4\beta^4 + 2c_3 + 3c_1\beta^2)}{6\beta^2E}, \quad B_9 = \frac{\sqrt{3}(4a^4b^4Q \cos \eta + cb^2 - a^2)}{12a^2b^2}; \\ c_{11} &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5,\end{aligned}\tag{34}$$

где

$$Z_1 = a^2b^2 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)T \sin \eta, \quad Z_2 = -a^2b^2 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)S \sin \eta,$$



$$Z_3 = \frac{0,5b_2''(-4c_4\beta^4 - 3c_2\beta^6 + 3c_1\beta^2 + 2c_3)}{\beta^2 E},$$

$$Z_4 = \frac{0,5(a_2'''(4\bar{c}_4\beta^4 + 3\bar{c}_2\beta^6 - 3\bar{c}_1\beta^2 - 2\bar{c}_3))}{\beta^2 E}, \quad Z_5 = a^2 b^2 Q \sin \eta;$$

$$c_{12} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7, \quad (35)$$

где

$$L_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}T \left( (\cos \eta + a^2 b^2 \sin \eta) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \cos \eta \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right),$$

$$L_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}S \left( (\cos \eta - a^2 b^2 \sin \eta) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \cos \eta \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right),$$

$$L_3 = \frac{0,1924T_1\alpha^3 \left( (a^2 - b^2) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3}(a^2 - b^2) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right)}{a^2 b^2},$$

$$L_4 = \frac{-0,333S_1\alpha^3 \left( (a^2 - b^2) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 0,577(a^2 - b^2) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right)}{a^2 b^2},$$

$$L_5 = \frac{\sqrt{3}\bar{c}_2 b_2''' \beta^4}{E} - \frac{0,577\bar{c}_4 b_2''' \beta^2}{E} + \frac{1,73\bar{c}_1 b_2'''}{E} + \frac{4,04\bar{c}_3'''}{E\beta^2},$$

$$L_6 = \frac{0,866c_2 b_2'' \beta^4}{E} + \frac{1,154c_4 b_2'' \beta^2}{E} - \frac{0,866c_1 b_2''}{E} - \frac{0,577c_3 b_2''}{E\beta^2},$$

$$L_7 = -\frac{0,866\bar{c}_2 b_2''' \beta^4}{E} - \frac{1,154\bar{c}_4 b_2''' \beta^2}{E} + \frac{0,866\bar{c}_1 b_2'''}{E} + \frac{0,577\bar{c}_3 b_2'''}{E\beta^2},$$

$$L_8 = \frac{1,732c_2 a_2'' \beta^4}{E} - \frac{0,577c_4 a_2'' \beta^2}{E} + \frac{1,732c_1 a_2''}{E} + \frac{4,04c_3 a_2''}{E\beta^2},$$

$$L_9 = -0,577a^2 b^2 Q \sin \eta + 0,2886c \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$c_{11} = \frac{(b^2 A^2 + a^2 B^2)(\rho^3 + 3\beta^2) \ln \alpha}{(\beta^2 - 1)E a^2 b^2}. \quad (36)$$

Согласно (9), (28)–(36) компоненты перемещений в первом приближении определены.

Таким образом, было рассмотрено деформированное состояние неоднородной трубы, являющейся в то же время анизотропной. В будущем данный класс задач можно расширить, принимая во внимания различные условия пластичности, неоднородности и анизотропии. Результаты расчётов имеет большое прикладное значение, в том числе и для военной отрасли.

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Никитин А. В., Тихонов С. В. Влияние нелинейной неоднородности материала на упругопластическое состояние толстостенной трубы под воздействием внутреннего давлений при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. № 4(80).
- [2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
- [3] Миронов Б. Г., Никитин А. В. Об определении предельного состояния неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2019. № 2(40). С. 24–27.
- [4] Никитин А. В. Предельное состояние неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(23). С. 60–70.
- [5] Никитин А. В. Упругопластическое состояние нелинейно-неоднородной трубы при трансляционной анизотропии // Сб. ст. по мат. XVII междунар. науч.-практ. конф. «Естественные и математические науки в современном мире». 2014. С. 31–44.
- [6] Ивлев Д. Д. Об анизотропии пластических тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2010. № 2(66). С. 64–68.

B. G. Mironov<sup>1</sup>, A. V. Nikitin<sup>2</sup>

**ON THE QUESTION OF DETERMINING THE DEFORMED STATE  
OF AN ANISOTROPIC NONLINEAR INHOMOGENEOUS PIPE**

<sup>1</sup>*Russian University of transport, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Cheboksary Institute (f) of Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The deformed state of an anisotropic nonlinear inhomogeneous pipe is considered. Let us take the material inhomogeneity as the dependence of the yield stress on coordinates. For material heterogeneity are capable of influencing factors such as: shock effects, temperature, radiation exposure and others. Along the elliptical curves, the yield stress is assumed to be constant. Results taking into account the effect of anisotropy on stress-strain state of various structures and physicality in demand in the modern world.

**Keywords:** inhomogeneity, pipe, anisotropy, deformed state.

**REFERENCES**

- [1] Nikitin A. V., Tikhonov S. V. Influence of nonlinear inhomogeneity of the material on the elastic-plastic state of a thick-walled pipe under the influence of internal pressure under translational anisotropy // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. 2013. no. 4(80). (In Russian).
- [2] Ivlev D. D., Yershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (In Russian).
- [3] Mironov B. G., Nikitin A. V. On determining the limit state of an inhomogeneous pipe under the action of internal pressure // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. 2019. no. 2(40). P. 24–27. (In Russian).
- [4] Nikitin A. V. Limit state of an inhomogeneous pipe under the action of internal pressure // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state. 2015. no. 1(23). P. 60–70. (In Russian).
- [5] Nikitin A. V. Elastic-plastic state of a nonlinear inhomogeneous pipe under translational anisotropy // Collection of articles based on the materials of the XVII int. scientific and practical conf. “Natural and Mathematical Sciences in the modern world”. 2014. P. 31–44. (In Russian).
- [6] Ivlev D. D. On the anisotropy of plastic bodies // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. 2010. no. 2(66). P. 64–68. (In Russian).

---

*Mironov Boris Gurjevich*, Dr. of Sci. Phys. & Math., Professor, Department Chair, Russian University of transport, Moscow, Russia.

*Nikitin Andrej Vitaljevich*, Candidate of Sci. Phys. & Math., Associate Professor, Cheboksary Institute (f) of Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia.