

М. Ю. Соколова, Ю. В. Астапов

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В МАТЕРИАЛЕ ГЕНКИ-МУРНАГАНА

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Рассмотрены динамические методы идентификации модели нелинейно упругого деформируемого тела. По эффективным фазовым скоростям продольных и поперечных волн, распространяющихся вдоль и поперек оси сжимаемого стержня, возможно определить пять констант упругости второго и третьего порядков, входящих в соотношения модели. В статье получены расчетные формулы и приведен пример определения зависимости фазовых скоростей для полиамида 6.

Ключевые слова: конечные деформации, тензор Генки, модель Генки-Мурнагана, однородное сжатие, акустические волны, идентификация соотношений.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.26.33.011

УДК: 539.3

Введение. Нелинейные упругие модели деформируемых твердых тел получили широкое распространение как в сфере фундаментальных исследований [1, 2], так и в области их приложений к решению задач механики эластомеров, биомеханики, механики грунтов [3]. Как известно [1], такие модели могут учитывать как геометрическую нелинейность путем использования различных мер конечных деформаций, так и «физическую» нелинейность поведения реальных материалов, когда закон связи между напряжениями и деформациями отличается от линейного (квазилинейного). Наиболее актуальными являются модели, в которых учитываются оба типа нелинейности [1, 2], часто имеющие один порядок относительно градиента перемещений.

Для изотропного материала линейная упругость описывается с помощью двух констант материала. В случае нелинейной связи между напряжениями и деформациями

© Соколова М. Ю., Астапов Ю. В., 2020

Соколова Марина Юрьевна

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com,

доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Астапов Юрий Владимирович

e-mail: ast3x3@gmail.com,

аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Исследование выполнено при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МД-1803.2019.1) и РФФИ (проект № 18-31-20053)

Поступила 25.06.2020

количество материальных констант для изотропного материала может увеличиваться. Например, известная модель Мурнагана [4] содержит пять констант упругости: две второго порядка и три третьего порядка. Возникает вопрос о достоверном экспериментальном определении этих констант нелинейной упругости. Методы определения констант можно разделить на статические (квазистатические) и динамические. К статическим экспериментам относят макромеханические эксперименты по однородному деформированию специальным образом подготовленных образцов (растяжение, сжатие, изгиб, кручение цилиндрических, призматических или плоских образцов). Преимущество таких экспериментов заключается в доступности требуемого оборудования и отработанности методики их проведения. Существенным недостатком этих экспериментов является невозможность достижения в таких опытах больших деформаций из-за потери ими устойчивости или появления неоднородности напряженно-деформированного состояния.

Макромеханические эксперименты могут проводиться при создании в образцах заведомо неоднородного напряженно-деформированного состояния, например, при кручении сплошных цилиндров [2, 5] или индентировании [6, 7]. Опыты по индентированию получили в последнее время широкое распространение благодаря относительной простоте постановки эксперимента и возможности осуществления опытов с образцами, обладающими малым представительным объемом. В таких опытах большие деформации достигаются без потери устойчивости, однако обработка этих экспериментов предполагает построение сложной математической модели процесса (часто численной) и решение обратных задач [6, 7].

К динамическим методам определения постоянных упругости относятся эксперименты, связанные с прохождением через образец из рассматриваемого материала звуковых волн. Такой подход хорошо известен и широко применяется [8-13], в том числе и для определения свойств горных пород [3].

В настоящей работе рассматривается вопрос о распространении акустических волн в нелинейно упругой среде, описываемой соотношениями модели Генки-Мурнагана, предложенными в работах [6, 7, 14]. Предлагается программа экспериментов для определения констант этой модели по скоростям распространения продольных и поперечных волн в предварительно деформированном образце. Будет проведен сравнительный анализ скоростей распространения звуковых волн в полиамиде 6 (Ertalon), полученных вычислениями в рамках моделей Генки-Мурнагана и Мурнагана, с данными экспериментов [13].

Основные соотношения модели Генки-Мурнагана. Одной из наиболее широко используемой моделью нелинейно упругого материала является модель Мурнагана [4], в которой постулировано существование упругого потенциала, в качестве которого используется удельная элементарная потенциальная энергия деформаций. В терминах тензора деформаций Коши-Грина ϵ выражение для удельной потенциальной энергии деформаций для модели Мурнагана имеет вид [15, 16]

$$W = \frac{1}{2} \lambda J_1^2(\epsilon) + G J_2(\epsilon) + \frac{1}{6} (\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3) J_1^3(\epsilon) - 2(\nu_2 + 2\nu_3) J_1(\epsilon) J_2(\epsilon) + 4\nu_3 J_3(\epsilon), \quad (1)$$

где λ , G – константы упругости Ламе, ν_1, ν_2, ν_3 – константы упругости третьего порядка, $J_1(\epsilon)$, $J_2(\epsilon)$, $J_3(\epsilon)$ – алгебраические инварианты тензора деформаций Коши-Грина.

Если обозначить $\nu_1/2 + \nu_2 = l$, $\nu_2 + 2\nu_3 = m$, $4\nu_3 = n$, то выражение (1) принимает вид

$$W = \frac{1}{2}\lambda J_1^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + GJ_2(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{3}(l + 2m)J_1^3(\boldsymbol{\varepsilon}) - 2mJ_1(\boldsymbol{\varepsilon})J_2(\boldsymbol{\varepsilon}) + nJ_3(\boldsymbol{\varepsilon}),$$

где l , m , n – константы Мурнагана.

В работах [6, 7, 14] была предложена модель нелинейно упругого материала, названная моделью Генки-Мурнагана, в которой удельная потенциальная энергия деформаций записывается через инварианты тензора логарифмических деформаций Генки $\boldsymbol{\Gamma}$ в виде, аналогичном (1)

$$W = \frac{1}{2}\lambda J_1^2(\boldsymbol{\Gamma}) + GJ_2(\boldsymbol{\Gamma}) + \frac{1}{6}(\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3)J_1^3(\boldsymbol{\Gamma}) - 2(\nu_2 + 2\nu_3)J_1(\boldsymbol{\Gamma})J_2(\boldsymbol{\Gamma}) + 4\nu_3J_3(\boldsymbol{\Gamma}), \quad (2)$$

где $J_1(\boldsymbol{\Gamma}) = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{E}$, $J_2(\boldsymbol{\Gamma}) = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma}$, $J_3(\boldsymbol{\Gamma}) = \det \boldsymbol{\Gamma}$ – алгебраические инварианты тензора деформаций Генки.

В рассматриваемых моделях рассматриваются тензоры напряжений: \mathbf{T} , второй тензор Пиолы-Кирхгоффа, и $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}} = \frac{dV}{dV_0} \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}^{-1}$, обобщенный «повернутый» тензор напряжений, связанные с тензором истинных напряжений Коши \mathbf{S} . Тензоры \mathbf{T} и $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}$ являются энергетически сопряженными с тензорами деформаций Коши-Грина $\boldsymbol{\varepsilon}$ и Генки $\boldsymbol{\Gamma}$ соответственно. Для гиперупругих материалов эти тензоры определяются по выражениям (1) и (2):

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\Gamma}}. \quad (3)$$

В работах [1, 6, 7, 14] было показано, что выражения (1) и (2) формально могут быть записаны в виде:

$$W = \frac{1}{2}\mathbf{N} \cdots \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{6}\mathbf{L} \cdots \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad W = \frac{1}{2}\mathbf{N} \cdots \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma} + \frac{1}{6}\mathbf{L} \cdots \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma}, \quad (4)$$

где тензоры четвертого ранга \mathbf{N} и шестого ранга \mathbf{L} имеют компоненты (в ортонормированном базисе \mathbf{e}_i), выражающиеся через упругие постоянные второго и третьего порядков соответственно:

$$\begin{aligned} N_{1111} &= N_{2222} = N_{3333} = \lambda + 2G, \\ N_{1122} &= N_{3311} = N_{2233} = \lambda, N_{1212} = N_{3131} = N_{2323} = 2G; \\ L_{111111} &= L_{222222} = L_{333333} = \nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3, \\ L_{112222} &= L_{111122} = L_{113333} = L_{111133} = L_{222233} = L_{223333} = \nu_1 + 2\nu_2, \\ L_{111212} &= L_{221212} = L_{332323} = L_{333131} = L_{113131} = L_{222323} = \nu_2 + 2\nu_3, \\ L_{232311} &= L_{313122} = L_{121233} = \nu_2, L_{233112} = L_{123123} = L_{122331} = \nu_3, \\ L_{112233} &= \nu_1 \text{ (остальные нули)}. \end{aligned}$$

В работе [17] было предложено тензоры \mathbf{N} и \mathbf{L} представлять разложениями по базисным тензорам $\mathbf{I}^{\alpha\beta}$ и $\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma}$, где $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, 5$, построенным по тензорам канонического базиса А.А. Ильюшина:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2), \\
\mathbf{I}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{I}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \\
\mathbf{I}^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3); \\
\mathbf{I}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha), \\
\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{6}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha).
\end{aligned} \tag{5}$$

Такие представления для изотропного материала имеют вид:

$$\mathbf{N} = 3K\mathbf{I}^{00} + 2G(\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}), \tag{6}$$

где $K = \lambda + 2G/3$ и G – модуль объемной упругости и модуль сдвига соответственно;

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= C_1\mathbf{I}^{000} + C_2(\mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022} + \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}) + \\
&+ C_3\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{I}^{111} - \frac{6}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{122} + \mathbf{I}^{133}) + \frac{3}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155}) + \frac{3}{\sqrt{2}}(\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244} + 2\mathbf{I}^{345})\right),
\end{aligned} \tag{7}$$

а выражение для удельной потенциальной энергии деформаций в соответствии с (4) может быть представлено через естественные инварианты тензора Генки в виде:

$$W = \frac{1}{2}K\theta^2 + Ge^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{C_1}{3\sqrt{3}}\theta^3 + \frac{C_2}{\sqrt{3}}\theta e^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}C_3e^3 \cos 3\gamma\right), \tag{8}$$

где естественные инварианты $\theta = \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}$ – относительное изменение объема, $e^2 = \tilde{\mathbf{\Gamma}} \cdot \tilde{\mathbf{\Gamma}}$ – интенсивность формоизменения, и угол вида деформированного состояния γ , который определяется из соотношения $|\tilde{\mathbf{\Gamma}}| = \frac{1}{3\sqrt{6}}e^3 \cos 3\gamma$, $\tilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma} - \frac{1}{3}\theta\mathbf{E}$ – девиатор тензора Генки.

Константы, входящие в соотношения (6)-(8), связаны с константами упругости третьего порядка ν_1, ν_2, ν_3 и константами Мурнагана l, m, n соотношениями:

$$\begin{aligned}
C_1 &= 3\sqrt{3}\nu_1 + 6\sqrt{3}\nu_2 + 8\nu_3/\sqrt{3} = 6\sqrt{3}l + 2n/\sqrt{3}, \\
C_2 &= 6\sqrt{3}\nu_2 + 8\sqrt{3}\nu_3 = 6\sqrt{3}m - \sqrt{3}n, \quad C_3 = 4\nu_3 = n.
\end{aligned} \tag{9}$$

Связь между тензорами напряжений и деформаций получим, используя соотношения (3) и (4):

$$\mathbf{\Sigma}_R = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{\Gamma}} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{\Gamma} + \frac{1}{2}\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{\Gamma}. \tag{10}$$

Соотношение (10) с учетом разложений (6) и (7) может быть представлено в виде

$$\mathbf{\Sigma}_R = \sigma_0\mathbf{E} + \tau_e\tilde{\mathbf{\Gamma}} + \tau_q\tilde{\mathbf{Q}}, \tag{11}$$

где σ_0, τ_e, τ_q – материальные функции: $\sigma_0 = K\theta + \frac{C_1}{6\sqrt{3}}\theta^2 + \frac{C_2}{6\sqrt{3}}e^2$, $\tau_e = 2G + \frac{C_2}{3\sqrt{3}}\theta$, $\tau_q = C_3$. Тензор $\tilde{\mathbf{Q}}$ определяется как девиатор тензора $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^2$.

Идентификация модели (11) состоит в определении входящих в эти соотношения констант материала K, G и C_1, C_2, C_3 . В отличие от работ [6, 7], предлагается для этого использовать динамический метод, предварительно установив связь между скоростями распространения упругих волн и упругими константами.

Уравнение распространения звуковых волн в нелинейно упругом теле. Общие принципы решения задачи о распространении волн в нелинейно упругих телах заложены в работах [1, 18-20]. Эта задача решается в рамках теории наложения

малых деформаций на первоначальные большие деформации [18, 19]. В работе [20] распространение волн рассматривается в рамках теории многократного наложения больших деформаций. В работе [3] отмечается, что опыт применения динамического метода к определению упругих постоянных грунтов показывает, что наиболее достоверные результаты решения задачи о распространении упругих волн получаются «в случаях использования теории больших начальных деформаций и учета изменения расстояния в формах упругих колебаний». В связи с этим при выводе уравнения распространения волн в нелинейно упругой среде будем исходить из того, что среда до возникновения в ней волнового поля подвержена конечным деформациям, которые моделируются соотношениями модели Генки-Мурнагана.

Будем считать, что в нелинейно упругом образце в начальный момент времени t_0 отсутствуют деформации и напряжения, а к моменту времени t_1 создано однородное напряженно-деформированное состояние, которому соответствует поле перемещений $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t_1)$, конечные деформации $\mathbf{\Gamma}^{(1)}(\mathbf{x}, t_1)$ и поле напряжений $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{(1)}(\mathbf{x}, t_1)$, вычисляемых по соотношениям (10). Будем рассматривать процессы деформаций, в которых главные оси тензора Генки совпадают с одними и теми же материальными волокнами, тогда тензор напряжений $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}$ связан с тензором истинных напряжений соотношением $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}} = \frac{dV}{dV_0} \mathbf{S} = \frac{\rho_0}{\rho} \mathbf{S}$, поэтому тензор истинных напряжений

$$\mathbf{S}^{(1)} = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(1)} + \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma}^{(1)} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(1)} \right). \quad (12)$$

Переход от момента времени t_0 к моменту t_1 считаем квазистатическим, так что напряжения $\mathbf{S}^{(1)}$ удовлетворяют уравнениям равновесия $\nabla \cdot \mathbf{S}^{(1)} = \rho \ddot{\mathbf{u}}^{(1)} = 0$.

В момент времени t_1 в образце возбуждается плоская звуковая волна с полем перемещений

$$\mathbf{u}^{(2)} = A \mathbf{p} e^{\frac{2\pi i}{l}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)}, \quad (13)$$

где A – амплитуда, \mathbf{p} , $|\mathbf{p}| = 1$, – вектор поляризации, l – длина волны, c – фазовая скорость волны, \mathbf{n} , $|\mathbf{n}| = 1$ – волновая нормаль.

В момент времени $t > t_1$ поле перемещений определяется выражением

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t_1) + \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, t),$$

поле деформаций

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{\Gamma}^{(1)}(\mathbf{x}, t_1) + \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{x}, t). \quad (14)$$

Считаем, что деформации, определяемые полем перемещений (12), малы, так что

$$\mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{u}^{(2)} \nabla \right). \quad (15)$$

При $t > t_1$ поле напряжений определяется в соответствии с (12) и (14)

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{\rho}{\rho_0} \left(\mathbf{N} \cdot \cdot (\mathbf{\Gamma}^{(1)} + \mathbf{\Gamma}^{(2)}) + \frac{1}{2} (\mathbf{\Gamma}^{(1)} + \mathbf{\Gamma}^{(2)}) \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot (\mathbf{\Gamma}^{(1)} + \mathbf{\Gamma}^{(2)}) \right) = \\ &= \frac{\rho}{\rho_0} \left(\mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(1)} + \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma}^{(1)} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(1)} + \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)} + \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma}^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma}^{(1)} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)} + \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma}^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(1)} \right). \end{aligned}$$

В последнем выражении первые два слагаемых совпадают с (12), четвертое и пятое слагаемые равны в силу внутренней симметрии тензора \mathbf{L} , а шестое слагаемое имеет

более высокий порядок малости по сравнению с $\nabla \mathbf{u}^{(2)}$, и им можно пренебречь. В соответствии с этим напряжения определяются выражением

$$\mathbf{S} = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{S}^{(1)} + \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{C} \left(\mathbf{\Gamma}^{(1)} \right) \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)}, \quad (16)$$

где $\mathbf{C} \left(\mathbf{\Gamma}^{(1)} \right) = \mathbf{N} + \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(1)} = \frac{\partial \Sigma_{\mathbf{R}}}{\partial \mathbf{\Gamma}}$ – обобщенный тензор жесткости, и ρ , ρ_0 – плотность материала в моменты времени t и t_0 соответственно.

Используя представление тензора \mathbf{N} в виде (6) и \mathbf{L} в виде (7), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \left(\mathbf{\Gamma}^{(1)} \right) = & 3K\mathbf{I}^{00} + 2G \left(\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55} \right) + C_1 \varepsilon_0 \mathbf{I}^{00} + \\ & + \frac{C_2}{3} \left(\mathbf{\Gamma}^0 \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(1)} + \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(1)} \mathbf{I}^0 + \varepsilon_0 \left(\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55} \right) \right) + \\ & + C_3 \left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{6}} \left(2\mathbf{I}^{11} - 2\mathbf{I}^{22} - 2\mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55} \right) + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{I}^{55} - \mathbf{I}^{44} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\sqrt{6}} \left(-2\varepsilon_2 \mathbf{I}^{12} - 2\varepsilon_3 \mathbf{I}^{13} + \varepsilon_4 \mathbf{I}^{14} + \varepsilon_5 \mathbf{I}^{15} \right) + \frac{2}{\sqrt{2}} \left(-\varepsilon_4 \mathbf{I}^{24} + \varepsilon_5 \mathbf{I}^{25} + \varepsilon_3 \mathbf{I}^{45} + \varepsilon_4 \mathbf{I}^{35} + \varepsilon_5 \mathbf{I}^{34} \right) \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где обозначено $\varepsilon_\alpha = \mathbf{I}^\alpha \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(1)}$, $\alpha = 0..5$.

Запишем уравнения движения при отсутствии массовых сил: $\nabla \cdot \mathbf{S} = \rho \left(\ddot{\mathbf{u}}^{(1)} + \ddot{\mathbf{u}}^{(2)} \right)$ и после подстановки соотношений (16) получим

$$\nabla \cdot \mathbf{C} \left(\mathbf{\Gamma}^{(1)} \right) \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}^{(2)}, \quad (18)$$

поскольку $\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\rho}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{S}^{(1)} + \frac{\rho}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{C} \left(\mathbf{\Gamma}^{(1)} \right) \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)}$ и $\nabla \cdot \mathbf{S}^{(1)} = \rho \ddot{\mathbf{u}}^{(1)} = 0$.

В силу принятого допущения (15) о малости деформаций, появляющихся вследствие прохождения звуковой волны, найдем выражение для $\mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{x}, t)$, исходя из представления для перемещений (13):

$$\mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\pi i}{l} A e^{\frac{2\pi i}{l}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)} (\mathbf{p}\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{p}). \quad (19)$$

Вычислим дивергенцию в левой части (18). Легко показать, что в силу внутренней симметрии тензора обобщенной жесткости $\nabla \cdot (\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)}) = \nabla \cdot (\mathbf{\Gamma}^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{C}) = \nabla \mathbf{\Gamma}^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{C}$, тогда уравнения движения преобразуются к виду $\nabla \mathbf{\Gamma}^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{C} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}$, причем, исходя из (19), $\nabla \mathbf{\Gamma}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi i}{l} \right)^2 A e^{\frac{2\pi i}{l}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)} \mathbf{n} (\mathbf{p}\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{p})$. Вычислим свертку $\frac{1}{2} \mathbf{n} (\mathbf{p}\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{p}) \cdot \cdot \mathbf{C} = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n})$, тогда левая часть уравнений движения (18) может быть представлена в виде $\left(\frac{2\pi i}{l} \right)^2 A e^{\frac{2\pi i}{l}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n})$. Учитывая, что $\ddot{\mathbf{u}}^{(2)} = c^2 \left(\frac{2\pi i}{l} \right)^2 A e^{\frac{2\pi i}{l}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)} \mathbf{p}$, запишем уравнение (18) в виде

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) = \rho_0 c^2 \mathbf{p}. \quad (20)$$

Обозначим $\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{A}^{(\mathbf{n})}$. Тензор $\mathbf{A}^{(\mathbf{n})}$ называют акустическим тензором. В соответствии с представлением (17) для тензора обобщенной жесткости выпишем выражения для компонент акустического тензора, определенных в главных осях тензора деформаций $\mathbf{\Gamma}^{(1)} = \Gamma_i^{(1)} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$, где $\Gamma_i^{(1)}$ – главные значения тензора Генки:

$$\begin{aligned}
A_{ii}^{(n)} &= \left(K + \frac{4}{3}G + C_1 \frac{\theta}{3\sqrt{3}} + C_2 \frac{2\Gamma_i^{(1)}}{3\sqrt{3}} + C_3 \frac{2\tilde{\Gamma}_i^{(1)}}{3} \right) n_i^2 + \\
&+ \left(G + C_2 \frac{\theta}{6\sqrt{3}} - C_3 \frac{\tilde{\Gamma}_k^{(1)}}{2} \right) n_j^2 + \left(G + C_2 \frac{\theta}{6\sqrt{3}} - C_3 \frac{\tilde{\Gamma}_j^{(1)}}{2} \right) n_k^2; \\
A_{ij}^{(n)} = A_{ji}^{(n)} &= \left(K + \frac{G}{3} + C_1 \frac{\theta}{3\sqrt{3}} + C_2 \frac{\Gamma_i + \Gamma_j - \Gamma_k}{6\sqrt{3}} + C_3 \frac{\tilde{\Gamma}_k}{6} \right) n_i n_j.
\end{aligned} \tag{21}$$

В формулах (21) все компоненты тензора $\mathbf{A}^{(n)}$ получаются путем круговой перестановки индексов $i, j, k = 1, 2, 3$. Отметим также, что тензор $\mathbf{A}^{(n)}$ зависит не только от материальных констант K, G, C_1, C_2, C_3 , предварительных деформаций $\Gamma_i^{(1)}$, но и направления распространения волны, задающегося вектором волновой нормали $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$.

Уравнение распространения волны получим из (20) в виде, совпадающем по форме с соотношением, приведенным в [1]:

$$\mathbf{A}^{(n)} \cdot \mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{p}. \tag{22}$$

Из уравнения (22) следует, что вектор поляризации звуковой волны является собственным вектором, а $\rho_0 c^2$ – собственным значением акустического тензора $\mathbf{A}^{(n)}$. Для определения фазовых скоростей распространения волн следует задать тензор предварительных деформаций $\Gamma^{(1)}$ и направление волнового вектора, вычислить компоненты акустического тензора (21), и решить задачу об определении его собственных значений. Найденные фазовые скорости будут выражены через константы модели. Выбирая различные предварительные состояния и различные направления распространения волн, можно получить достаточное количество соотношений для определения констант.

Главные волны. В [1] главными волнами названы упругие волны, волновая нормаль которых совпадает с одной из главных осей тензора напряжений (деформаций). В этом случае вычисление фазовых скоростей значительно упрощается. Рассмотрим два частных случая предварительного деформирования: чисто объемное сжатие и растяжение-сжатие в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. В первом из этих случаев в качестве главных осей тензора деформаций может быть взята любая ортонормированная тройка векторов, а во втором – векторы, в направлении которых производится растяжение и сжатие, и вектор, им перпендикулярный.

Пусть предварительным напряженно-деформированным состоянием образца является чисто объемное деформирование. В этом случае все три главных значения тензора деформаций равны $\Gamma_i^{(1)} = \Gamma$, а объемная деформация $\theta = 3\Gamma$. Если волновая нормаль совпадает с одним из базисных векторов, например $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, ненулевыми оказываются только диагональные компоненты акустического тензора (21). Задача об определении его собственных значений решается тривиально. Тогда фазовые скорости звуковых волн определяются следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned}
&\text{для продольной волны } \mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{e}_1, \quad \rho_0 c_{(1)}^2 = K + \frac{4G}{3} + (3C_1 + 2C_2) \frac{\Gamma}{3\sqrt{3}}, \\
&\text{для поперечных волн } \left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{(2)} &= \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{p}_{(3)} &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\}, \quad \rho_0 c_{(2)}^2 = \rho_0 c_{(3)}^2 = G + C_2 \frac{\Gamma}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned} \right\} \tag{23}$$

Измерения скоростей распространения волн при таком предварительном деформировании не позволят определить все константы модели, так как соотношения (23) не содержат константу C_3 .

Рассмотрим в качестве предварительного деформированного состояния двухосное растяжение-сжатие. При таком предварительном состоянии тензор деформаций в главных осях имеет представление $\Gamma^{(1)} = \Gamma(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)$, объемная деформация $\theta = 0$. Если волна распространяется вдоль первого главного направления, т.е. нормальный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, то фазовые скорости распространения

$$\left. \begin{array}{l} \text{для продольной волны } \mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{e}_1, \\ \text{для поперечных волн } \left. \begin{array}{l} \mathbf{p}_{(2)} = \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{p}_{(3)} = \mathbf{e}_3 \end{array} \right\}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rho_0 c_{(1)}^2 = K + \frac{4G}{3} + (C_2 + \sqrt{3}C_3)\frac{2\Gamma}{3\sqrt{3}}, \\ \rho_0 c_{(2)}^2 = G, \\ \rho_0 c_{(3)}^2 = G + 0,5C_3\Gamma. \end{array} \quad (24)$$

Если волновая нормаль направлена вдоль второго главного направления, т.е. $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$, то скорости распространения волн определяются

$$\left. \begin{array}{l} \text{для продольной волны } \mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{e}_2, \\ \text{для поперечных волн } \left. \begin{array}{l} \mathbf{p}_{(2)} = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{p}_{(3)} = \mathbf{e}_3 \end{array} \right\}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rho_0 c_{(1)}^2 = K + \frac{4G}{3} - (C_2 + \sqrt{3}C_3)\frac{2\Gamma}{3\sqrt{3}}, \\ \rho_0 c_{(2)}^2 = G, \\ \rho_0 c_{(3)}^2 = G - 0,5C_3\Gamma. \end{array} \quad (25)$$

Если волновая нормаль $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$, то скорости распространения волн определяются выражениями

$$\left. \begin{array}{l} \text{для продольной волны } \mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{e}_3, \\ \text{для поперечных волн } \left. \begin{array}{l} \mathbf{p}_{(2)} = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{p}_{(3)} = \mathbf{e}_2 \end{array} \right\}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rho_0 c_{(1)}^2 = K + \frac{4G}{3}, \\ \rho_0 c_{(2)}^2 = G + 0,5C_3\Gamma, \\ \rho_0 c_{(3)}^2 = G - 0,5C_3\Gamma. \end{array} \quad (26)$$

Отметим, что в последнем случае скорость распространения продольной волны не зависит от предварительных деформаций, а в случаях (24) и (25) от достигнутых деформаций не зависит скорость распространения одной из поперечных волн. По величине эти скорости равны скоростям распространения волн в линейно упругом материале без предварительных деформаций.

Измерение скоростей распространения продольных и поперечных волн при рассмотренном предварительном деформированном состоянии также не позволяет идентифицировать модель, т.к. соотношения (24) – (25) не содержат константу C_1 . Далее рассмотрим главные волны в задаче об одноосном сжатии.

Идентификация модели Генки-Мурнагана в опыте на одноосное сжатие. Рассмотрим главные волны в задаче об одноосном сжатии. В работе [13] предложена схема эксперимента на одноосное сжатие, в соответствии с которой в предварительно сжатом стержне, рабочая часть которого имеет поперечное сечение в форме квадрата, распространяются волны в направлении оси стержня и в перпендикулярном направлении. Материал стержня – полиамид 6 (Ertalon). Результатами исследования являются экспериментальные кривые зависимости скоростей распространения продольных и поперечных волн от величины предварительного сжатия. Величина максимальной деформации сжатия в экспериментах составляла 0,02. Для рассмотренного материала из результатов экспериментов определены упругие константы материала:

константы Ламе: $\lambda = 4,77$ ГПа, $G = 1,37$ ГПа, константы Мурнагана: $l = -9,99$ ГПа, $m = -8,23$ ГПа, $n = -5,77$ ГПа, плотность материала $\rho_0 = 1073,4$ кг/м³.

При одноосном сжатии тензор истинных напряжений имеет вид $\mathbf{S} = S_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, тензор деформаций $\mathbf{\Gamma} = \Gamma_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \Gamma_2(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)$. Связь между напряжениями и деформациями определяется соотношением (10). Поперечные деформации Γ_2 определяются из условия равенства нулю напряжений S_{22} и могут быть найдены из выражения

$$\Gamma_2(\lambda) = \frac{6}{2A_2 - A_1} \left(- \left(2 \left(K + \frac{G}{3} \right) + \frac{A_1 + A_2}{6} \ln \lambda \right) + \sqrt{\frac{1}{36} \left((A_1 + A_2)^2 + 3A_3(A_1 - 2A_2) \right) \ln^2 \lambda + (KA_1 + \frac{2}{3}GA_2) \ln \lambda + 4 \left(K + \frac{G}{3} \right)^2} \right), \quad (27)$$

где комбинации нелинейных упругих констант C_1, C_2, C_3 обозначены следующим образом: $A_1 = \frac{4}{3} \left(C_3 - \frac{2}{\sqrt{3}}C_2 \right)$, $A_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(C_1 + \frac{C_2}{6} \right)$, $A_3 = \frac{4}{9} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}C_1 - C_3 \right)$. Константы C_1, C_2, C_3 вычисляются через константы Мурнагана по формулам (9).

Рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль оси сжимаемого стержня, с вектором волновой нормали $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, тогда фазовые скорости распространения

$$\text{для продольной волны } \mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{e}_1, \quad \left. \begin{aligned} \rho_0 c_{11}^2 &= K + \frac{4G}{3} + \\ &+ \left(\frac{C_1}{3\sqrt{3}} + \frac{2C_2}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{9}C_3 \right) \Gamma_1 + \\ &+ \left(\frac{2C_1}{3\sqrt{3}} - \frac{4}{9}C_3 \right) \Gamma_2, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\text{для поперечных волн } \left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{(2)} &= \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{p}_{(3)} &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \rho_0 c_{12}^2 &= \rho_0 c_{13}^2 = G + \\ &+ \left(\frac{C_2}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{6}C_3 \right) \Gamma_1 + \left(\frac{C_2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{6}C_3 \right) \Gamma_2. \end{aligned} \right\}$$

Если волна распространяется перпендикулярно оси сжимаемого стержня, с вектором волновой нормали $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$, то фазовые скорости распространения

$$\text{для продольной волны } \mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{e}_2, \quad \left. \begin{aligned} \rho_0 c_{22}^2 &= K + \frac{4G}{3} + \left(\frac{C_1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{9}C_3 \right) \Gamma_1 + \\ &+ \left(\frac{2C_1}{3\sqrt{3}} + \frac{2C_2}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{9}C_3 \right) \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\text{для поперечных волн } \left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{(2)} &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{p}_{(3)} &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \rho_0 c_{21}^2 &= G + \left(\frac{C_2}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{3}C_3 \right) \Gamma_1 + \\ &+ \left(\frac{C_2}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}C_3 \right) \Gamma_2, \\ \rho_0 c_{23}^2 &= G + \left(\frac{C_2}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{6}C_3 \right) \Gamma_1 + \\ &+ \left(\frac{C_2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{6}C_3 \right) \Gamma_2. \end{aligned} \right\}$$

Однако в экспериментах измеряется так называемая эффективная скорость распространения волны $W_{ij} = c_{ij} \frac{L}{L_0}$ [11], в выражении для которой учитывается изменение размера образца в направлении распространения волны. Отметим, что в обозначении скорости первый индекс означает направление волновой нормали, а второй индекс – направление вектора поляризации.

Пять соотношений (28), (29) позволяют определить все пять констант модели по измеренным в эксперименте величинам эффективных скоростей распространения волн.

На рисунке 1 приведены графики изменения эффективной скорости продольной и поперечной волн, распространяющихся вдоль оси стержня. На рисунке 2 приведены зависимости эффективных скоростей продольной и поперечных волн, распространяющихся перпендикулярно оси сжимаемого стержня. На графиках аргументом является величина $\lambda = \frac{L}{L_0}$, характеризующая величину деформаций сжатия. На этих рисунках для сравнения приведены эффективные скорости распространения волн V_{ij} , определенные по модели Мурнагана (1), когда в качестве меры деформаций используется тензор Коши-Грина. При одинаковых значениях констант отличия между скоростями W_{ij} и V_{ij} , определенными по различным потенциалам, становятся существенными при деформациях порядка 10%.

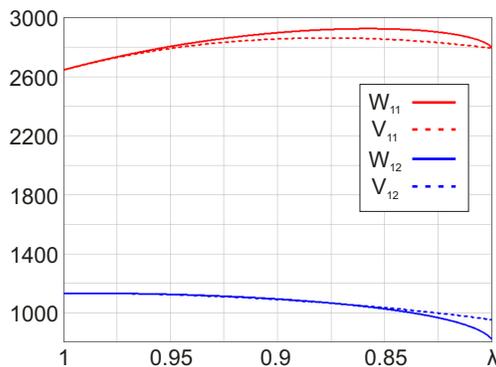


Рис. 1 Эффективные скорости распространения волн вдоль оси стержня

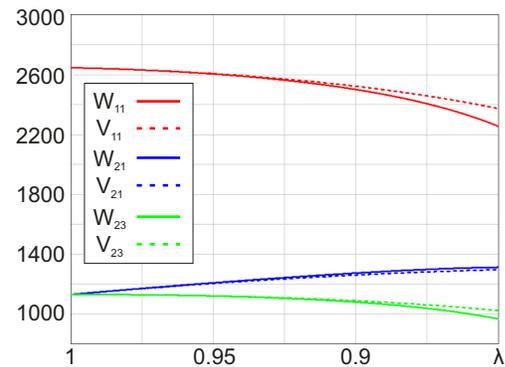


Рис. 2 Эффективные скорости распространения волн в поперечном направлении

Сопоставление результатов расчетов с опытными данными, приведенными в [13], затруднительно, поскольку в этой работе деформации не превышают 2%, а относительное изменение фазовой скорости не превышает 1% от величин, определяемых линейной теорией упругости. Однако приведенные на рисунках зависимости эффективных скоростей распространения продольных и поперечных волн качественно подтверждают экспериментальный факт, приведенный в работе [3]. В этой работе отмечается, что с ростом степени сжатия фазовая скорость продольной волны, распространяющейся в направлении сжатия, возрастает (см. рис. 1).

Выводы. В работе в инвариантной форме получено уравнение распространения акустических волн и выписано выражение для акустического тензора, соответствующего модели нелинейной упругости Генки-Мурнагана. Рассмотрены возможные программы определения констант модели по величинам скоростей распространения продольных и поперечных волн, возбуждаемых в образцах с различными предварительными деформациями. Показано, что все пять констант модели можно определить из динамических экспериментов, если в образце создать предварительное объемное деформирование и деформации растяжения-сжатия в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. Другой вариант идентификации материала состоит в определении констант модели из опыта на одноосное растяжение образца с поперечным сечением в форме квадрата. Сравнение результатов расчетов фазовых скоростей распространения волн по моделям Генки-Мурнагана и Мурнагана показало, что до деформаций 10% эти результаты практически совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
- [2] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 320 с.
- [3] Кулиев Г. Г., Ахаев Х. Б., Гасанова Г. Г. Определение модулей упругости третьего порядка для осадочных пород на основе скважинных геофизических данных // Физика Земли. 2013. № 6. С. 54–60.
- [4] Murnaghan F. D. Finite deformations of an elastic solid // American Journal of Mathematics. 1937. Vol. 59, no. 2. P. 235–260.
- [5] Астапов В. Ф., Маркин А. А., Соколова М. Ю. Определение упругих свойств материалов из опытов на сплошных цилиндрах // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 104–111.
- [6] Астапов Ю. В., Христич Д. В. Численное и экспериментальное моделирование процесса индентирования резиновых образцов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. Т. 36, № 2. С. 65–73.
- [7] Astapov Y., Khristich D. Experimental determination of the parameters of the nonlinearly elastic Hencky model // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203.
- [8] Определение упругих модулей 3-го порядка по параметрам объемных солитонов деформаций / Ф. Е. Гарбузов, А. М. Самсонов, А. А. Семенов [и др.] // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42, № 3. С. 16–22.
- [9] Минин С. И. Определение модулей упругости третьего порядка для определения напряженно-деформированного состояния металла элементов конструкций АЭС // Известия вузов. Ядерная энергетика. 2018. № 1. С. 15–22.
- [10] Коробов А. И., Прохоров В. М., Мехедов Д. М. Упругие постоянные второго и третьего порядков алюминиевого сплава В95 и композита В95/наноалмаз // Физика твердого тела. 2013. Т. 55, № 1. С. 10–13.
- [11] Секоян С. С. О вычислении констант упругости третьего порядка по результатам ультразвуковых измерений // Акустический журнал. 1970. Т. 16, № 3. С. 453–457.
- [12] Toupin R. A., Bernstein B. Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect // The Journal of the Acoustical Society of America. 1961. Vol. 33, no. 2. P. 216–225.
- [13] Zhu Q., Burtin C., Binetruy C. Acoustoelastic effect in polyamide 6: Linear and nonlinear behavior // Polymer Testing. 2014. Vol. 40. P. 178–186.
- [14] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Вариант соотношений нелинейной упругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 68–75.
- [15] Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973. 270 с.
- [16] Козлов В. В., Маркин А. А. Анализ определяющих соотношений нелинейно-упругих сжимаемых материалов // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. № 1. С. 133–143.
- [17] The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals / Y. Astapov, D. Khristich, A. Markin et al. // International Journal of Applied Mechanics. 2017. Vol. 9, no. 6.
- [18] Han L. M. Wave propagation in composite layered materials with large initial deformations // Soviet Applied Mechanics. 1976. no. 12. P. 1258–1262.
- [19] Green A. E., Rivlin R. S., Shield R. T. General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations // Proc. R. Soc. Lond. A. 1952. Vol. 211, no. 1104. p. 128–154.
- [20] Распространение упругих волн в нелинейно-упругих средах с начальными деформациями. Компьютерное моделирование с использованием программного комплекса прочностного инженерного анализа Fidesys / В. А. Левин, А. В. Вершинин, И. А. Мишин [и др.] // Технологии сейсморазведки. 2012. № 4. С. 29–32.

M. Iu. Sokolova, Iu. V. Astapov

ELASTIC WAVES IN THE HENCKY-MURNAGHAN MATERIAL

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. The dynamic methods for selecting models of a nonlinear elastic deformable body are considered. Depending on the model, five elastic constants of the second and third orders, which are available in the relations of the models, can be determined. The calculation formulas and the given example of determining the dependence of phase velocities for polyamide 6 are obtained in the article.

Keywords: finite deformations, Hencky tensor, Hencky-Murnaghan model, uniform compression, acoustic waves, identification of constitutive relations.

REFERENCES

- [1] Lurie A. I. *Nonlinear Theory of Elasticity*. Moscow: Nauka, 1980. 512 c.
- [2] Markin A. A., Sokolova M. Iu. *Thermomechanics of elastoplastic deformation*. Moscow: FizMatLit, 2013. 320 c.
- [3] Guliyev H., Aghayev Kh. B., Hasanova G. Determining the elastic moduli of the third order for sedimentary rocks based on borehole geophysical data // *Izvestiya Physics of the Solid Earth*. 2013. № 6. C. 54–60. (in Russian).
- [4] Murnaghan F. D. *Finite deformations of an elastic solid* // *American Journal of Mathematics*. 1937. Vol. 59, no. 2. P. 235–260.
- [5] Astapov V. F., Markin A. A., Sokolova M. Iu. Determination of the elastic properties of materials from experiments on solid cylinders // *Mechanics of Solids*. 2002. № 1. C. 104–111. (in Russian).
- [6] Astapov Iu. V., Khristich D. V. Numerical and experimental modeling of indentation process of resin specimens // *Vestnik ChGPU Yakovleva. Mechanika predelnogo sostoyaniya*. 2018. T. 36, № 2. C. 65–73. (in Russian).
- [7] Astapov Y., Khristich D. Experimental determination of the parameters of the nonlinearly elastic Hencky model // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1203.
- [8] Determination of 3rd order elastic moduli by the parameters of bulk strain solitons / F. E. Garbuzov, A. M. Samsonov, A. A. Semenov [и др.] // *Applied Physics Letters*. 2016. T. 42, № 3. C. 16–22. (in Russian).
- [9] Minin S. I. Determination of third order elastic moduli to measure stressed strained states in metal structural components of nuclear power plants // *Nuclear Energy and Technology*. 2018. № 1. C. 15–22. (in Russian).
- [10] Korobov A. I., Prohorov V. M., Mehedov D. M. Elastic constants of the second and third orders of the aluminum alloy B95 and composite B95/nanodiamond // *Physics of the Solid State*. 2013. T. 55, № 1. C. 10–13. (in Russian).
- [11] Sekoian S. S. On the calculation of elastic constants of the third order according to the results of ultrasonic measurements // *Acoustic journal*. 1970. T. 16, № 3. C. 453–457. (in Russian).
- [12] Toupin R. A., Bernstein B. Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1961. Vol. 33, no. 2. P. 216–225.
- [13] Zhu Q., Burtin C., Binetruy C. Acoustoelastic effect in polyamide 6: Linear and nonlinear behavior // *Polymer Testing*. 2014. Vol. 40. P. 178–186.

Sokolova Marina Iurevna

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Astapov Iurii Vladimirovich

e-mail: ast3x3@gmail.com, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

-
- [14] Markin A. A., Sokolova M. Iu. Variant of the relations of nonlinear elasticity // *Mechanics of Solids*. 2019. № 6. С. 68–75. (in Russian).
- [15] Guz A. N. *Stability of elastic bodies at finite strains*. Kiev: Naukova dumka, 1973. 270 с.
- [16] Kozlov V. V., Markin A. A. The analyze of defining relationship for isotropic nonlinear-elastic compressible materials // *Izvestiya TulGU. Natural sciences*. 2014. № 1. С. 133–143. (in Russian).
- [17] The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals / Y. Astapov, D. Khristich, A. Markin et al. // *International Journal of Applied Mechanics*. 2017. Vol. 9, no. 6.
- [18] Han L. M. Wave propagation in composite layered materials with large initial deformations // *Soviet Applied Mechanics*. 1976. no. 12. P. 1258–1262.
- [19] Green A. E., Rivlin R. S., Shield R. T. General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1952. Vol. 211, no. 1104. P. 128–154.
- [20] Elastic wave propagation in the non-linear media with initial stresses. Computer modeling using computer-aided engineering software Fidesys / V. A. Levin, A. V. Vershinin, I. A. Mishin [и др.] // *Seismic technology*. 2012. № 4. С. 29–32. (in Russian).