

А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОГО ДИСКА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ С УСКОРЕНИЕМ

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук,
г. Владивосток, Россия*

Аннотация. Рассматривается деформирование вязкоупругого диска, вращающегося с изменяющейся скоростью (разгон, торможение и вращение с постоянной скоростью). Для математического моделирования процесса деформирования используется теория течения. При предположении плоского напряженного состояния получена система дифференциальных уравнений для определения полей напряжений, обратимых и необратимых деформаций и перемещений. Численное решение этой системы уравнений найдено с помощью конечно-разностного метода. В случае решения осесимметричной задачи используется метод конечных элементов, реализованный в пакете Freefem++. Рассмотрено деформирование полого диска и диска с жестким включением, как постоянной толщины, так и переменной.

Ключевые слова: вязкоупругость, вращающийся диск, необратимое деформирование, остаточные напряжения.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.66.88.014

УДК: 539.374

Расчету ползучести вращающихся дисков посвящено множество публикаций [1–8] и др., поскольку во многих механизмах и машинах вращающиеся диски являются одними из важных элементов. В процессе эксплуатации дисков может происходить их необратимое деформирование с нежелательными изменениями их функциональных свойств. Как правило [1–6], при математическом моделировании необратимого деформирования вращающихся дисков предполагают, что скорость вращения сохраняется постоянной. Однако в большинстве случаев диски работают при изменяющихся

© Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., 2020

Бегун Александра Сергеевна

e-mail: asustinova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток, Россия, *Ковтанюк Лариса Валентиновна*

e-mail: asustinova@mail.ru, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия,

Поступила 28.06.2020

режимах эксплуатации. В работах [7, 8] исследовано деформирование упругого неоднородного диска, вращающегося с уменьшающейся скоростью. Настоящая работа посвящена расчету напряженно-деформированного состояния вязкоупругого диска, вращающегося с изменяющейся скоростью. Последовательно рассматриваются разгон, вращение с постоянной скоростью и торможение диска. В данном случае наряду с центробежными силами инерции также учитываются силы инерции, связанные с угловым ускорением.

Определяющие соотношения. При математическом моделировании исследуемого процесса деформации будем считать малыми. Компоненты тензора полных деформаций d_{ij} в данном случае определяются как сумма упругих деформаций e_{ij} и деформаций ползучести p_{ij}

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (1)$$

здесь u_i — компоненты вектора перемещений.

Предполагаем, что напряжения в среде определяются упругими деформациями согласно закону Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (2)$$

где (2) λ, μ — параметры Ламе.

Считаем, что в процессе деформирования напряженное состояние не достигает поверхности текучести, а накопление необратимых деформаций свяжем с механизмом ползучести. Для моделирования процесса ползучести воспользуемся теорией течения. Тогда связь напряжений со скоростями необратимых деформаций ε_{ij}^v примем в виде степенного закона ползучести Нортон:

$$\varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}, \quad V(\sigma_{ij}) = B \Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (3)$$

В соотношениях (3) B, n постоянные материала, $V(\sigma_{ij})$ — потенциал ползучести, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений.

Использование кусочно-линейных потенциалов в (3) приводит к необходимости производить расчеты в нескольких областях, соответствующих определенным граням и ребрам. В то же время в рассматриваемом случае вид кусочно-линейного потенциала сравним по сложности с непрерывным, поэтому в качестве Σ будем использовать

$$\Sigma = \sqrt{3/2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2}, \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4)$$

Плоское напряженное состояние. Пусть кольцевой диск, механические свойства которого описаны выше, вращается с переменной угловой скоростью $\omega(t)$. Внешний радиус диска $r = R$, внутренний — $r = r_0$. Предполагая диск достаточно тонким, считаем, что реализуется плоское напряженное состояние. Тогда отличными от нуля будут компоненты напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$ и $\sigma_{r\varphi}$.

Рассмотрим два вида граничных условий: свободный диск

$$\sigma_{rr}|_{r=r_0} = \sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0. \quad (5)$$

и диск с жестким включением

$$u_r|_{r=r_0} = 0, \quad \sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0. \quad (6)$$

Считаем, что до начала вращения диска напряжения и деформации в материале отсутствуют.

Полные деформации в рассматриваемом случае связаны с перемещениями соотношениями:

$$d_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}. \quad (7)$$

Для отличных от нуля компонент тензора скоростей упругих деформаций, используя закон Гука (2), найдем

$$\varepsilon_{rr}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{rr} - \lambda\dot{\sigma}_{\varphi\varphi}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{\varphi\varphi} - \lambda\dot{\sigma}_{rr}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^e = \frac{\dot{\sigma}_{r\varphi}}{2\mu}. \quad (8)$$

Здесь и далее $(\dot{})$ обозначена производная по времени.

С началом процесса необратимые деформации увеличиваются за счет ползучести. Тогда, воспользовавшись законом ползучести (3), найдем компоненты скоростей необратимых деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^\nu &= \frac{Bn}{2} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^\nu = \frac{Bn}{2} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^\nu = \frac{3Bn}{2} \sigma_{r\varphi} Q^{\frac{n}{2}-1}, \\ \varepsilon_{zz}^\nu &= -\frac{Bn}{2} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad Q = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

В случае вращения диска с переменной скоростью на диск будут действовать две системы инерционных сил, связанные с наличием центростремительного $r\omega^2$ и углового ускорений $r\frac{d\omega}{dt}$. Тогда уравнения равновесия для диска с переменной толщиной $h(r)$ запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} (rh(r)\sigma_{rr}) - \sigma_{\varphi\varphi}h(r) = -\rho r^2\omega^2h(r), \quad \frac{\partial}{\partial r} (rh(r)\sigma_{r\varphi}) + \sigma_{r\varphi}h(r) = \rho r^2h(r)\frac{d\omega}{dt}. \quad (10)$$

Компоненту тензора напряжений $\sigma_{r\varphi}$ найдем интегрируя второе уравнение равновесия (10) и используя граничное условие (5)

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{\rho}{r^2} \frac{d\omega}{dt} \left(\int_r^R r^3 h(r) dr \right). \quad (11)$$

Согласно соотношениям (1) и (7) для скоростей деформаций получим

$$r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^e}{\partial r} + r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^p}{\partial r} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \varepsilon_{rr}^e - \varepsilon_{rr}^p = 0. \quad (12)$$

При интегрировании первого уравнения равновесия (10) введем функцию напряжений $\varphi(r, t)$

$$\sigma_{rr} = \frac{\varphi}{rh(r)}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{h(r)} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \rho\omega^2 r^2. \quad (13)$$

Тогда для определения этой функции напряжений $\varphi(r, t)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{r^3(7\lambda + 6\mu)\rho\omega^2 + 2(\lambda + \mu) \left(r \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + r \frac{\partial^3 \varphi}{\partial^2 r \partial t} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}{2r\mu(3\lambda + 2\mu)} + BnQ^{\frac{n}{2}-1} \times$$

$$\times \frac{\left(7r^2\rho\omega^2 - \frac{2\varphi}{r} + 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) \right)}{2} + r \frac{Bn}{2} \left(2 \left(r^2\rho\omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{\varphi}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left[Q^{\frac{n}{2}-1} \right], \quad (14)$$

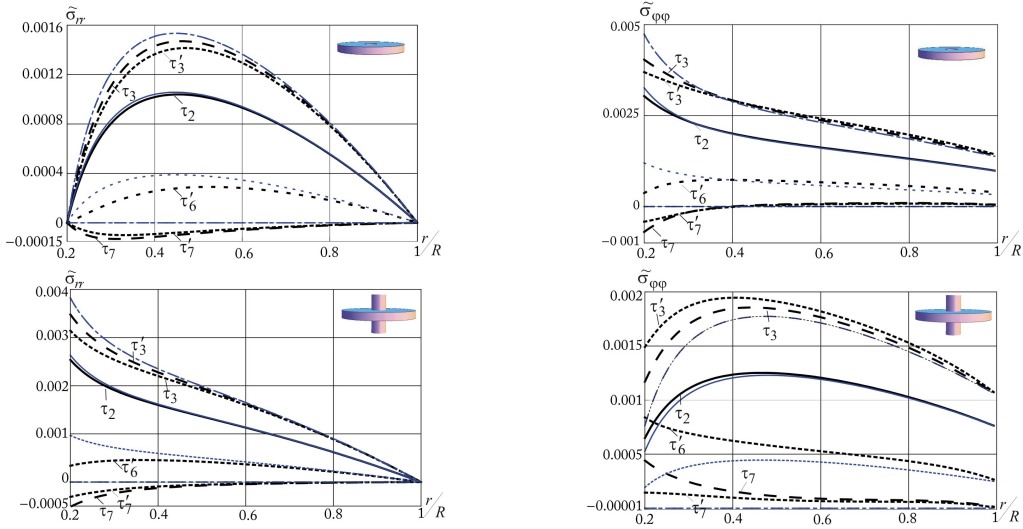


Рис. 1. Распределение напряжений $\bar{\sigma}_{rr}$ и $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$

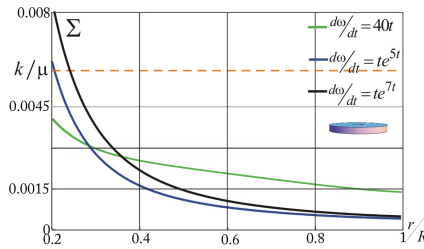


Рис. 2. Распределения Σ при различных режимах разгона диска

Для численного решения данного уравнения воспользуемся конечно-разностным методом. Граничные и начальные условия для функции напряжений $\varphi(r, t)$ для диска со свободными внешней и внутренней поверхностью:

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad \varphi(r_0, t) = 0, \quad \varphi(R, t) = 0; \quad (15)$$

для диска с жестким включением:

$$\begin{aligned} \varphi(r, 0) = 0, \quad \varphi(R, t) = 0, \\ 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \Big|_{r=r_0} + 2\rho r_0^2 \omega(t) \omega'(t) \right) - \frac{\lambda}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{r=r_0} + \\ + \mu(3\lambda + 2\mu) B n \left(2 \left(r_0^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right) - \frac{\varphi(r_0)}{r_0} \right) \left[Q(\varphi(r_0, t), r_0, t) \right]^{\frac{n}{2}-1} = 0. \end{aligned}$$

По известной функции напряжений $\varphi(r, t)$ можно найти компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$, компоненты обратимых $e_{rr}, e_{\varphi\varphi}$ и необратимых $p_{rr}, p_{\varphi\varphi}$ деформаций. Для нахождения перемещения u_r воспользуемся соотношением $u_r = r(e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi})$. Компоненту перемещений u_φ получим решая дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = 2(e_{r\varphi} + p_{r\varphi}), \quad e_{r\varphi} = \frac{\rho}{2\mu r^2} \frac{d\omega}{dt} \left(\int_r^R r^3 h(r) dr \right), \quad p_{r\varphi} = \int_0^t \varepsilon_{r\varphi}^\nu dt, \quad u_\varphi \Big|_{r=r_0} = r_0 \sin \theta(t).$$

Считаем, что угловая скорость в промежутке времени $0 \leq t \leq t_3$ возрастает, затем при $t_3 \leq t \leq t_4$ поддерживается постоянной, и далее уменьшается до нуля $t_4 \leq t \leq t_7$.

Результаты расчетов приведены в безразмерных переменных $\tilde{r} = \frac{r}{R}, \tau = t\sqrt{\alpha}, \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu}, \tilde{u}_i = \frac{u_i}{R}$ при значении постоянных

$$\begin{aligned} \lambda = 79.61 \text{ ГПа}, \quad \mu = 119.42 \text{ ГПа}, \quad B = 3.5 \cdot 10^{-25} \text{ с}^{-1} \text{ Па}^{n-1}, \quad n = 3, \\ \rho = 8000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \frac{r_0}{R} = 0.2, \quad \alpha = 400 \text{ с}^{-2}, \quad \beta = 200 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

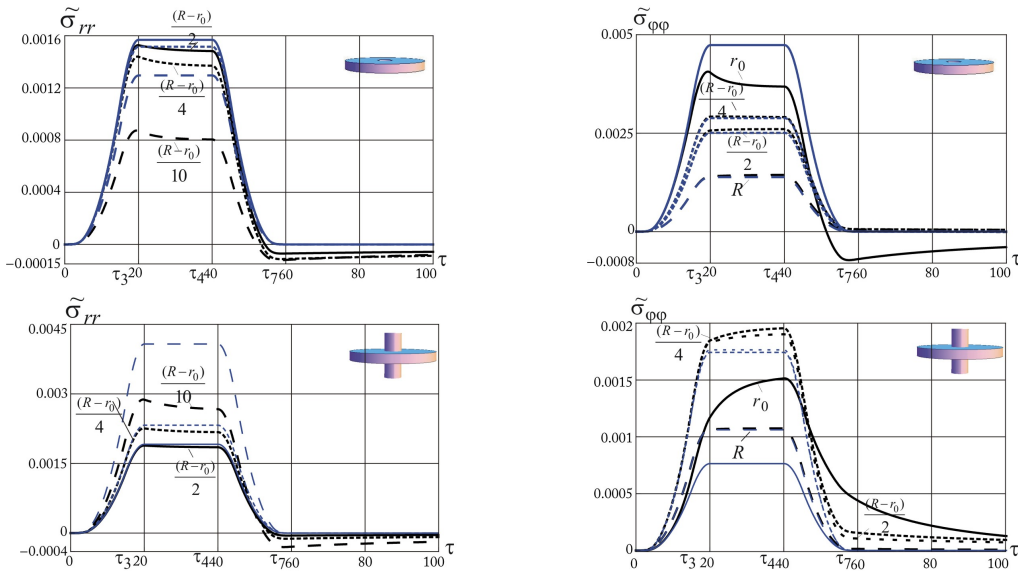


Рис. 3. Изменение напряжений с течением времени

Распределения напряжений в зависимости от радиуса для диска постоянной толщины в различные моменты времени приведено на рис. 1 (черная линия — вязкоупругое

решение, синяя линия — упругое). Здесь и далее результаты расчетов приведены для кусочно-линейного закона изменения углового ускорения. Различие в распределении Σ при различных режимах разгона диска показано на рис. 2, при более резком разгоне Σ может существенно увеличиваться даже при одинаковых итоговых скоростях вращения. Изменение напряжений с течением времени показано на рис. 3. Распределение перемещения u_r по радиусу в различные моменты времени приведено на рис. 6. Для дисков с переменными профилями и одинаковой массой распределение напряжений $\tilde{\sigma}_{rr}$ и $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}$ показано на рис. 5 ($h_1(r) = kr^m$ — красная линия, $h_2(r) = ke^{-(\frac{r}{R})^l}$ — синяя линия, $h_3(r) = h_0$ — черная линия).

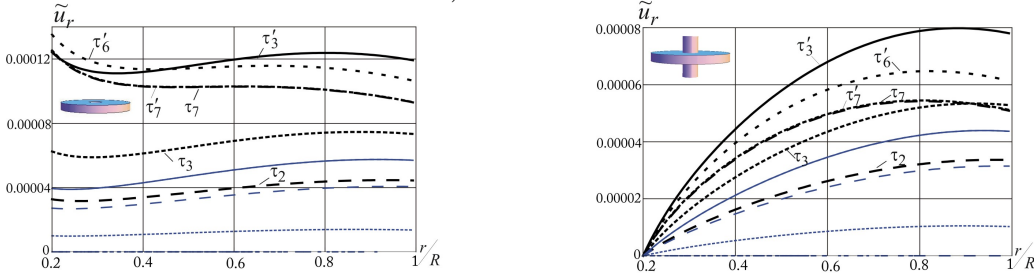


Рис. 4. Распределение перемещений в зависимости от радиуса

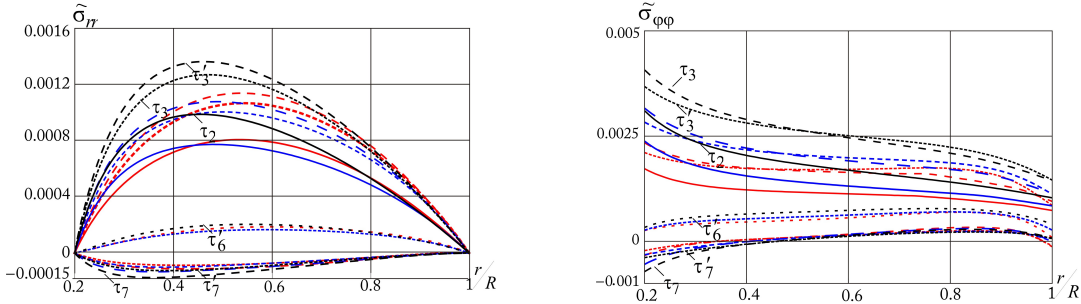


Рис. 5. Распределения напряжений для различных профилей дисков

Осесимметричная задача. Для более точного расчета утолщенных вращающихся дисков необходимо решить пространственную задачу с осевой симметрией. Для этого будем использовать метод конечных элементов. В рассматриваемом случае для компонент полных деформаций имеем:

$$\begin{aligned} d_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad d_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ d_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad d_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad d_{z\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Принцип возможных перемещений запишем в виде

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{S_T} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} dS, \quad \delta \mathbf{u} \quad (\delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ на } S_u), \quad (17)$$

где \mathbf{f} — вектор массовых сил (в нашем случае силы инерции, связанные с центростремительным и угловым ускорениями), \mathbf{T} — поверхностные силы. Шаг по времени Δt выберем достаточно малым. Предполагаем, что в момент времени t все величины

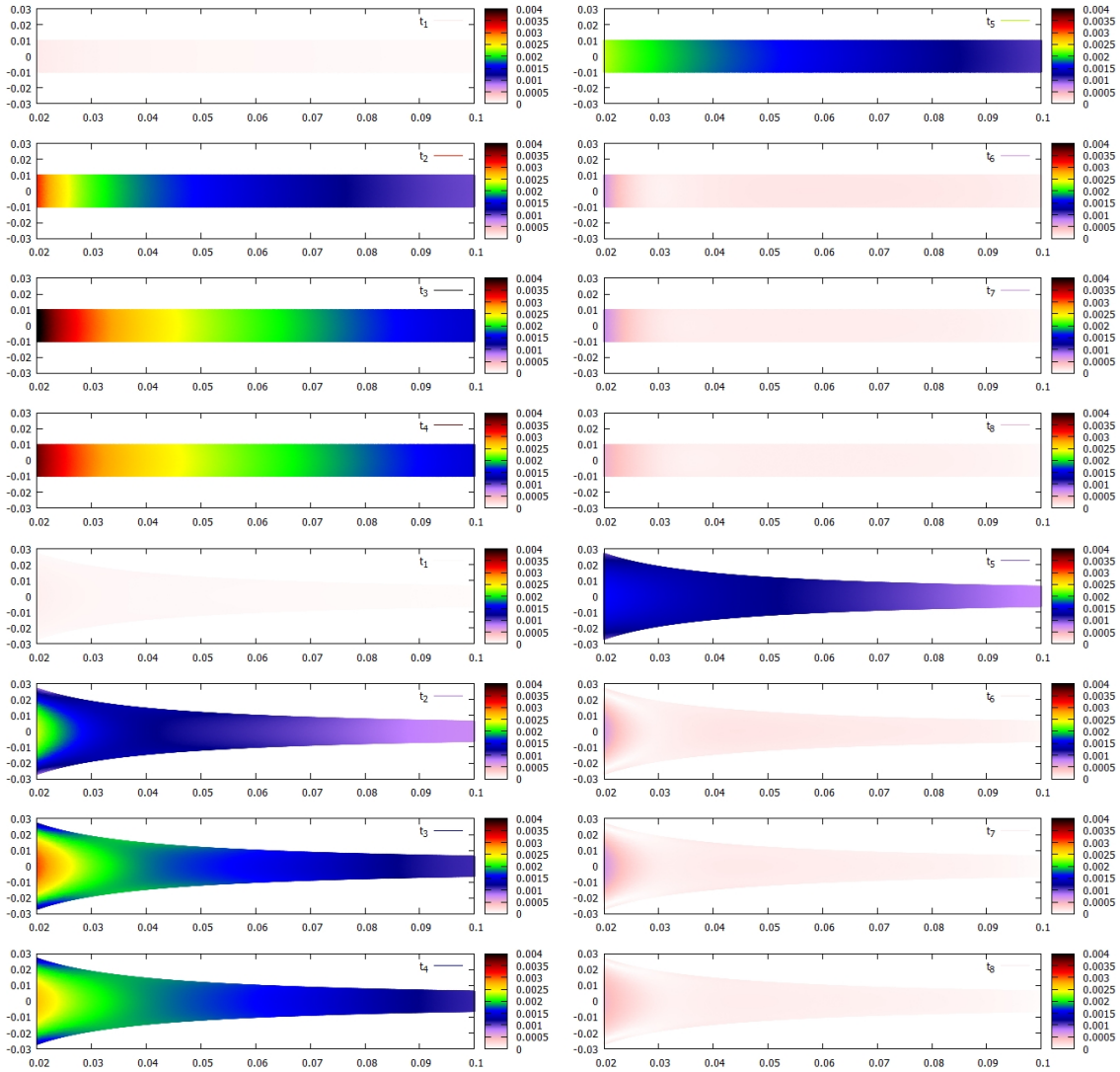


Рис. 6. Распределение интенсивностей напряжений Σ/μ зависимости от радиуса

известны, и необходимо их определить в следующий момент времени $t + \Delta t$. Приращения напряжений связаны с приращением обратимых деформаций законом Гука (2):

$$\Delta\sigma_{ij} = \lambda\Delta e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\Delta e_{ij} \quad (18)$$

Тогда линейризованное уравнение принципа возможных перемещений, записанное в приращениях:

$$\int_V \Delta\sigma : \delta\mathbf{d}dV = \int_V \rho^{t+\Delta t}\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u}dV + \int_{S_T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{T} \cdot \delta\mathbf{u}dS - \int_V {}^t\sigma : \delta\mathbf{d}dV. \quad (19)$$

Численное решение задачи найдено методом конечных элементов с применением пакета FreeFem++. На рис.5 показаны распределения интенсивностей напряжений в

зависимости от радиуса в различные моменты времени для диска постоянной толщины и диска параболического профиля (масса дисков одинаковая).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wahl A. M. A Comparison of Flow Criteria Applied to Elevated Temperature Creep of Rotating Disks with Consideration of the Transient Condition. Berlin, Heidelberg, 1962. p. 195–214.
- [2] Gupta S. K., Sonia T. P. Creep Transition in a thin Rotating Disc of variable density // Defence Sci. Journal. 2000. Vol. 50. P. 147–153.
- [3] Rattan M., Chamoli N., Singh S. B. Creep analysis of an isotropic functionally graded rotating disc // Int. J. Contemp. Math. Sci. 2010. Vol. 5, no. 9. p. 419–431.
- [4] Левин А. В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин. М.: Госэнергоиздат, 1963. 624 с.
- [5] Демьянушко И. В., Биргер И. А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
- [6] Zharfi H., Toussi H. E. Numerical creep analysis of FGM rotating disc with GDQ method // J Theor Appl Mech. Vol. 2017, no. 55(1). p. 331–41.
- [7] Dai T., Dai H. L. Thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating hollow circular disk with variable thickness and angular speed // Appl. Math. Model. 2016. Vol. 40. p. 7689–7707.
- [8] Displacement and Stress Fields in a Functionally Graded Fiber-Reinforced Rotating Disk with Nonuniform Thickness and Variable Angular Velocity / Y. Zheng, H. Bahaloo, D. Mousanezhad et al. // J. Eng. Mater. Technol. 2017. Vol. 139. p. 1–10.

A. S. Begun, L. V. Kovtanuk

DEFORMING OF A VISCOELASTIC DISK ROTATING WITH ACCELERATION

Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. The deformation of a viscoelastic disk rotating with a changing speed is considered. Within the framework of the theory of flow, relations are obtained that allow one to calculate the fields of stresses, strains, displacements, and velocities. To solve these equations in the case of a plane stress state, the finite-difference method is used, in the case of an axisymmetric problem, the finite element method implemented in the Freefem ++ package is used. Acceleration, braking and rotation at a constant speed are considered. The deformation of a hollow disk and a disk with a hard inclusion of both a constant thickness and a variable is considered.

Keywords: viscoelasticity, rotating disk, irreversible deformation, residual stresses

REFERENCES

- [1] Wahl A. M. A Comparison of Flow Criteria Applied to Elevated Temperature Creep of Rotating Disks with Consideration of the Transient Condition. Berlin, Heidelberg, 1962. P. 195–214.
- [2] Gupta S. K., Sonia T. P. Creep Transition in a thin Rotating Disc of variable density // Defense Sci. Journal. 2000. Vol. 50. P. 147–153.
- [3] Rattan M., Chamoli N., Singh S. B. Creep analysis of an isotropic functionally graded rotating disc // Int. J. Contemp. Math. Sci. 2010. Vol. 5, no. 9. p. 419–431.
- [4] Levin A. V. Steam turbine blades and discs. M.: Gosenergoizdat, 1963. 624 p.
- [5] Demyanushko I. V., Birger I. A. Calculation of the strength of rotating discs. M.: Mechanical Engineering, 1978. 247 p.
- [6] Zharfi H., Toussi H. E. Numerical creep analysis of FGM rotating disc with GDQ method // J Theor Appl Mech. Vol. 2017, no. 55 (1). p. 331–41.
- [7] Dai T., Dai H. L. Thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating hollow circular disk with variable thickness and angular speed // Appl. Math. Model. 2016. Vol. 40. P. 7689–7707.
- [8] Displacement and Stress Fields in a Functionally Graded Fiber-Reinforced Rotating Disk with Nonuniform Thickness and Variable Angular Velocity / Y. Zheng, H. Bahaloo, D. Mousanezhad et al. // J. Eng. Mater. Technol. 2017. Vol. 139. p. 1–10.

Begun, Aleksandra Sergeevna, Candidate of Phys. & Math., Researcher of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia,

Kovtanuk Larisa Valentinovna, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia,