Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 162–167

О. А. Микенина, А. Ф. Ревуженко

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ, СВОБОДНАЯ ОТ ПОСТУЛАТА О ДИФФЕОМОРФИЗМЕ: ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. Строится плоская модель линейно упругого тела, в которой постулат о диффеоморфизме (предположение о гладкости поля перемещений) значительно ослаблен. Вместо одного поля перемещений, которое фигурирует в классической модели, вводятся два гладких поля перемещений. Рассмотрены постановки краевых задач, доказана теорема единственности.

Ключевые слова: слова: теория упругости, аффинная деформация, плоская деформация, определяющие уравнения.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.60.58.016

УДК: 539.371

1. Введение. Основные труды профессора Д. Д. Ивлева и его научной школы посвящены механике деформирования пластических сред [1–3]. Благодаря им ряд разделов теории пластичности приобрел вполне законченный, классический вид.

Как известно, математическая теория пластичности так же, как и теория упругости, базируется на двух постулатах. Первый — среда предполагается сплошной и второй — поле перемещений предполагается достаточно гладким, т.е. имеет частные производные по координатам (постулат о диффеоморфизме [4]). Определенные комбинации частных производных представляют собой меры деформаций. На этой основе строятся определяющие уравнения и затем решаются краевые задачи. Постулат о диффеоморфизме, как правило, не обсуждается и считается чем-то само собой разумеющимся. Кажется удивительным, что необходимость его ослабления можно увидеть уже на самых первых шагах построения теории. Причем из соображений чисто логического характера, даже не прибегая к аргументам, связанным с экспериментальными

Микенина Ольга Александровна
`e-mail:` olgarev@yandex.ru, мл. научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.
Ревуженко Александр Филиппович
`e-mail:` revuzhenko@yandex.ru, зав. лабораторией, профессор, доктор физико-математических наук, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ (№ 20-05-00184).

Поступила 08.06.2020

данными о структурных уровнях деформирования реальных сред (горных пород, в частности).

Действительно, возьмем элементарный объем сплошной среды (рис. 1, плоская деформация, статика, упругость). Его кинематика описывается четырьмя векторами смещений центров граней элементарного объема (восемь степеней свободы). Им соответствует четыре вектора сил (также восемь степеней свободы). Последние связаны между собой тремя уравнениями равновесия: два уравнения на силы и одно уравнение на момент. Остается пять степеней свободы.

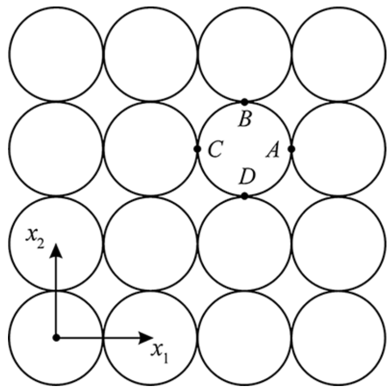

Рис. 1.

Далее, определяющие уравнения не должны зависеть от смещения и поворота элементарного объема как жесткого целого (три степени свободы). Остается пять кинематических инвариантных степеней свободы. Следовательно, определяющих уравнений должно быть в точности пять. Однако в классической теории упругости их только три (закон Гука)! Анализ [5] показывает, что два уравнения неявно содержатся в предположении о гладкости поля перемещений, т.е. в постулате о диффеоморфизме (ниже они будут выписаны явно). Таким образом, если говорить о классической модели линейно упругого тела, то можно сказать, что 60% информации о поведении материала дает закон Гука и 40% — предположение о существовании частных производных. Аналогичная ситуация имеет место и в других областях механики [6, с. 402–408]. Это означает только одно — предположение о гладкости не должно приниматься как само собой разумеющееся, но должно подвергаться анализу не менее тщательному, чем анализ собственно определяющих уравнений. Во всех случаях имеет смысл рассматривать варианты теорий, где это предположение либо снято, либо в той или иной степени ослаблено.

2. Модель линейно упругого тела. Рассмотрим данную возможность для модели линейно упругого тела. Обратимся к рис. 1. Обычно элементарный объем среды представляется как элемент, выделенный координатными поверхностями (линиями в плоском случае). Для плоских декартовых координат — это элементарные квадраты. Ничто не мешает элементарные объемы и контакты между ними представлять себе и так, как это показано на рис. 1. Предположения о существовании частных производных поля перемещений означает, что локально поле смещений является линейным и, значит, деформация элементарного объема $ABCD$ может быть только аффинной (три степени свободы, которые как раз и описываются тремя уравнениями — законом

Гука — в классической теории). Верно и обратное: если деформация элементарного объема не сводится к аффинной (т.е. локально поле перемещений является нелинейным), то это возможно только за счет ослабления постулата о диффеоморфизме.

Пять инвариантных кинематических переменных, которые упоминались выше, описывают относительное изменение длин материальных волокон AC и BD, изменение угла между ними, а также локальный изгиб элементарного объема $ABCD$. Если $u_i(A)$, $i = 1, 2$ — компоненты смещения точки A, то

$$\varkappa_i = \frac{1}{2}\left(\frac{u_i(A) + u_i(C)}{2} - \frac{u_i(B) + u_i(D)}{2}\right)$$

— это компоненты локального изгиба.

Для бесконечно малого элементарного объема относительные смещения точек A и C (т.е. на контактах вдоль оси Ox_1) малы. Поэтому v_i — поле смещений, определенное на контактах этого типа, можно считать гладким.

Аналогично можно считать гладким и поле смещений w_i, определенное на контактах типа B, D. Таким образом, одному локально неаффинному полю смещений u_i ставится в соответствие два гладких поля перемещений v_i и w_i.

В случае линейно упругого тела соответствующая система уравнений имеет вид [5]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 = 0, \\
\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \\
\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_2} = \frac{\sigma_{12}}{\mu}, \\
v_1 - w_1 = 2\eta\left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}\right), \quad v_2 - w_2 = 2\eta\left(\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}\right),
\end{gathered} \tag{1}$$

где X_1, X_2 — компоненты объемной силы; E, ν, $\mu = E/2(1+\nu)$, η — упругие постоянные; σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} — компоненты тензора напряжений.

Модель (1) переходит в классическую, если положить

$$v_1 - w_1 = 0, \quad v_2 - w_2 = 0. \tag{2}$$

Это и есть те два уравнения, которые эквивалентны предположению о гладкости поля перемещений.

3. Теорема единственности. В классической модели фигурирует одно поле перемещений. Поэтому вопрос о корректных краевых задачах решается самым естественным образом. А как быть с двумя полями перемещений?

Рассмотрим краевые условия, обеспечивающие единственность решения. Прежде всего отметим, что при $\eta = 0$ среда является изотропной, а при $\eta \neq 0$ — анизотропной. В этом смысле можно сказать, что среда является изотропной по отношению к напряжениям — деформациям и анизотропной по отношению к градиентам напряжений — локальным изгибам. Можно дать различную интерпретацию этого типа анизотропии. Например, можно представить элементарный объем как регулярную упаковку идеально упругих частиц микроуровня (см. рис. 1). Такая упаковка выделяет два ортогональных направления. Для краткости будем называть их горизонтальным и вертикальным направлениями или площадками. Возьмем элемент среды $2l \times 2l$, ограниченный указанными площадками. Подсчитаем работу внешних сил, отнесем ее к $(2l)^2$ и рассмотрим предел при $l \to 0$. В результате для удельной работы получим выражение в дивергентной форме, которое сразу преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned} W = {} & \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{22}v_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{12}w_1 + \sigma_{22}w_2) = \\ & = \left[\sigma_{11}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \sigma_{12}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right) + \sigma_{22}\frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}\right)\frac{v_1 - w_1}{2} + \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}\right)\frac{v_2 - w_2}{2}\right] + \\ & + \left[\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}\right)\frac{v_1 + w_1}{2} + \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}\right)\frac{v_2 + w_2}{2}\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть s — деформируемая область, ограниченная контуром L с внешней нормалью $\bar{n}$. Тогда

$$\iint\limits_s W\,ds = \int\limits_L \left[(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{12}v_2)n_1 + (\sigma_{12}w_1 + \sigma_{22}w_2)n_2\right] dl = -\int\limits_L \bar{E}\cdot\bar{n}\,dl,$$

где $\bar{E} = -(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{12}v_2, \sigma_{12}w_1 + \sigma_{22}w_2)$ — направление линии тока энергии [7–9].

Дальше можно действовать по обычной схеме. Пусть имеется два решения, которые отметим одним и двумя штрихами. Их разность обозначим без штрихов. Система уравнений (1) линейна. Поэтому данная система имеет место также и для решения-разности.

Далее для решения-разности вторая квадратная скобка в (3) тождественно равна нулю (объемные силы для обоих решений одинаковы). Первая скобка сводится к сумме квадратов и поэтому всегда неотрицательна. Следовательно, единственность будет иметь место, если

$$\bar{E}\cdot\bar{n} = 0, \tag{4}$$

т.е. для решения-разности поток энергии скользит вдоль границы тела.

Полученное краевое условие совпадает с традиционным только для двух крайних случаев. В первом случае участок границы горизонтален, $n_1 = 0$, $n_2 = \pm 1$ и

$$\sigma_{12}w_1 + \sigma_{22}w_2 = 0. \tag{5}$$

Следовательно, на этом участке границы задан либо вектор напряжений, либо вектор смещений, либо их определенная комбинация, приводящая к условию (5). Для вертикальных участков границы $n_1 = \pm 1$, $n_2 = 0$ ситуация аналогична.

В общем случае, когда $n_1 \cdot n_2 \neq 0$, краевое условие (4) отличается от традиционных существенно. Опыт численного решения задач показывает, что удобнее всего общую ситуацию свести к рассмотренным выше частным случаям [10, 11]. Для этого достаточно границу тела аппроксимировать ломаной, состоящей из горизонтальных и вертикальных отрезков. На каждом из таких отрезков можно ставить уже обычные краевые условия типа (5). Для теоретического обоснования такой задачи изломы границы можно сгладить дугами окружностей радиуса r и затем перейти к пределу при $r \to 0$.

4. Заключение. Таким образом, в плоском случае система определяющих уравнений теории упругости должна содержать пять независимых уравнений. В классической теории явно формулируются только три уравнения. Два уравнения в неявном виде содержатся в постулате о диффеоморфизме — предположении о гладкости поля перемещений. Предположение о гладкости означает, что локально поле смещений является линейным, а деформация элементарного объема — аффинной. Строится модель упругости, в которой постулат о диффеоморфизме ослаблен — вместо одного поля перемещений вводится два поля. Доказана теорема единственности и рассмотрены постановки краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: в 2-х т. Т. 1. Теория идеальной пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 448 с.

[2] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: в 2-х т. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. Москва: Физматлит, 2002. 448 с.

[3] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. Москва: Наука, 1971. 232 с.

[4] Трусов П. В. Некоторые вопросы нелинейной механики деформируемого тела (в порядке обсуждения) // Мат. моделирование систем и процессов. 2009. № 17. С. 85–95.

[5] Ревуженко А. Ф., Микенина О. А. Упруго-пластическая модель горной породы с линейным структурным параметром // ПМТФ. 2018. № 2. С. 167–176.

[6] Ревуженко А. Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск: НГУ, 2000. 428 с.

[7] Умов Н. А. Избранные сочинения. Москва–Ленинград: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1950. 553 с.

[8] Ляв А. Математическая теория упругости. Москва–Ленинград: Объед. науч.-техн. изд. НКТИ СССР, 1935.

[9] Клишин С. В., Ревуженко А. Ф. Линии тока энергии в деформируемом горном массиве, ослабленном эллиптическими отверстиями // ФТПРПИ. 2009. № 3. С. 3–8.

[10] Lavrikov S. V., Revuzhenko A. F. Effect of structural parameter on stress concentration in a linear elastic body // AIP Conference Proceedings. 2017. 1893, 030122.

[11] Lavrikov S. V., Revuzhenko A. F. Model of linear elastic theory with a structural parameter and stress concentration analisys in solids under deformation // AIP Conference Proceedings. 2018. 2051, 020167.

O. A. Mikenina, A. F. Revuzhenko

LINEAR ELASTICITY THEORY FREE FROM DIFFEOMORPHISM: PLANE DEFORMATION

N. A. Chinakal Institute of mining SB RAS, Novosibirsk, Russia

Abstract. The authors create a two-dimensional model of a linearly elastic body at considerably weakened postulate of diffeomorphism-supposed smoothness of field of displacements. One field of displacements as in the classical model is replaced by two smooth fields of displacements. The authors discuss formulations of boundary value problem and prove the unicity theorem.

Keywords: elasticity theory, affine deformation, plane deformation, constitutive equations.

Olga Aleksandrovna Mikenina, Junior researcher, Candidate of physical and mathematical Sciences, N. A. Chinakal Institute of mining SB RAS, Novosibirsk, Russia.

Aleksandr Filippovich Revuzhenko, Head of the laboratory, Professor, Doctor of physical and mathematical Sciences, N. A. Chinakal Institute of mining SB RAS, Novosibirsk, Russia.

REFERENCES

[1] Ivlev D. D. Mechanics of Plastic Media, Vol. 1: Theory of Ideal Plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 448 p. (in Russian).

[2] Ivlev D. D. Mechanics of plastic media, Vol. 2. General issues. Rigid-plastic and elastoplastic state of tel. Strengthening. Deformation theories. Complex environments. Moscow: Fizmatlit, 2002. 448 p. (in Russian).

[3] Ivlev D. D., Bykovtsev G. I. Theory of a hardening plastic body. Moscow: Nauka, 1971. 232 p. (in Russian).

[4] Trusov P. V. Some questions of nonlinear mechanics of a deformable body (in order of discussion) // Mat. modeling systems and processes. 2009. no. 17. P. 85–95. (in Russian).

[5] Revuzhenko A. F., Mikenina O. A. Elastic-plastic model of a rock with a linear structural parameter // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2018. no. 2. P. 167–176. (in Russian).

[6] Revuzhenko A. F. Mechanics of elastic-plastic media and non-standard analysis. Novosibirsk: NSU, 2000. 428 p. (in Russian).

[7] Umov H. A. Selected Works. Moskow-Leningrad: St. ed. techn.-theor. literature, 1950. 553 p.

[8] Lav A. Mathematical theory of elasticity. Moskow-Leningrad: Merge. scientific and technical ed. NKTI USSR, 1935. (in Russian).

[9] Klishin C. V., Revuzhenko A. F. Energy streamlines in deformable rock mass weakened by elliptical holes // Journal of Mining Science. 2009. no. 3. P. 3–8. (in Russian).

[10] Lavrikov S. V., Revuzhenko A. F. Effect of structural parameter on stress concentration in a linear elastic body // AIP Conference Proceedings. 2017. 1893, 030122.

[11] Lavrikov S. V., Revuzhenko A. F. Model of linear elastic theory with a structural parameter and stress concentration analisys in solids under deformation // AIP Conference Proceedings. 2018. 2051, 020167.