Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 168–173

М. М. Вислогузова[1], *Д. В. Гоцев*[1,2], *А. В. Ковалев*[1,2], *А. И. Шашкин*[1]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ДИСКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ

[1] *Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия*
[2] *Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия*

Аннотация. Как известно при нагревании твердые тела, в частности металлы, испытывают температурные деформации, связанные с эффектом линейного расширения. При этом, несмотря на то, что эти деформации малы, соответствующие им напряжения могут оказаться достаточно большими, зачастую превосходящими предел текучести материала. В связи с этим для описания напряженно-деформированных состояний тел, находящихся под действием высоких температур, необходимо учитывать неупругое поведение материалов. Определению напряжений и деформаций в упругопластических задачах посвящено множество работ, в том числе исследования [1–10]. В некоторых из них [1], [5–10] рассматривается температурное воздействие на тела различной конфигурации. В настоящей работе решается задача об определении осесимметричного поля напряжений в плоском диске при воздействии на него точечного источника тепла (например, точечная сварка). Материал диска моделируется упрочняющейся упругопластической средой. Задача решалась в рамках плоско-напряженного состояния методом малых возмущений. В аналитическом виде получены соотношения, описывающие распределение полей напряжений в упругой и пластической областях деформирования. В качестве условий сопряжения решений на упругопластической границе использовались условия неразрывности радиальной и окружной компонент тензора напряжений и радиальной компоненты вектора перемещений.

Ключевые слова: пластичность, упрочнение, упругость, метод возмущений, температурные напряжения.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.14.52.017

УДК: 539.3

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоский диск, в центре которого помещен точечный источник тепла с большим запасом внутренней энергии. Материал диска будем моделировать анизотропно упрочняющейся упругопластической средой, физико-механические константы которой не зависят от распределения температуры. Решение будем проводить при условии реализации в диске осесимметричного плоского напряженного состояния. В этом случае все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние рассматриваемого тела будут зависеть лишь от расстояния r до точечного источника тепла. При этом на бесконечном удалении от него компоненты напряжений стремятся к нулевым значениям. Так как тепловой источник теоретически может обладать сколь угодно высокой температурой, то в его окрестности будет возникать зона неупругих деформаций радиусом $R(t)$, зависящим от времени t.

В рамках приведенной выше постановки задачи напряженно-деформированное состояние плоского диска в цилиндрической системе координат (r, θ, z) будет описываться следующими соотношениями:

— уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}, \tag{1.1}$$

где σ_r, σ_θ — радиальная и окружная компоненты тензора напряжений соответственно;

— соотношения Коши:

$$e_r = \frac{du}{dr}, \quad e_\theta = \frac{u}{r}, \tag{1.2}$$

где e_r, e_θ — радиальная и окружная компоненты тензора деформаций соответственно, u — радиальная компонента вектора перемещений;

— связь полных деформаций с пластической и упругой составляющими:

$$e_r = e_r^p + e_r^e, \quad e_\theta = e_\theta^p + e_\theta^e, \quad e_z = e_z^p + e_z^e, \tag{1.3}$$

где e_r^p, e_θ^p, e_z^p и e_r^e, e_θ^e, e_z^e — главные компоненты тензора пластических и упругих деформаций соответственно.

Вислогузова Мария Михайловна

`e-mail:` visloguzova99@mail.ru, студент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Гоцев Дмитрий Викторович

`e-mail:` rbgotsev@mail.ru, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

Ковалев Алексей Викторович

`e-mail:` kav-mail@mail.ru, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

Шашкин Александр Иванович

`e-mail:` shashkin@amm.vsu.ru, профессор, доктор физико-математических наук, декан факультета прикладной математики информатики и механики, Воронежский государственный университет, Россия.

Поступила 05.06.2020

В качестве условия пластичности примем условие аналогичное условию Ишлинского-Прагера [5]:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta - c(e_r^p - e_\theta^p))^2 + (\sigma_r - c(e_r^p - e_z^p))^2 + (\sigma_\theta - c(e_\theta^p - e_z^p))^2 = 2k^2, \tag{1.4}$$

где c — коэффициент упрочнения; k — предел текучести.

Ассоциированный закон пластического течения тогда будет иметь вид

$$\begin{aligned} de_r^p &= 2d\lambda(2\sigma_r - \sigma_\theta - c(2e_r^p - e_\theta^p - e_z^p)),\\ de_\theta^p &= 2d\lambda(2\sigma_\theta - \sigma_r - c(2e_\theta^p - e_r^p - e_z^p)),\\ de_z^p &= -2d\lambda(\sigma_r + \sigma_\theta + c(2e_z^p - e_\theta^p - e_r^p)), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $d\lambda$ — скалярный положительный множитель.

Связь напряжений с упругими деформациями выберем в виде закона Гука

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-\nu}\left[e_r^e + \nu e_\theta^e - (1+\nu)\alpha T\right], \quad \sigma_\theta = \frac{2G}{1-\nu}\left[e_\theta^e + \nu e_r^e - (1+\nu)\alpha T\right], \tag{1.6}$$

где G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; α — коэффициент линейного температурного расширения; $T(r,t)$ — температура, которая определяется из решения уравнения теплопроводности (см. [1, 4]).

Граничные условия:

$$\sigma_r\Big|_{r=\infty} = 0. \tag{1.7}$$

Условия сопряжения:

$$[\sigma_r]\Big|_{r=R} = [\sigma_\theta]\Big|_{r=R} = [u]\Big|_{r=R} = 0. \tag{1.8}$$

В условиях (1.8) квадратные скобки обозначают разность соответствующих величин в пластической и упругой областях деформирования.

Решение проведем в безразмерных переменных, оставив им их исходные обозначения. При этом все величины имеющие размерность напряжений отнесем к пределу текучести материала.

2. Решение и результаты. Для решения данной задачи был использован метод малого параметра, согласно которому

$$\begin{gathered} \sigma_r = \sigma_r^0 + \delta\sigma_r', \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \delta\sigma_\theta',\\ e_r = e_r^0 + \delta e_r', \quad e_\theta = e_\theta^0 + \delta e_\theta', \quad e_z = e_z^0 + \delta e_z',\\ c = c^0 + \delta c', \quad \alpha = \alpha^0 + \delta\alpha', \quad \lambda = \lambda^0 + \delta\lambda', \quad R(t) = R^0(t) + \delta R'(t), \end{gathered} \tag{2.1}$$

где величины с индексом «0» относятся к нулевому приближению, а с индексом «$'$» — к первому. Причем

$$c = \delta c', \quad \alpha = \alpha^0. \tag{2.2}$$

Распределение поля напряжений в нулевом приближении для упругой зоны деформирования, следуя [1], примем в форме

$$\sigma_r^0 = -2G\left(\frac{1}{r^2}\left(A(t) + \alpha^0(1+\nu)\int Tr\,dr\right)\right), \quad \sigma_\theta^0 = -\sigma_r^0 - 2GT\alpha^0(1+\nu). \tag{2.3}$$

Напряжения в нулевом приближении для пластической области согласно [1] определятся соотношениями

$$\sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 = -1. \tag{2.4}$$

В первом приближении для упругой зоны согласно [2,3] распределение напряжений имеет вид

$$\sigma_r' = \frac{2G}{1-\nu}\left[C_1(t)(1+\nu) - C_2(t)\frac{1}{r^2}(1-\nu)\right],$$
$$\sigma_\theta' = \frac{2G}{1-\nu}\left[C_1(t)(1+\nu) + C_2(t)\frac{1}{r^2}(1-\nu)\right]. \tag{2.5}$$

Соотношения, определяющие напряжения в первом приближении в пластической области:

$$\sigma_r' = \frac{1}{r^2}\left[\frac{3c'r^2(1+2\nu)}{G(1+\nu)} - \int 2Gr\alpha^0(1+\nu)T\,dr + C(t)\right],$$
$$\sigma_\theta' = -\frac{1}{r^2}\left[\frac{3c'r^2(1+2\nu)}{G(1+\nu)} - \int 2Gr\alpha^0(1+\nu)T\,dr + C(t)\right] + 6c'\left(\frac{1+2\nu}{G(1+\nu)} - \alpha^0 T\right). \tag{2.6}$$

В вышеприведенных выражениях $C(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $A(t)$ — функции времени. Для определения $C_1(t)$ и $C_2(t)$, $A(t)$ и радиуса упругопластической границы воспользуемся линеаризованными условиями сопряжения (1.8) для первого и нулевого приближения соответственно. Для определения $C(t)$ воспользуемся условием

$$\sigma_r'(0,t) = 3c'\left(\frac{1+2\nu}{G(1+\nu)} - \alpha^0 T\right), \tag{2.7}$$

полученным аналогично [4].

Отметим, что определение решения в упругой области проводилось классическими методами теории упругости с учетом температурных эффектов, а уравнения для определения напряженного состояния в пластической зоне в первом приближении были получены из решения системы (1.1) - (1.6) методом приведенным в [4].

Полагая $c = 0$, приходим к выражениям для напряжений, полученным в [1] для упругопластического материала.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. 252 с.

[2] Демидов С. П. Теория упругости. Москва: Высшая школа, 1979. 432 с.

[3] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1979. 560 с.

[4] Артемов М. А., Якубенко А. П. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска // Воронеж. гос. ун-т. 2014. № 1. С. 30–38.

[5] О механическом поведении упрочняющегося упругопластического диска под действием источника тепла / А. А. Афанасьев, К. К. Горностаев, А. В. Ковалев [и др.] // Вестник Томского гос. ун-та. Сер. «Математика и механика». 2017. № 50. С. 57–66.

[6] Математическое моделирование состояния тонкого диска при тепловом и силовом воздействиях [Сетевое издание] / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, В. В. Акиньшин [и др.] // Инженерный вестник Дона. 2019. № 4. Режим доступа: http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_28_Artemov.pdf_4c0401978b.pdf. (Дата поступления статьи: 07.06.2019).

[7] О поведении упругопластического диска под действием теплового источника [Сетевое издание] / Г. Г. Бердзенишвили, М. А. Артемов, Е. С. Барановский [и др.] // Инженерный вестник Дона. 2018. № 2. Режим доступа: http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_190_Berdzeneshvili_N.pdf_45978b1390.pdf. (Дата поступления статьи: 01.06.2018).

[8] Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности / Е. Б. Дац, Е. В. Мурашкин, А. В. Ткачева [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 1. С. 32–43.

[9] Буренин А. А., Дац Е. П., Мурашкин Е. В. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // Изв. РАН. МТТ. 2014. Т. 49, № 2. С. 124–131.

[10] Мурашкин Е. В., Дац Е. П. Термоупругопластическое деформирование многослойного шара // Известия РАН. Сер. «Механика твердого тела». 2017. № 5. С. 30–36.

M. M. Visloguzova[1], *D. V. Gotsev*[1,2], *A. V. Kovalev*[1,2], *A. I. Shashkin*[1]

DETERMINATION OF THE STRESS STATE OF A HARDENING DISK UNDER THE INFLUENCE OF TEMPERATURE

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*
[2] *Military training and research center of the air force "Air force Academy named after prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh, Russia*

Abstract. As you know, when heated, solids, in particular metals, experience thermal deformations associated with the effect of linear expansion. Moreover, in spite of the fact that these strains are small, the corresponding stresses can be quite large, often exceeding the yield stress of the material. In this regard, to describe the stress-strain states of bodies exposed to high temperatures, it is necessary to take into account the inelastic behavior of materials. Determination of stresses and strains in elastoplastic problems has been the subject of many works, including studies [1–10]. Some of them [1], [5–10] consider the temperature effect on bodies of various configurations. In this work, we solve the problem of determining the axisymmetric stress field in a flat disk when exposed to a point heat source (for example, spot welding). The disc material is modeled by a hardening elastoplastic medium. The problem was solved within the plane-stressed state by the method of small perturbations. In an analytical form, relations are obtained that describe the distribution of stress fields in elastic and plastic deformation regions. The conditions of continuity of the radial and circumferential components of the stress tensor and the radial component of the displacement vector were used as conditions for conjugation of solutions on the elastoplastic boundary.

Keywords: plasticity, hardening, elasticity, perturbation method, temperature stresses.

REFERENCES

[1] Parkus G. Unsteady temperature stresses. Москва: State publishing house of physical and mathematical literature, 1963. 252 p. (in Russian).
[2] Demidov S. P. Theory of elasticity. Moscow: Higher school, 1979. 432 p. (in Russian).
[3] Timoshenko S. P., Goodyear J. Theory of elasticity. Moscow: Nauka Publishing house, 1979. 560 p. (in Russian).
[4] Artemov M. A., Yakubenko A. P. Mathematical modeling of mechanical behavior of a rotating disk // Voronezh state univercity. 2014. no. 1. P. 30–38. (in Russian).
[5] On the mechanical behavior of a hardening elastic-plastic disk under the action of a heat source / A. A. Afanasiev, K. K. Gornostaev, A. V. Kovalev et al. // Bulletin of the Tomsk state University. Ser. Mathematics and mechanics. 2017. no. 50. P. 57–66. (in Russian).

Maria Mikhailovna Visloguzova, student, Voronezh State University, Voronezh, Russia.
Dmitry Viktorovich Gotsev, Professor, Doctor of physical and mathematical Sciences, Voronezh state University, Military training and research center of the air force "Air force Academy named after prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh, Russia.
Alexey Viktorovich Kovalev, Professor, Doctor of physical and mathematical Sciences, Voronezh State University, Military training and research center of the air force "Air force Academy named after prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh, Russia.
Alexandr Ivanovich Shashkin, Professor, Doctor of physical and mathematical Sciences, Voronezh State University, Voronezh, Russia

[6] Mathematical modeling of the thin disk state under thermal and power effects [Online edition] / M. A. Artemov, E. S. Baranovsky, V. V. Akinshin et al. // Engineering Bulletin of the Don scientific journal. 2019. no. 4. Mode of delivery: http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_28_Artemov.pdf_4c0401978b.pdf. (Date of receipt of the article: 07.06.2019). (in Russian).

[7] On the behavior of an elastic-plastic disk under the action of a heat source [Online edition] / G. G. Berdzenishvili, M. A. Artemov, E. S. Baranovsky et al. // Engineering Bulletin of the Don scientific journal. 2018. no. 2. Mode of delivery: http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_190_Berdzeneshvili_N.pdf_45978b1390.pdf. (Date of receipt of the article: 01.06.2018). (in Russian).

[8] Temperature stresses in an elastic-plastic tube depending on the choice of the plasticity condition / E. B. Dats, E. V. Murashkin, A. V. Tkacheva et al. // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid state mechanics. 2018. no. 1. P. 32–43. (in Russian).

[9] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the field of residual stresses under local thermal influence // Izv. RAS. MTT. 2014. Vol. 49, no. 2. P. 124–131. (in Russian).

[10] Murashkin E. V., Dats E. P. Thermoelasticoplastic deformation of a multilayer ball // Izvestiya RAS. Ser. “Solid mechanics”. 2017. no. 5. P. 30–36. (in Russian).