Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 174–179

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ГЕМИТРОПНЫХ СРЕДАХ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматривается решение задачи о распространении плоской термоупругой гармонической волны в гемитропной микрополярной среде. Приводятся два варианта динамических уравнений гемитропного микрополярного континуума. Определены пространственные поляризации волн перемещений и микровращений относительно волнового вектора плоской волны. Обсуждается качественный характер возможных волновых решений уравнений связанной термоупругости. Отдельно рассматривается случай атермической волны. Вычисление волновых чисел приводится к исследованию одного кубического уравнения с вещественными коэффициентами.

Ключевые слова: волна, поляризация, волновой вектор, микроструктура, микрополярность, директор, волновое число, гемитропность, термоупругость

DOI: 10.37972/chgpu.2020.93.91.018

УДК: 539.374

1. Вводные замечания. Развитие современных методов производства материалов и метаматериалов в значительной степени определяется развитием новых способов

Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 „Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности“).

Поступила 20.06.2020

аддитивного производства. Получаемые таким способом материалы обладают микроструктурными особенностями. Для описания механического поведения таких материалов требуются современные неклассические модели механики сплошных сред. К таким моделям относятся гемитропные микрополярные континуумы. Основной особенностью таких континуумом является чувтсвительность к преобразованиям, изменяющим ориентацию пространства, например, зеркальным отражениям и инверсиям пространства. Практическая значимость исследований этой области механики континуума связана с моделированием поведения биоматериалов используемых в трансплантологии медицинских материалах, сотовых конструкциях, керамиках, пенах. Биологические ткани животного происхождения (мышечная ткань, длинные кости, стенки кровеносных сосудов) проявляют гемитропные свойства, что подтверждается многочисленными исследованиями [1–3].

Термомеханика микрополярных континуумов бурно развивающаяся область механики сплошных сред, о чем свидетельствует многочисленные монографии, посвященные этому вопросу [1–8]. Однако, большинство из них посвящено вопросам моделирования линейных изотропных микрополярных сред. В общем случае микрополярной анизотропии упругий материал задается 171-ой определяющей постоянной, что существенно осложняет анализ систем уравнений, возникающих при решении прикладных задач. Полуизотропное (гемитропное) тело задается девятью определяющими константами, что всего на три больше, чем в изотропном случае.

Волновые задачи механики микрополярных континуумов возникают при моделировании процессов медицинской диагностики, таких как, ультразвуковое исследование, сонография, спектральная допплерография. Теоретической основой для этих методов могут служить задачи о распространении гармонических волн в сплошной среде [9–12]. Исследованиям решений волновых задач термомеханики микроплярных континуумов посвященая обширная литература [4–8, 12]. В настоящей работе рассматривается задача о распространении плоской гармонической волны в гемитропном микрополярном континууме.

2. Динамические уравнения гемитропной микрополярной среды. В работе [4] приведен подробный вывод динамических уравнений для гемитропных сред. Векторная форма таких уравнений, в отсутствии массовых сил и моментов, записывается в виде

$$
\begin{aligned}
&G[(1+c_1)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + \\
&\qquad + 2c_1\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} + Lc_4'\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} + Lc_5'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}] = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \\
&GL^2\big[(1+c_2)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} + (1-c_2+2c_3)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} + L^{-1}c_4'\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + \\
&\qquad + L^{-1}c_5'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + L^{-1}c_6'\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}\big] - 2Gc_1(2\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) = \mathfrak{J}\ddot{\boldsymbol{\phi}}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где введены обозначения

$$
c_4' = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c_5' = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c_6' = -c_6, \tag{2}
$$

$\mathbf{u}$ — вектор перемещений, $\boldsymbol{\phi}$ — вектор микровращений, G — упругий модуль сдвига , ν — коэффициент Пуассона, L — характерная длина микрополярной теории, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 — не имеющие физической размерности определяющие постоянные, ρ — массовая плотность, $\mathfrak{J}$ — коэффициент микроинерции, $\boldsymbol{\nabla}$ — пространственный оператор Гамильтона.

В случае термоупругого континуума уравнения (1) следует дополнить слагаемыми, отвечающими за термоупругую связанность, и уравнением теплопроводности. В дальнейшем мы будем рассматривать упрощенный вариант связанных уравнений гемитропной термоупругой среды, когда из полного набора гемитропных слагаемых остается только температурный градиент $\varsigma\boldsymbol{\nabla}\theta$. Система динамических уравнений в этом случае записыватся в виде

$$\begin{cases} (\mu+\alpha)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}+(\mu-\alpha+\lambda)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}+2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}-\eta\boldsymbol{\nabla}\theta=\rho\ddot{\mathbf{u}}, \\ (\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}+(\gamma-\varepsilon+\beta)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}+2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}-4\alpha\boldsymbol{\phi}-\varsigma\boldsymbol{\nabla}\theta=\mathfrak{I}\ddot{\boldsymbol{\phi}}, \\ \dfrac{\mathfrak{c}}{\kappa}\dot{\theta}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta-\dfrac{1}{\kappa}(\eta\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbf{u}}+\varsigma\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{\phi}}), \end{cases} \tag{3}$$

где θ — превышение температуры над отсчетной температурой θ_0, κ — отношение коэффициента теплопроводности к θ_0, $\mathfrak{c}$ — отношение теплоемкости единицы объема при постоянной нулевой деформации к θ_0, $\eta=2G\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\overset{*}{\alpha}$, $\overset{*}{\alpha}$ — коэффициент линейного теплового расширения, $\varsigma=2GL^2\overset{*}{\beta}$, $GL^2=\gamma$, $\overset{*}{\beta}$ коэффициент теплового искажения.

3. Плоская гармоническая термоупругая волна. Исследуем решения системы (3) в форме плоских волн перемещений, микровращений и температуры:

$$\mathbf{u}=\mathbf{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)},\quad \boldsymbol{\phi}=\mathbf{S}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)},\quad \theta=Be^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{4}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор; $\mathbf{k}$ — (комплексный) волновой вектор; ω — циклическая частота; $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ — (комплексные) векторы пространственной поляризации волны; B — (комплексная) амплитуда температурного инкремента.

В результате подстановки вектора перемещений, вектора микровращений и температуры (4) в динамические уравнения (3) получим уравнения для волнового вектора $\mathbf{k}$ и векторов поляризации плоской волны $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ ($k^2=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$)

$$\begin{aligned} &-(\mu-\alpha+\lambda)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})\mathbf{k}-[(\mu+\alpha)k^2-\rho\omega^2]\mathbf{A}+2\alpha i\mathbf{k}\times\mathbf{S}-\eta i\mathbf{k}B=\mathbf{0}, \\ &-(\gamma-\varepsilon+\beta)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S})\mathbf{k}-[(\gamma+\varepsilon)k^2+4\alpha-\mathfrak{I}\omega^2]\mathbf{A}+2\alpha i\mathbf{k}\times\mathbf{A}-\varsigma i\mathbf{k}B=\mathbf{0}, \\ &-k^2B+\frac{\mathfrak{c}}{\kappa}i\omega B-\frac{\eta}{\kappa}\omega(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})-\frac{\varsigma}{\kappa}\omega(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S})=0, \end{aligned} \tag{5}$$

Из системы уравнений (5) легко получить выражения для проекций векторов поляризации $\mathbf{A}$ и $\mathbf{S}$ на волновой вектор $\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\mathbf{k}&=\frac{\eta ik^2B}{-(\lambda+\mu-\alpha)k^2-(\mu+\alpha)k^2+\rho\omega^2}, \\ \mathbf{S}\cdot\mathbf{k}&=\frac{\varsigma ik^2B}{-(\beta+\gamma-\varepsilon)k^2-(\gamma+\varepsilon)k^2-4\alpha+\mathfrak{I}\omega^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Из соотношений (6) видно, что в связанной термоупругой волне ($B\neq 0$) оба вектора поляризации $\mathbf{A}$ и $\mathbf{S}$ имеют ненулевые проекции на волновой вектор $\mathbf{k}$, т.е. указанная волна всегда содержит продольные составляющие перемещений и микровращений. Более того, можно показать, что она является чисто поперечной, т.е. поперечные составляющие перемещений и микровращений равны нулю. Упомянутые проекции легко исключаются из системы уравнений (5), поскольку достаточно просто выражаются через комплексную амплитуду инкремента температуры B. В частности, их исключение возможно в третьем уравнении рассматриваемой системы [13].

4. Волновые числа плоской гармонической термоупругой волны. Поскольку комплексная амплитуда инкремента температуры отлична от нуля в термической волне, то для квадрата волнового числа сразу же получается дисперсионное уравнение. Вводя безразмерное волновое число $\widetilde{k} = k/k_{\|}$ и опуская тильду, имеем

$$\frac{s^2}{i\omega'}k^2 + \frac{s_{\|}^2 k^2}{1-k^2} + \frac{{}_{\mu}s_{\|}^2 k^2}{1 - \dfrac{1}{\omega'^2} - d_{\|}^2 k^2} = 1, \tag{7}$$

где

$$\omega' = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \Omega^2 = \frac{4\alpha}{\mathfrak{I}}, \quad s^2 = \frac{\Omega\kappa}{\mathfrak{c}c_{\|}^2}, \quad c_{\|}^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho},$$

$$s_{\|}^2 = \frac{\eta^2}{\rho\kappa c_{\|}^2}, \quad {}_{\mu}s_{\|}^2 = \frac{\varsigma^2}{\mathfrak{I}\kappa c_{\|}^2}, \quad d_{\|}^2 = \frac{{}_{\mu}c_{\|}^2}{c_{\|}^2}, \quad {}_{\mu}c_{\|}^2 = \frac{\beta+2\gamma}{\mathfrak{I}}.$$

Заметим, что уравнение (7) теряет смысл для волновых чисел

$$k^2 = 1, \qquad k^2 = d_{\|}^{-2}(1-\omega'^{-2}).$$

Несложно показать, что данным волновым числам могут соответствовать только холодные атермические волны, характеризующиеся условием $B = 0$.

Если вместо частоты оперировать с величиной

$$\tau^{-1} = i\omega',$$

то для квадрата волнового числа можно получить бикубическое уравнение

$$e_0k^6 + e_1k^4 + e_2k^2 + e_3 = 0 \tag{8}$$

с коэффициентами

$$e_0 = -i(i\tau)s^2d_{\|}^2, \quad -e_1 = -i(i\tau)s^2(d_{\|}^2 + 1 - (i\tau)^2) + (1+s^2)d_{\|}^2 + {}_{\mu}s_{\|}^2,$$
$$e_2 = [1-(i\tau)^2][-i(i\tau)s^2 + s_{\|}^2 + 1] + {}_{\mu}s_{\|}^2 + d_{\|}^2, \quad e_3 = -[1-(i\tau)^2].$$

Корни бикубического уравнения (8) можно определить с помощью известных формул. Все они (три из них дают нормальные волновые числа) имеют ненулевые мнимые части. Далее рассмотрим известные из алгебры представления *формальных* корней кубического уравнения.

На комплексной плоскости рассмотрим алгебраическое кубическое уравнение

$$e_0w^3 + e_1w^2 + e_2w + e_3 = 0. \tag{9}$$

Здесь w обозначает комплексную переменную; e_0, e_1, e_2, e_3 — коэффициенты (вообще говоря, комплексные) кубического уравнения.

Корни уравнения вычисляются по известным формулам

$$w = -\frac{e_1}{3e_0} + w' = -\frac{e_1}{3e_0} + \lambda + \mu = -\frac{e_1}{3e_0} + \sqrt[3]{-\frac{e_3'}{2} + \sqrt{-\frac{D}{4\cdot 27}}} + \sqrt[3]{-\frac{e_3'}{2} - \sqrt{-\frac{D}{4\cdot 27}}}. \tag{10}$$

Здесь приняты обозначения

$$
\begin{gathered}
e_2' = \frac{e_2}{e_0} - \frac{e_1^2}{3e_0^2}, \qquad e_3' = \frac{2e_1^3}{27e_0^3} - \frac{e_1 e_2}{3e_0^2} + \frac{e_3}{e_0}, \quad E_j = \frac{e_j}{e_0} \qquad (j = 1, 2, 3), \\
D = -27e_3'^2 - 4e_2'^3 = E_1^2 E_2^2 - 4E_1^3 E_3 - 27E_3^2 - 4E_2^3 + 18E_1 E_2 E_3.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Процедура поиска и исследования корней кубического уравнения (9) подробно изложена в [12], включая самый сложный неприводимый случай.

5. Заключение.

1. Рассмотрено решение задачи о распространении плоской термоупругой гармонической волны в гемитропной микрополярной среде.
2. Приводятся два варианта динамических уравнений гемитропного микрополярного континуума.
3. Определены пространственные поляризации волн перемещений и микровращений относительно волнового вектора плоской волны.
4. Обсуждается качественный характер возможных волновых решений уравнений связанной термоупругости. Отдельно рассматривается случай атермической волны.
5. Вычисление волновых чисел приводится к исследованию одного кубического уравнения с вещественными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Maugin G. Non-Classical Continuum Mechanics. A Dictionary. Singapore: Springer, 2017. xvii+259 p.
[2] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
[3] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
[4] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума. 2018. Т. 22. с. 504–517.
[5] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1986. 872 с.
[6] Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1962. 364 с.
[7] Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
[8] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.
[9] Уизем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
[10] Бреховских Л. М. Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 336 с.
[11] Весоловский З. Динамические задачи нелинейной теории упругости. Киев: Наук. думка, 1981. 216 с.
[12] Radayev Yu. N. Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki.
[13] Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

PLANE THERMOELASTIC HARMONIC WAVES IN HEMITROPIC MICROPOLAR MEDIA

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper is devoted to the problem of a plane thermoelastic harmonic wave propagation in hemitropic micropolar media. Two versions of the dynamic equations of the hemitropic micropolar continuum are presented. The spatial polarizations of the displacements and microrotations waves relative to the wave vector of a plane wave are determined. The characterictic features of possible wave solutions of the coupled thermoelasticity problems are discussed. The case of athermal waves is separately considered. Computation of wave numbers is reduced to the analysis of a cubic equation with real coefficients.

Keywords: wave, polarization, wave vector, microstructure, micropolarity, director, wavenumber, hemitropicity, thermoelasticity

REFERENCES

[1] Maugin G. Non-Classical Continuum Mechanics. A Dictionary. Singapore: Springer, 2017. xvii+259 p.
[2] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
[3] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
[4] Radayev Y. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2018. Vol. 22. p. 504–517.
[5] Nowacki W. Theory of Elasticity. Moscow: Mir, 1986. 872 p.
[6] Nowacki W. Problems of Thermoelasticity. Moscow: Izd-vo Akad. nauk SSSR, 1962. 364 p.
[7] Nowacki W. Dynamic Problems of Thermoelasticity. Moscow: Mir, 1970. 256 p.
[8] Kovalev V. A., Radaev Y. N. Waves Problem of Field Theory and Thermomechanics. Saratov: Izd-vo Saratovskogo un-ta, 2010. 328 p.
[9] Witham G. B. Linear and nonlinear Waves. New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley & Sons, 1974. xvi+636 p.
[10] Brekhovskikh L. M., Goncharov V. V. Introduction to Continuum Mechanics (in Application to Theory of Waves). Moscow: Nauka, 1982. 336 p.
[11] Wesolowski Z. Dynamic Problems of Nonlinear Elasticity. Kiev: Naukova Dumka, 1981. 216 p.
[12] Radayev Yu. N. Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki.
[13] Sushkevich A. K. Foundations of Higher Algebra. Moscow, Leningrad: ONTI, 1937. 476 p.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research project no. 18-01-00844.