

И. А. Семенова

ПРИМЕРЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБРАТНО СИММЕТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары

Аннотация. Проблеме решения краевых задач теории упругости в конечных канонических областях с угловыми точками границы и точками смены типа граничных условий (бигармоническая проблема) почти 200 лет (см. обзор [1]). Интерес к решениям в прямоугольнике не утихал никогда, достигнув пика в 1940–1980 годы. В первую очередь благодаря советской школе математики и механики. В это время было опубликовано не менее двух тысяч работ, так или иначе связанных с построением аналитических решений для прямоугольника. Но точного решения задачи получено не было. Задача, как правило, сводилась к бесконечной не распадающейся системе алгебраических уравнений. В статье, на основе методов, развитых в работах [2]–[7], построено аналитическое решение задачи и даны два примера.

Ключевые слова: полуполоса, прямоугольник, краевая задача, функции Фадля – Папкова, точные аналитические решения, обратно симметричная задача.

УДК: 539.3

Материал и методика исследований. Рассмотрим обратно симметричную задачу для прямоугольника $\{P : |x| \leq a, |y| \leq 1\}$, у которого на горизонтальных сторонах напряжения

$$\sigma_x(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1), \quad (1)$$

а на торцах $x = \pm a$ заданы нормальные (нечетная функция) и касательные $\tau(y)$ (четная функция) напряжения, т. е. $\sigma_x(\pm a, y) = \sigma(y)$, $\tau_{xy}(\pm a, y) = \tau(y)$ (рис. 1).

Полагаем, что задача симметрична относительно оси y . При построении решения будем пользоваться методом начальных функций [8].

Поступила 10.02.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 15-31-50033 мол_нр).

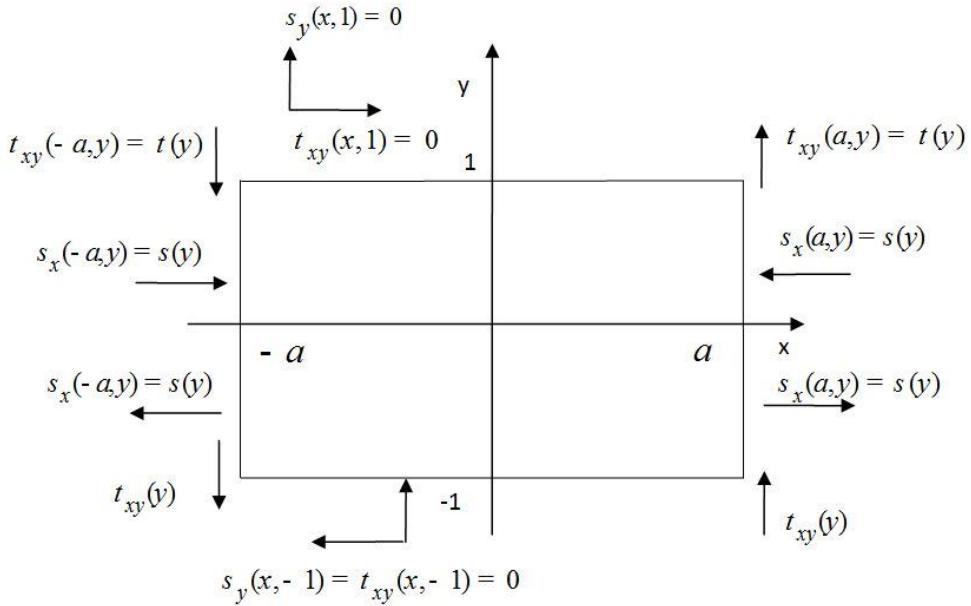


Рис. 1

Решения для прямоугольника, записанные в виде разложений по функциям Фадля – Папковича (без учета элементарного решения), имеют вид:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) sh \lambda_k x + \overline{a_k} \xi(\overline{\lambda_k}, y) sh \overline{\lambda_k} x, \\
 V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) ch \lambda_k x + \overline{a_k} \chi(\overline{\lambda_k}, y) ch \overline{\lambda_k} x, \\
 \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) ch \lambda_k x + \overline{a_k} s_x(\overline{\lambda_k}, y) ch \overline{\lambda_k} x, \\
 \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) ch \lambda_k x + \overline{a_k} s_y(\overline{\lambda_k}, y) ch \overline{\lambda_k} x, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) sh \lambda_k x + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y) sh \overline{\lambda_k} x. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Функции Фадля – Папковича в случае обратно симметричной деформации полуполосы выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \xi(\lambda_k, y) &= \left(\sin \lambda_k - \frac{1+\mu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \sin \lambda_k y + \frac{1+\mu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \\
 \chi(\lambda_k, y) &= - \left(\frac{1-\mu}{2} \sin \lambda_k + \frac{1+\mu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\mu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \tag{3}
 \end{aligned}$$

$$s_x(\lambda_k, y) = (1+\mu) \lambda_k \{(2 \sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y\},$$

$$s_y(\lambda_k, y) = (1 + \mu)\lambda_k^2 \{ \cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y \},$$

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = (1 + \mu)\lambda_k \{ (\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \}.$$

Здесь μ — коэффициент Пуассона, a_k — подлежащие определению коэффициенты разложений. Границные условия на продольных сторонах выполняются точно, т. к. $t_{xy}(\lambda_k, \pm 1) = s_y(\lambda_k, \pm 1) = 0$, а числа λ_k — множество $\{\pm \lambda_k, \pm \overline{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$ всех комплексных нулей целой функции

$$L(\lambda) = \lambda - \sin \lambda \cos \lambda. \quad (4)$$

Удовлетворяя граничным условиям на торцах прямоугольника, получим такие разложения:

$$\begin{cases} \sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) ch \lambda_k a + \overline{a_k} s_x(\overline{\lambda_k}, y) ch \overline{\lambda_k} a, \\ \tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) sh \lambda_k a + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y) sh \overline{\lambda_k} a. \end{cases} \quad (5)$$

Коэффициенты a_k находятся отсюда в явном виде с помощью биортогональных систем функций $X_k(y)$, $T_k(y)$, которые разыскиваются как решения уравнений $\lambda_k \in \Lambda$ ($k \geq 1$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy = \frac{L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_k(y) dy = \frac{\lambda L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)}. \quad (6)$$

Причем, $s_x(\lambda, y)$, $t_{xy}(\lambda, y)$ — функции, порождающие соответствующие функции Фаддя-Папковича при $\lambda = \lambda_k$. Биортогональные функции устроены следующим образом: каждая из них представляет собой сумму финитной функции обратного преобразования Бореля (Фурье) целой функции экспоненциального типа и квазифинитной функции — обратного преобразования Бореля квазицелой функции экспоненциального типа [9], [10]. При определении искомых коэффициентов разложений, как правило, нужны только финитные части биортогональных функций. Техника их построения описана в статье [3]. Финитные части функций $X_k(y)$, $T_k(y)$, соответственно, равны ($|y| \leq 1$)

$$x_k(y) = \frac{1}{2(1 + \mu)\lambda_k^2} \left(\frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - y \right), \quad t_k(y) = \frac{1}{2(1 + \mu)\lambda_k} \frac{\cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k}. \quad (7)$$

Продолжим равенства (5) на всю вещественную ось следующим образом: функции, стоящие справа — аналитически, а функции, стоящие слева — периодически с периодом, равным 2. После этого спроектируем их на вещественные направления: первое на направление $X_{\nu}(y) + \overline{X_{\nu}(y)}$, второе — на $T_{\nu}(y) + \overline{T_{\nu}(y)}$ и рассмотрим интегралы

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(\lambda_k, y) [X_{\nu}(y) + \overline{X_{\nu}(y)}] dy, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}(\lambda_k, y) [T_{\nu}(y) + \overline{T_{\nu}(y)}] dy, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(y) [X_{\nu}(y) + \overline{X_{\nu}(y)}] dy, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tau(y) [T_{\nu}(y) + \overline{T_{\nu}(y)}] dy. \quad (9)$$

Интегралы (9), в силу выбранного способа продолжения функций $\sigma(y)$ и $\tau(y)$, будут равны [2], [3], [4]

$$\begin{cases} \sigma_k^* = \int_{-1}^1 \sigma(t) [x_k(t) + \overline{x_k(t)}] dt = \sigma_k + \overline{\sigma_k}, \\ \tau_k^* = \int_{-1}^1 \tau(t) [t_k(t) + \overline{t_k(t)}] dt = \tau_k + \overline{\tau_k}, \end{cases} \quad (10)$$

а интегралы (8) равны

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(\lambda_k, y) [X_\nu(y) + \overline{X_\nu(y)}] dy &= \begin{cases} M_\nu & (\lambda_k = \lambda_\nu), \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_\nu), \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(\overline{\lambda_k}, y) [X_\nu(y) + \overline{X_\nu(y)}] dy &= \begin{cases} \overline{M_\nu} & (\lambda_k = \lambda_\nu), \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_\nu), \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}(\lambda_k, y) [T_\nu(y) + \overline{T_\nu(y)}] dy &= \begin{cases} \lambda_\nu M_\nu & (\lambda_k = \lambda_\nu) \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_\nu), \end{cases}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}(\overline{\lambda_k}, y) [T_\nu(y) + \overline{T_\nu(y)}] dy &= \begin{cases} \overline{\lambda_\nu M_\nu} & (\lambda_k = \lambda_\nu), \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_\nu). \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда для каждого номера $k \geq 1$ получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sigma_k = a_k M_k ch \lambda_k a + \overline{a_k M_k} ch \overline{\lambda_k} a, \\ \tau_k = a_k \lambda_k M_k sh \lambda_k a + \overline{a_k \lambda_k M_k} sh \overline{\lambda_k} a, \end{cases} \quad (12)$$

где $M_k = \sin^2 \lambda_k / \lambda_k$. Решая систему (12), найдем

$$a_k = \frac{2(\tau_k^* sh \overline{\lambda_k} a - \sigma_k^* \lambda_k sh \lambda_k a)}{M_k \delta_k}, \quad (13)$$

где $\delta_k = sh \lambda_k a \cdot ch \overline{\lambda_k} a - ch \lambda_k a \cdot sh \overline{\lambda_k} a$.

Подставляя теперь (13) в формулы (2), и избавляясь в них от пуль-рядов (разложений чисто мнимых функций), получим искомые выражения для напряжений и перемещений в прямоугольнике [2], [3], [4]. Ниже они представлены двумя группами формул.

На торцах прямоугольника $x = \pm a$ заданы нормальные самоуравновешенные напряжения $\sigma_x(\pm a, y) = \sigma(y)$, а касательные $\tau_{xy}(\pm a, y) = 0$:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{Im(\lambda_k \overline{\lambda_k} sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k x)}{Im(\overline{\lambda_k} sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k a)} \right\}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{Im(\overline{\lambda_k} sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k x)}{Im(\overline{\lambda_k} sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k a)} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{M_k \lambda_k^2} \frac{Im(\lambda_k^2 \overline{\lambda_k} sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k x)}{Im(\overline{\lambda_k} sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k a)} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{Im(\lambda_k \overline{\lambda_k} sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k x)}{Im(\overline{\lambda_k} sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k a)} \right\}, \end{aligned}$$

на торцах прямоугольника $x = \pm a$ заданы касательные напряжения $\tau_{xy}(\pm a, y) = \tau(y)$, а нормальные равны нулю:

$$U(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{Im(\lambda_k ch \overline{\lambda_k} a sh \lambda_k x)}{Im(\overline{\lambda_k} sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k a)} \right\},$$

$$V(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{Im(ch\bar{\lambda}_k a ch\lambda_k x)}{Im(\bar{\lambda}_k sh\bar{\lambda}_k a ch\lambda_k a)} \right\},$$

$$\sigma_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \frac{Im(\lambda_k^2 ch\bar{\lambda}_k a sh\lambda_k x)}{Im(\bar{\lambda}_k sh\bar{\lambda}_k a ch\lambda_k a)} \right\},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{Im(\lambda_k ch\bar{\lambda}_k a sh\lambda_k x)}{Im(\bar{\lambda}_k sh\bar{\lambda}_k a ch\lambda_k a)} \right\}.$$

Пример 1. Пусть на торце квадрата $\{P : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ задан изгибающий момент интенсивности 1, т. с.

$$\sigma(y) = \delta'(y). \quad (14)$$

Нормальные напряжения должны быть самоуравновешены по моменту. Если это не так, то их нужно сделать таковыми, воспользовавшись элементарным решением сопротивления материалов. В рассматриваемом примере нормальное напряжение примет вид:

$$\delta'(y) = 3y/2. \quad (15)$$

На рис. 2–6 представлены кривые распределения перемещений и напряжений в сечении $x = 0.8$.

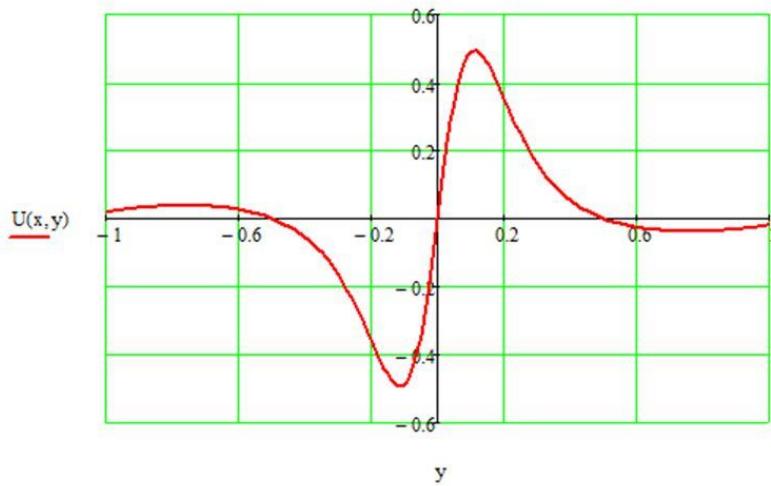


Рис. 2

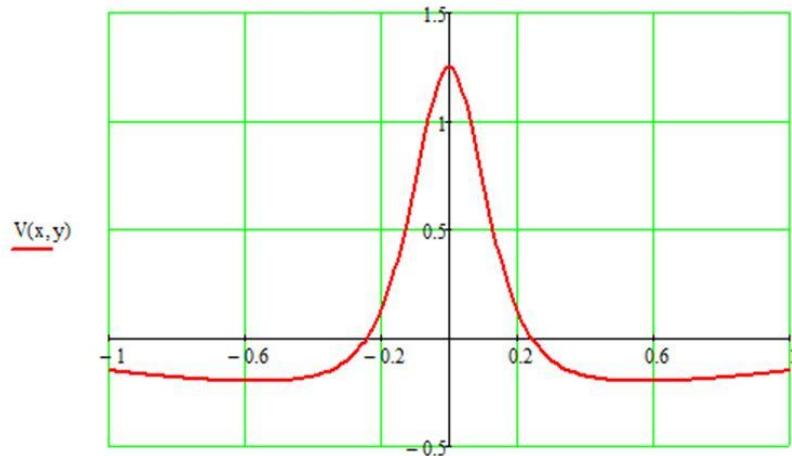


Рис. 3

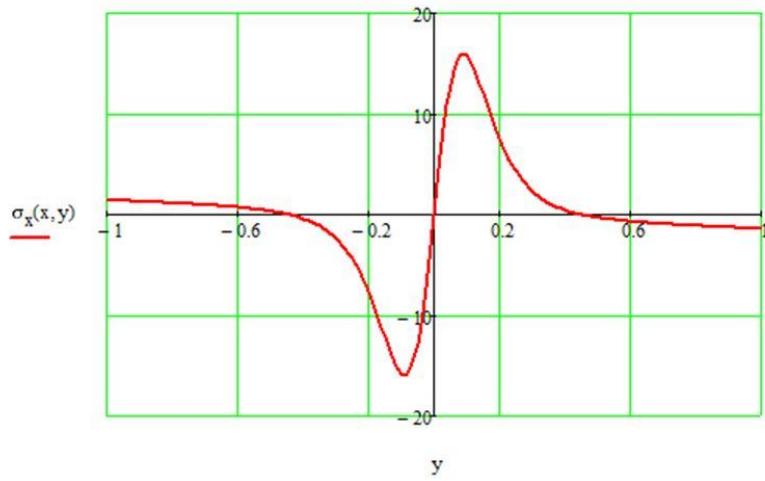


Рис. 4

Пример 2. На торце прямоугольника заданы самоуравновешенные касательные напряжения. Расчетное сечение $x = 1$.

$$\tau(y) = -5y^4 + 6y^2 - 1 \quad (16)$$

Найдем числа τ_k по формуле (10) и подставим их в выражение (15). Тем самым получим нужное решение. На рис. 7 показаны кривые распределения напряжений (15) на торце полуносы. Из рис. 7 видно, что касательные напряжения $\tau_{xy}(0, y)$ совпадают с раскладываемой функцией (8).

Результаты исследований и их обсуждение. Даны примеры решения обратно симметричной задачи теории упругости в прямоугольнике, когда две противоположные стороны прямоугольника не нагружены, а на двух других заданы нормальные или касательные напряжения.

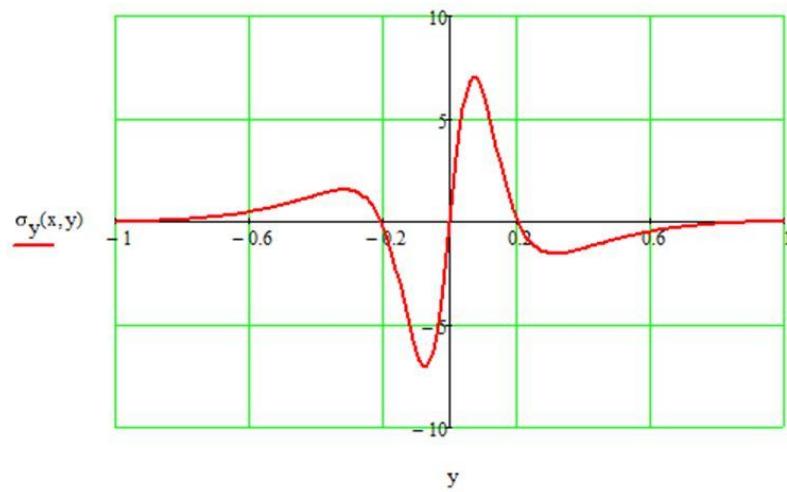


Рис. 5

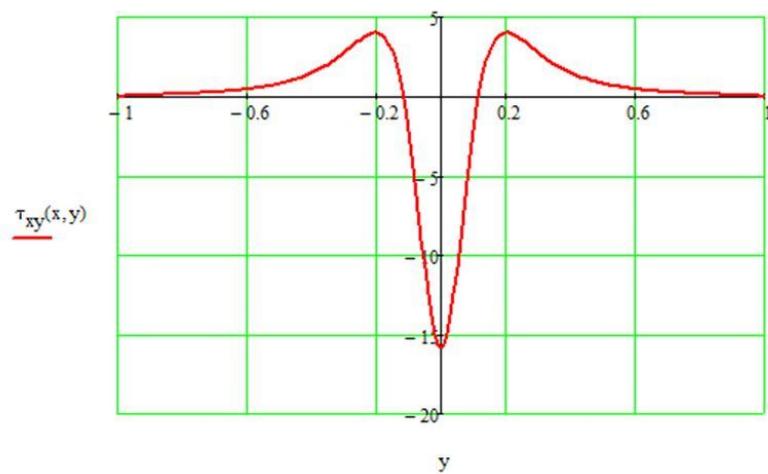


Рис. 6

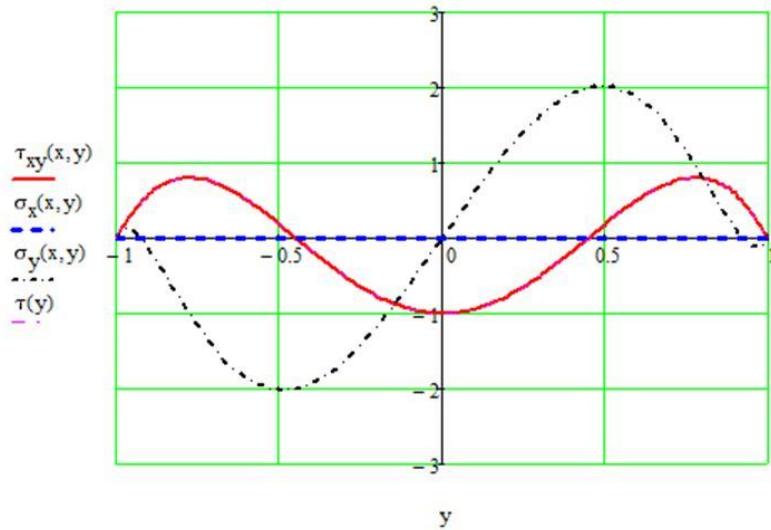


Рис. 7

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Meleshko, V. V. Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – 2003. – No. 1. – P. 33–85.
- [2] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. – № 5. – С. 78–98.
- [3] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 5. – С. 136–158.
- [4] Коваленко, М. Д., Меньшова И. В. Аналитические решения двумерных краевых задач теории упругости в конечных областях с угловыми точками границы: монография. – Чебоксары : изд-во Чуваш. гос. пед. ун-та, 2014. – 123 с.
- [5] Меньшова, И. В. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полуполосе. Обратно-симметрическая задача / И. В. Меньшова, И. А. Семенова, Н. В. Храмова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 2 (22). – С. 119–130.
- [6] Коваленко, М. Д. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича в обратно-симметрической задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 5(17). – С. 81–89.
- [7] Семенова, И. А. Примеры аналитических решений обратно симметрической краевой задачи теории упругости в полуполосе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. № 4 (22). – С. 215–224.
- [8] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.
- [9] Коваленко, М. Д., Меньшова И. В. Интегральное преобразование Бореля в классе квазицелых функций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 3(21). – С. 22–36.

[10] Коваленко, М. Д. О преобразовании Бореля в классе W квазишерых функций / М. Д. Коваленко // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – № 3. – С. 761–774.

Семенова Ирина Александровна,
аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары
e-mail: irishka_g_05@mail.ru

I. A. Semenova

EXAMPLES OF ANALYTICAL SOLUTIONS IS INVERSELY SYMMETRIC BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY IN RECTANGLE

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. The problem of solving the biharmonic equation in a finite canonical domains with corner points of the boundary (biharmonic problem) exists almost 200 years (see the review [1]). Interest in the decisions in the box did not cease ever, reaching a peak in 1940-1980 years. First of all, thanks to the Soviet school of mathematics and mechanics. At this time it was published not less than two thousand works, in one way or another connected with the construction of analytical solutions for the rectangle. But the exact solution was obtained. The task is usually reduced to the infinite system does not decay algebraic solutions. In this paper, based on the methods developed in [2] [7], built analytical solution and gives two examples.

Keywords: semistrip, rectangle, boundary-value problem, Fadde-Papkovich functions, analytical solutions, antisymmetric boundary-value problem.

REFERENCES

- [1] Meleshko, V. V. Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – 2003. – P. 33–85.
- [2] Kovalenko, M. D. Decomposition on Fadly – Papkovich's functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98. (in Russian)
- [3] Kovalenko, M. D. Decomposition on functions Fadly – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158. (in Russian)
- [4] Kovalenko, M. D. Analytical solutions of two-dimensional boundary value problems of elasticity theory in finite domains with corner points of the boundary: a monograph. – Cheboksary : Izd Chuvash State Pedagogical University. – 2014. – 123 p. (in Russian)
- [5] Menshova, I. V. Decompose in funktsiyamFadlan – Papkovicha in polupolos. Backsimmetrichnoy problems / I. V. Menshova, I. A. Semenova, N. V. Kramova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2014. – № 2 (20). – P. 119–130. (in Russian)
- [6] Kovalenko, M. D. Decompose in Lagrange funktsiyamFadlan – Papkovicha in backsimmetrichnoy theories of elasticity for a rectangular semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 5 (15). – P. 81–89. (in Russian)
- [7] Semenova, I. A. Examples of analytical solutions is inversely symmetric boundary-value problem of elasticity theory in polopolo / I. A. Semenova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mcchanics of a limit state. 2014. № 4 (22). P. 215 224. (in Russian)
- [8] Vlasov, V. V. Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p. (in Russian)
- [9] Kovalenko, M. D. Borel integral transformation in the class of quasi-integral functions / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. – 2014. – № 3 (21). – P. 22–36. (in Russian)
- [10] Kovalenko, M. D. Borel transformations in the class W quasi-functions / M. D. Kovalenko // Fundamental and Applied mathematics. – 2001. – № 3. – P. 761–774. (in Russian)

Semenova, Irina Alexandrovna

Postgraduate student, Departament of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary