

О. В. Дудко, А. А. Манцыбора

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ КОНСТАНТ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ НА РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ УДАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

Аннотация. В работе представлены результаты численного решения двумерных автомодельных задач динамики деформирования горных пород в условиях плоской деформации. Для описания динамического поведения материалов под действием ударной нагрузки выбрана модель разномодульной изотропно-упругой среды с сингулярной зависимостью между напряжениями и деформациями. Проведена серия вычислительных экспериментов для различных материалов и параметров краевых условий. В результате сделан вывод о существенном влиянии знака материальных констант, отвечающих в модели за проявление разномодульности, на характер решения в целом и поведение возникающих волн деформаций в частности.

Ключевые слова: разномодульная упругость, плоская деформация, ударная волна, волна Римана, автомодельное решение, численный эксперимент.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.74.18.019

УДК: 539.371:519.62

Введение

Известно, что у многих природных и конструкционных материалов зависимость между напряжениями и деформациями сильно отличается от линейной уже на упругой стадии. Более того, существуют материалы, чьи диаграммы «напряжения – деформации» выглядят как кусочно-гладкие нелинейные функции с особой точкой в области малых деформаций. Например, такие диаграммы имеют горные породы [1], зернистые и волокнистые композиты [2, 3], некоторые металлические сплавы [4] и др. Все перечисленные материалы по-разному реагируют на растяжение и сжатие даже

© Дудко О. В., Манцыбора А. А. 2020

Дудко Ольга Владимировна

e-mail: dudko@iacr.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Манцыбора Александр Анатольевич

e-mail: manzubor@iacr.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы фундаментальных исследований ДВО РАН «Дальний Восток» на 2018–2020 годы (проект №18-5-002).

Поступила 03.09.2020

при малой деформации и поэтому причисляются механикой деформирования к классу разномодульных упругих сред. Среди множества подходов, призванных описывать свойства подобных материалов, в настоящей работе выбрана модель разномодульной изотропно-упругой среды [5], основанная на использовании упругого потенциала с добавочными слагаемыми особого неаналитического вида. Влияние разномодульности на одномерную динамику упругого деформирования в рамках самого простого трехконстантного варианта такой модели достаточно подробно исследовано в [6–8] и др. В данной работе рассматриваются особенности динамики плоских деформаций разномодульной среды [5] на примере численного решения плоских автомодельных задач. При этом основное внимание направлено на анализ полученных численных результатов с целью выявить в тензорно-линейном варианте модели [5] те факторы, которые оказывают наиболее заметное влияние на решения (в том числе, на характер возникающих нелинейных волн деформаций).

Математическая модель

Запишем систему модельных соотношений динамики деформирования разномодульного изотропно-упругого материала, используя предположения о малости деформаций, отсутствии массовых сил и адиабатическом характере процесса:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} = \rho \dot{v}_i, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \varepsilon_1, \quad v_i = \dot{u}_i, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \\ W(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\lambda}{2}\varepsilon_1^2 + \mu\varepsilon_2 - \nu\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2} + \alpha\frac{\varepsilon_1^3}{\sqrt{\varepsilon_2}} + \dots, \quad \varepsilon_1 = e_{kk}, \quad \varepsilon_2 = e_{ks}e_{sk}. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) неизвестные функции зависят от времени t и прямоугольных декартовых координат $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Коши; e_{ij} — компоненты тензора малых деформаций; u_i, v_i — компоненты вектора перемещений и вектора скорости точек среды соответственно; ρ_0, ρ — начальное и текущее значения плотности среды; точкой обозначена частная производная по времени, индексом после запятой — по соответствующей пространственной координате; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Функция $W(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ является упругим потенциалом, задающим в системе (1) механические свойства изотропно-упругой среды. Для описания разномодульного поведения деформируемой среды примем тензорно-линейный вариант модели [5], как это сделано, например, в [9]. Первые два слагаемых функции W соответствуют линейно-упругой среде с параметрами Ламе λ, μ ; неаналитические слагаемые с упругими модулями ν, α описывают разномодульное поведение материала; многоточием обозначено дальнейшее разложение W в ряд по сферическим функциям [9].

Из уравнений (1) можно записать зависимость «напряжения – деформации» в форме, подобной известному соотношению линейной теории упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = A\varepsilon_1\delta_{ij} + 2Me_{ij}, \\ A = \lambda - \frac{\nu}{\phi} + 3\alpha\phi, \quad M = \mu - \frac{\nu}{2}\phi - \frac{\alpha}{2}\phi^3, \quad \phi = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Однако, в отличие от линейной модели, в (2) модули упругости A, M являются особыми функциями от инвариантов тензора деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, что обеспечивает физическую нелинейность выбранной модели даже при малых деформациях.

Если быстрое (скачкообразное) изменение нагрузки на границе деформируемого тела не приводит к его необратимым деформациям, то возникающие в этом случае граничные возмущения распространяются в материал в виде нелинейных упругих волн (ударных и слабых). Такие процессы моделируются в решении системы (1) разрывами первых и вторых производных, связанными условиями совместности разрывов первого и второго порядка соответственно [10, 11]:

— на ударной волне — разрыве первых производных при $[u_i] = 0$:

$$\begin{aligned} [\rho(v_j n_j - G)] &= 0, \quad [\sigma_{ij}] n_j = \rho^+(v_j^+ n_j - G)[v_i], \\ \sigma_{ij}^+[v_i] n_j &= \rho^+(v_i^+ n_i - G) ([U^T] + [E] + \frac{1}{2}[v_i][v_i]), \\ [v_i] &= -GR_i, \quad [u_{i,j}] = R_i n_j, \quad R_i = \tau n_i + \gamma m_i; \end{aligned} \quad (3)$$

— на слабой волне — разрыве вторых производных при $[u_i] = 0$, $[v_i] = 0$, $[u_{i,j}] = 0$:

$$[\sigma_{ij,j}] = \rho^+[\dot{v}_i], \quad [\dot{v}_i] = G^2[u_{i,jk}] n_j n_k. \quad (4)$$

Скачки разрывных функций в (3), (4) определяются как $[\diamond] = \diamond^+ - \diamond^-$, где \diamond^+ , \diamond^- — предельные значения функции \diamond в точке $(\mathbf{x}, t) \in D(t)$ на внешней и внутренней стороне волновой поверхности $D(t)$ соответственно; G — скорость распространения волны $D(t)$; τ , γ — нормальная и касательная интенсивности разрыва градиента перемещений на ударной волне: $\tau = [u_{i,j}] n_i n_j$, $\gamma = [u_{i,j}] m_i n_j$; n_i , m_i — компоненты нормального и касательного к $D(t)$ векторов \mathbf{n} и \mathbf{m} ($n_i m_i = 0$, $n_i n_i = 1$); $[U^T]$, $[E]$ — скачки энергии теплового движения частиц среды и упругой потенциальной энергии [11].

Согласно [10, 11] отметим, что упругая ударная волна существует, если разрывы на ней носят эволюционный характер и энтропия не убывает. Если эти условия нарушаются, то ударную волну в решении системы (1) необходимо заменить на волну Римана (простую волну) — область, ограниченную двумя слабыми разрывами [10]. При численном решении плоских автомодельных краевых задач динамики разномодульной среды проверку критериев существования ударной волны будем проводить согласно алгоритму, предложенному в [12] для нелинейно-упругой среды Мурнагана.

Свойства ударных волн при плоской деформации разномодульной среды
Положим, что все движения точек среды ограничены плоскостью (x_1, x_2) :

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, t), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, t), \quad u_3 = 0. \quad (5)$$

С учетом (5) из (1)–(3) при $\mathbf{n} = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{m} = \{0, 1, 0\}$ получаем систему уравнений для сильных разрывов в условиях плоской деформации:

$$\begin{cases} (A^+ + 2M^+) \tau + ([A] + 2[M])(e_{11}^+ - \tau) + [A] e_{22}^+ = \rho^+ G^2 \tau, \\ 2[M] e_{12}^+ + (M^+ - [M]) \gamma = \rho^+ G^2 \gamma. \end{cases} \quad (6)$$

Из (6) можно вычислить скорость ударной волны G и одну из интенсивностей разрыва (τ или γ), если другая известна. Анализ решений системы (6) показывает, что свойства плоских ударных волн при плоской деформации разномодульной среды (1) вполне согласуются с результатами [10, 12], полученными для нелинейно-упругих сред с гладкими нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями (типа среды Мурнагана). Кратко запишем эти свойства, необходимые в дальнейшем для постановки краевых задач динамики деформирования:

1) при плоской деформации в разномодульной упругой среде (1) могут возникать два плоских комбинированных сильных разрыва: квазипродольная ударная волна со скоростью G_{QL} и квазипоперечная ударная волна со скоростью G_{QT} ;

2) скорости G_{QL} , G_{QT} являются сложными функциями предварительных деформаций e_{ij}^+ и состояния e_{ij}^- позади волны (или, что то же самое, скачков τ , γ на волне);

3) можно показать, что $G_{QL} > G_{QT}$, т.е. передним фронтом распространения граничных возмущений является квазипродольная ударная волна, вызывающая основное объемное сжатие среды с небольшим сдвигом: $\tau > 0$, $\gamma \neq 0$, $\tau \gg |\gamma|$ (при отсутствии предварительного сдвига такая волна будет чисто продольной); квазипоперечная ударная волна идет второй по уже ненулевому полю деформаций и инициирует основной скачок сдвиговых деформаций с небольшим изменением объема: $\gamma \neq 0$, $\tau \neq 0$ и $|\gamma| \gg |\tau|$ (чисто поперечной эта ударная волна в среде (1) стать не может согласно условию $\tau \neq 0$, необходимому для существования решения системы (6)).

Постановка плоских автомодельных краевых задач

Рассмотрим задачи:

А) о сжимающе-сдвигающей ступенчатой нагрузке $\sigma^* = \text{const}$, бегущей с постоянной скоростью по границе L разномодульного упругого полупространства (рис. 1,а);

Б) о наклонном падении плоской волны ударного сжатия Σ_0 с интенсивностью $\tau_0 = \text{const}$ на бесконечную плоскую жесткую преграду L в разномодульной упругой среде (рис. 1,б).

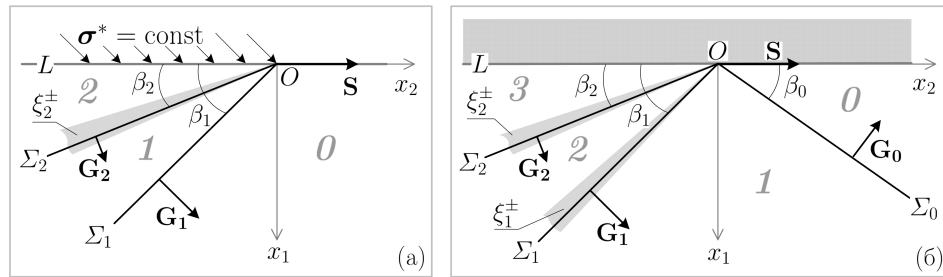


Рис. 1. Возможные схемы автомодельной постановки краевых задач: (а) задача А; (б) задача Б; Σ_0 , Σ_1 , Σ_2 — продольная, квазипродольная и квазипоперечная ударные волны; ξ_1^\pm , ξ_2^\pm — волны Римана; углы и скорости передних и задних фронтов волн Римана на рисунке не показаны

Постоянство граничной нагрузки и ее скорости в задаче А и постоянная интенсивность падающей волны в задаче Б позволяют провести решение А, Б в автомодельной постановке. В обоих случаях автомодельную переменную и компоненты вектора перемещений задаем как

$$\xi = \frac{x_1}{x_2 - St}, \quad u_1 = (x_2 - St)f(\xi), \quad u_2 = (x_2 - St)g(\xi), \quad u_3 = 0, \quad (7)$$

где $S = |\mathbf{S}| = \text{const} > c_1$ — скорость центра самоподобия подвижной системы координат O [13], связанная со скоростью любого k -го волнового фронта (рис. 1) соотношением $S = G_k / \sin \beta_k$; $f(\xi)$, $g(\xi)$ — безразмерные перемещения в автомодельном пространстве. Для параметров k -го волнового фронта (его автомодельной координаты ξ_k , скорости G_k и угла β_k) из (7) следует: $G_k = S\xi_k / (1 + \xi_k^2)^{1/2}$, $\xi_k = \text{tg} \beta_k$.

Представление (7) позволяет перейти в (1) от частных производных по x_i , t к производным по одной переменной ξ и записать уравнение движения в виде однородной

системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} A(\xi, f, g, f', g') \cdot f'' + B(\xi, f, g, f', g') \cdot g'' = 0, \\ C(\xi, f, g, f', g') \cdot f'' + D(\xi, f, g, f', g') \cdot g'' = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Система (8) имеет тривиальное решение $f(\xi) = a\xi + b$, $g(\xi) = k\xi + l$ с константами интегрирования $a = u_{1,1}$, $b = u_{1,2}$, $k = u_{2,1}$, $l = u_{2,2}$ всюду в деформируемой области, за исключением ударных волн (Σ_k) и волн Римана ($\xi_k^\pm = [\xi_k^-; \xi_k^+]$), где $AD - BC = 0$ и решение (8) нетривиально.

Возможные схемы постановки задач \mathcal{A} , \mathcal{B} на рис. 1 построены на основе перечисленных выше свойств плоских ударных волн. Автомодельные решения могут состоять из ударных волн (Σ_k) и волн Римана (ξ_k^\pm), которые включаются в постановку по принципу «или–или»:

\mathcal{A} (рис. 1,а): $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ или $\{\Sigma_1, \xi_2^\pm\}$;

\mathcal{B} (рис. 1,б): $\{\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2\}$ или $\{\Sigma_0, \Sigma_1, \xi_2^\pm\}$ или $\{\Sigma_0, \xi_1^\pm, \Sigma_2\}$ или $\{\Sigma_0, \xi_1^\pm, \xi_2^\pm\}$.

Заметим, что в задаче \mathcal{A} решения $\{\xi_1^\pm; \Sigma_2\}$, $\{\xi_1^\pm; \xi_2^\pm\}$ невозможны, т.к. на границе L задано ударное сжатие и передний фронт необходимо ударный.

Для численного решения каждой из краевых задач применяем подход, аналогичный предложенному в [12] для нелинейно-упругой среды Мурнагана. Решение, состоящее из одних только ударных волн Σ_k , находим из замкнутой системы нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных координат ударных фронтов ξ_k и всех неизвестных констант интегрирования a , b , k , l (т.е. различных постоянных значений $u_{i,j}$) во всех областях тривиального решения ($\mathcal{O}-2$ на рис. 1,а; $\mathcal{O}-3$ на рис. 1,б). Такая система строится с учетом (7) из краевых условий на границе L и соотношений на ударных волнах — условий непрерывности перемещений $[u_i] = 0$ и динамических условий совместности разрывов первого порядка (второе равенство в (3), которое при малых деформациях можно записать как $[\sigma_{ij}]n_j = -\rho_0 G[v_i]$). Затем, следуя алгоритму [12], каждую ударную волну Σ_k в полученном решении проверяем на выполнение критериев ее существования (эволюционности разрывов и неубывания энтропии [10, 11]) и при необходимости заменяем на волну Римана ξ_k^\pm . Неизвестные функции $f(\xi)$, $g(\xi)$ внутри волны Римана находим при помощи неявной разностной схемы [12] из системы ОДУ (8), переписанной на случай нетривиального решения: $Af'' + Bg'' = 0$, $AD - BC = 0$.

Численные результаты и обсуждение

Результаты серии численных экспериментов для задач \mathcal{A} и \mathcal{B} представим в графической форме. В качестве объектов исследования выбраны три материала [9] — диабаз, каменная соль и песчаник (Таблица 1).

№	Материал	λ [$\times 10^9$ Па]	μ [$\times 10^9$ Па]	ν [$\times 10^9$ Па]	α [$\times 10^9$ Па]
1	Диабаз	38.7	34.8	-4.8	-2.3
2	Каменная соль	4.8	4.7	2.1	1.2
3	Песчаник	1.78	8.70	1.35	0.48

Таблица 1. Константы упругости разномодульных сред [9]

Решение краевой задачи \mathcal{A} о бегущей нагрузке (рис. 1,а) проведено для диабазы и каменной соли (Таблица 1). Графики на рис. 2,а отражают изменение углов β_1, β_2 (т.е., фактически, положения ударных волн Σ_1, Σ_2) в зависимости от скорости движения постоянной нагрузки по границе L . Граничная нагрузка σ^* , предварительные деформации \mathbf{e}^0 и скорость точек среды \mathbf{v}^0 в зоне \mathcal{O} заданы параметрами: $\sigma_{11}^* = -0.01$ ГПа, $\sigma_{12}^* = \sigma_{21}^* = 0.003$ ГПа, $\sigma_{22}^* = 0$; $e_{11}^0 = -0.005, e_{12}^0 = e_{21}^0 = 0.0005, e_{22}^0 = 0$; $v_1^0 = v_2^0 = 0$. Скорость движения нагрузки σ^* определяется числом Маха $\mathcal{M} = S/c_1 > 1$ ($c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$), которое в численном эксперименте изменялось в диапазоне от $\mathcal{M}_{min} > 1$ до $\mathcal{M}_{max} = 2.5$. Значение \mathcal{M}_{min} , при котором существует автомодельное решение задачи \mathcal{A} с заданными краевыми условиями, определялось численно и для выбранных материалов оказалось различным: для диабазы $\mathcal{M}_{min} = \mathcal{M}_1 = 1.11$, для каменной соли $\mathcal{M}_{min} = \mathcal{M}_2 = 1.005$.

На рис. 2,б показаны типичные диаграммы распределения напряжений по зонам $\mathcal{O}-\mathcal{Z}$ в дибазе, полученные при решении задачи \mathcal{A} с указанными выше параметрами $\sigma^*, \mathbf{e}^0, \mathbf{v}^0$ и движении граничной нагрузки со скоростью $S = 1.7c_1$. Форма полученных кусочно-постоянных функций $\sigma_{11} + \sigma_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{21}$ соответствует перечисленным выше свойствам квазипродольных и квазипоперечных плоских ударных волн (а именно, соотношению на них скачков τ и γ) при плоской деформации разномодульной среды. Волновая картина $\{\Sigma_1; \xi_2^\pm\}$ с волной Римана для выбранных материалов при заданных параметрах задачи \mathcal{A} не реализовалась.

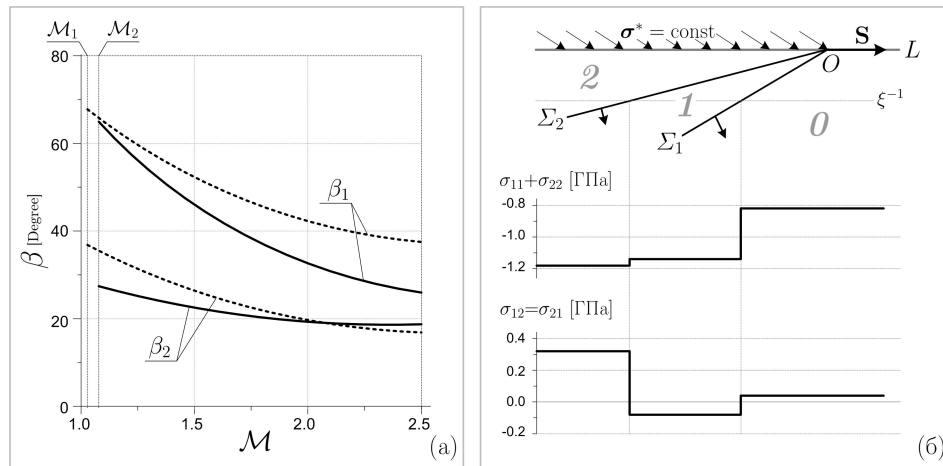


Рис. 2. Решение задачи \mathcal{A} с двумя ударными волнами Σ_1, Σ_2 : (а) графики изменения углов β_1, β_2 в зависимости от скорости движения граничной нагрузки (сплошные линии соответствуют дибазе, пунктирные — каменной соли); (б) мгновенное распределение напряжений в дибазе при $\mathcal{M} = 1.7$

На рис. 3 приведены результаты численного решения задачи \mathcal{A} для выбранных материалов, отражающие зависимость положения ударных волн (а именно, углов β_1, β_2) от нормированных параметров граничной нагрузки $\tilde{\sigma}_{11}^* = \sigma_{11}^*/(\lambda + 2\mu) < 0, \tilde{\sigma}_{21}^* = \sigma_{21}^*/(\lambda + 2\mu) > 0$. Графики β_1, β_2 на рис. 3,а построены при $|\tilde{\sigma}_{11}^*| \in [0.003; 0.06]$ и $\tilde{\sigma}_{21}^* = 0.3|\tilde{\sigma}_{11}^*|$, на рис. 3,б — при $\tilde{\sigma}_{21}^* \in [0.003; 0.06]$ и $\tilde{\sigma}_{11}^* = -0.01$.

Решение краевой задачи \mathcal{B} о выходе плоской волны ударного сжатия на жесткую границу полупространства (рис. 1,б) также построено для двух разномодульных материалов — диабазы и песчаника (Таблица 1). При этом для всей серии вычислительных

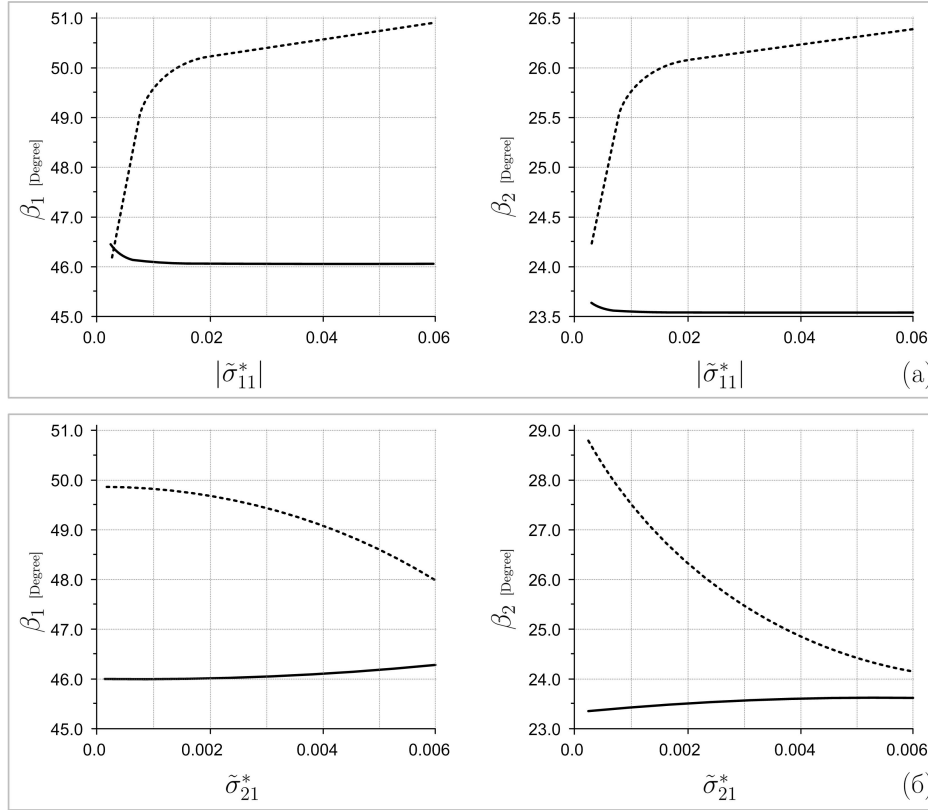


Рис. 3. Зависимость положения ударных волн от параметров граничной нагрузки в решении задачи \mathcal{A} : β_1, β_2 — углы между границей L и ударными волнами Σ_1, Σ_2 ; сплошные линии соответствуют диабазу, пунктирные — каменной соли

экспериментов задавались следующие постоянные параметры: предварительные деформации и скорость точек среды в зоне \mathcal{O} (рис. 1,б) $e_{11}^0 = 0.002, e_{12}^0 = e_{21}^0 = -0.0015, v_1^0 = v_2^0 = 0; v_1|_L = v_2|_L = 0$ на жесткой границе; нормальная и касательная интенсивности падающей волны $\tau_0 = 0.003, \gamma_0 = 0$.

Результаты численного решения задачи \mathcal{B} показаны на рис. 4 в виде зависимостей автомодельной координаты $\tilde{\xi} = \xi^{-1}$ падающей и отраженных волн от угла β_0 . Значение β_0 изменялось в диапазоне от 5° до 65° . Нетрудно видеть, что для диабаза (серые кривые) получены все возможные в решении задачи \mathcal{B} волновые картины, тогда как для песчаника (черные кривые) в заданном диапазоне изменения β_0 из четырех вариантов постановки реализовались только три (последовательно при увеличении угла β_0 : $\{\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2\}, \{\Sigma_0, \Sigma_1, \xi_2^\pm\}, \{\Sigma_0, \xi_1^\pm, \Sigma_2\}$). Кроме того, диапазоны значений β_0 , при которых в отраженном пакете возникают, например, две ударные волны, для выбранных материалов оказываются различными (это касается и остальных вариантов постановки).

Анализируя графики, представленные на рис. 2,а и рис. 4, замечаем, что решения задач \mathcal{A} и \mathcal{B} , полученные соответственно для каменной соли и песчаника, ведут себя сходным образом: изменение независимых аргументов \mathcal{M} и β_0 не приводит к существенному изменению величин $\Delta\beta = |\beta_1 - \beta_2|, \Delta\tilde{\xi} = |\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2|$. Иначе говоря, для этих

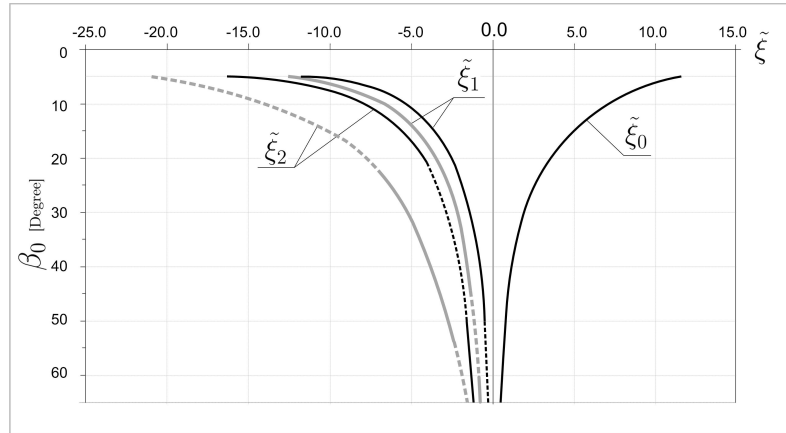


Рис. 4. Зависимость автомодельных координат волновых фронтов от угла падения β_0 в решении задачи \mathcal{B} : $\tilde{\xi} = \xi^{-1}$; $\tilde{\xi}_0$ — падающая волна ударного сжатия, $\tilde{\xi}_1$ — отраженный квазипродольный фронт, $\tilde{\xi}_2$ — отраженный квазипоперечный фронт; сплошные линии соответствуют ударным волнам, пунктирные — передним фронтам волн Римана; серый цвет графиков соответствует диабазу, черный — песчанику

материалов угол раствора зоны **1** между квазипродольной и квазипоперечной волнами на рис. 1,а и рис. 1,б слабо зависит от заданных при постановке задач значений M или β_0 . И наоборот, графики, полученные для диабаза, не позволяют сделать подобное заключение, т.к. в этом случае наблюдается явная нелинейность зависимостей $\Delta\beta(M)$ и $\Delta\tilde{\xi}(\beta_0)$. Подобные отличия можно увидеть и на рис. 3, где направления монотонного изменения функций β_1, β_2 для каменной соли и диабаза противоположны. В чем же заключается причина такого различия в поведении ударных волн при решении одних и тех же задач для разных сред? Сопоставление результатов графического анализа с параметрами выбранных разномодульных материалов (Таблица 1) позволяет нам предположить, что основным фактором здесь являются не абсолютные величины материальных констант $\lambda, \mu, \nu, \alpha$ (и их нормированных соотношений типа $\nu/(\lambda + 2\mu), \alpha/(\lambda + 2\mu)$), а знак упругих модулей ν, α , отвечающих за проявление разномодульности в тензорно-линейном варианте модели [5].

Заключение

Итак, в работе представлены результаты численного исследования особенностей распространения плоских волн деформаций в разномодульной изотропно-упругой среде [5] при условии ее плоского деформирования. На примере численного решения двумерных автомодельных задач показано, что в целом плоские волны деформаций в разномодульном материале ведут себя так же, как и в нелинейно-упругой среде [10,12] с гладкой зависимостью между напряжениями и деформациями. Серия вычислительных экспериментов, проведенных для трех различных разномодульных материалов [9], позволила заключить, что наряду с параметрам краевых условий немаловажным фактором, влияющим на решение задачи (т.е. на характер каждой из возникших волн и на всю волновую картину в целом), является знак материальных констант ν, α в добавочных неаналитических слагаемых упругого потенциала [5,9] в соотношениях (1). Также нам представляется возможным ожидать, что решения описанных автомодельных задач для любых разномодульных материалов [9] с константами $\nu > 0$,

$\alpha > 0$ будет сходно с решениями, полученным для каменной соли и песчаника, а при $\nu < 0$, $\alpha < 0$ — с решениями, построенными для диабазы. Считаем, что такой вывод в дальнейшем может послужить критерием корректности постановки и численных решений других плоских краевых задач динамики деформирования разномодульной среды [5].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Experimental investigation of the anisotropic mechanical behavior of phyllite under triaxial compression / X. Guowen, H. Chuan, S. Ang et al. // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2018. no. 104. p. 100–112.
- [2] Tien Y. M., Tsao P. F. Preparation and mechanical properties of artificial transversely isotropic rock // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2010. no. 37. p. 1001–1012.
- [3] Lomakin E. V., Fedulov B. N. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // *Meccanica*. 2015. no. 50. p. 1527–1535.
- [4] Ломакин Е. В. Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // *Физическая мезомеханика*. 2007. Т. 10, № 5. С. 41–52.
- [5] Олейников А. И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разномодульной среды // *Прикладная математика и механика*. 1993. Т. 57, № 5. С. 153–159.
- [6] Дудко О. В., Лаптева А. А., Семенов К. Т. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // *Дальневосточный математический журнал*. 2005. Т. 6, № 1-2. С. 94–105.
- [7] Gavrilov S. N., Herman G. C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodal elastic bar subjected to a harmonic loading // *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331, no. 20. P. 4464–4480.
- [8] Dudko O. V., Ragozina V. E., Lapteva A. A. Mathematical modeling the nonlinear 1D dynamics of elastic heteromodal and porous materials // *Materials Science Forum*. 2019. no. 945. P. 899–905.
- [9] Мясников В. П., Олейников А. И. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. Владивосток: Дальнаука, 2007. 172 с.
- [10] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М: Московский лицей, 1998. 412 с.
- [11] Чернышов А. Д. Об условиях распространения ударных волн в средах с упругими и пластическими свойствами // *Проблемные вопросы механики горных пород*. Алма-Ата: Наука, 1972. С. 183–192.
- [12] Потянихин Д. А. Алгоритм решения автомодельных задач динамики ударного деформирования твердого тела // *Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 8, № 2. С. 413–423.
- [13] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 8-ое, переработанное изд. М: Наука, 1977. 440 с.

O. V. Dudko, A. A. Mantsybora

NUMERICAL STUDY OF AN INFLUENCE OF MATERIAL CONSTANTS OF A HETEROMODULAR ELASTIC MEDIUM ON SOLUTIONS OF PLANE SELF-SIMILAR PROBLEMS OF SHOCK DEFORMATION

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. The paper presents the results of numerical solving 2D self-similar problems of the dynamic deformation of rocks under plane strain conditions. To describe the dynamic behavior of materials in question under the action of a shock load, a model of an isotropic-elastic heteromodal medium with a singular dependence between stresses and deformations is chosen. A series of computational experiments was carried out for various materials and parameters of the boundary conditions. As a result, it has been concluded that the sign of the material constants responding for the manifestation of different modularity in the model equations has a significant effect on the solution as a whole and the behavior of the arising deformation waves in particular.

Keywords: heteromodal elasticity, plane deformation, shock wave, Reimann wave, self-similar solution, computational experiment.

REFERENCES

- [1] Experimental investigation of the anisotropic mechanical behavior of phyllite under triaxial compression / X. Guowen, H. Chuan, S. Ang et al. // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2018. no. 104. p. 100–112.
- [2] Tien Y. M., Tsao P. F. Preparation and mechanical properties of artificial transversely isotropic rock // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2010. no. 37. p. 1001–1012.
- [3] Lomakin E. V., Fedulov B. N. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. no. 50. p. 1527–1535.
- [4] Lomakin E. V. Mechanics of media with stress-state dependent properties // Physical Mesomechanics. 2007. Vol. 7, no. 5-6. P. 255–264.
- [5] Oleinikov A. I. Fundamental general relationships for a model of an anisotropically elastic heteromodal medium // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1993. Vol. 57, no. 5. P. 913–920.
- [6] Dudko O. V., Lapteva A. A., Semyonov K. T. About distribution of flat one-dimensional waves and their interaction with barrier in the media differently reacting to a stretching and compression // Far Eastern Mathematical Journal. 2005. Vol. 6, no. 1-2. P. 94–105. (in Russian).
- [7] Gavrilov S. N., Herman G. C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodal elastic bar subjected to a harmonic loading // Journal of Sound and Vibration. 2012. Vol. 331, no. 20. P. 4464–4480.
- [8] Dudko O. V., Ragozina V. E., Lapteva A. A. Mathematical modeling the nonlinear 1D dynamics of elastic heteromodal and porous materials // Materials Science Forum. 2019. no. 945. P. 899–905.
- [9] Myasnikov V. P., Oleinikov A. I. Fundamentals of Mechanics of Heteromodal Media. Vladivostok: Dal'nauka, 2007. 172 p. (in Russian).
- [10] Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I. Nonlinear Waves in Elastic Media. New York: CRC Press, 1995. 256 p.
- [11] Chernyshov A. D. On shock wave propagation conditions in media with elastic and plastic properties // Problems of the Mechanic of Mountain Rock. Alma-Ata: Nauka, 1972. P. 183–192. (in Russian).
- [12] Potyanikhin D. A. Algorithm of the decision of automodelling problems of dynamics of shock deformation of a firm body // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. Vol. 8, no. 2. P. 413–423. (in Russian).
- [13] Sedov L. I. Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. 10th edition. New York: CRC Press, 1993. 498 p.

Dudko Olga Vladimirovna, PhD in Physical & Mathematical Sciences, Leading Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia.

Mantsybora Alexander Anatolievich, PhD in Physical & Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia.