Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 190–193

Н. В. Минаева, Д. В. Сабынин, А. И. Шашкин

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА УПРУГО ПОДКРЕПЛЕННОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ ОСНОВАНИЯ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Рассмотрен изгиб шарнирно закрепленной балки на упругом основании. Начальный прогиб и неоднородность жесткости основания заданы с точность до малых параметров. Получено условие, определяющее границу области сходимости метода малого параметра. Найдена функция, характеризующая прогиб, с точностью до величин четвертого порядка малости. Проанализирован случай, когда малые параметры являются случайными величинами.

Ключевые слова: упруго подкрепленная балка, изгиб, сходимость метода малого параметра, стохастическая неоднородность.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.64.67.020

УДК: 539.374

Рассмотрим шарнирно закрепленную балку на упругом основании. Она находится под действием продольной силы P и моментов M_i $(i = 1, 2)$, приложенных на концах балки. В качестве модели основания выбрана классическая модель однопараметрического основания Винклера [1, 2].

Прогиб балки описывается решением следующей задачи:

$$\begin{gathered} u^{(4)}(x) - f^{(4)}(x) + \alpha u''(x) + c(x)(u(x) - f(x)) = 0 \\ u(0) = u(1) = 0, \\ u''(0) - f''(0) = m_1, \quad u''(1) - f''(1) = m_2, \end{gathered} \tag{1}$$

Минаева Надежда Витальевна
`e-mail:` minaeva@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.
Сабынин Денис Викторович
`e-mail:` minaeva@yandex.ru, аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.
Шашкин Александр Иванович
`e-mail:` shashkin@amm.vsu.ru, профессор, доктор физико-математических наук, декан факультета прикладной математики информатики и механики, Воронежский государственный университет, Россия.

Поступила 20.06.2020

где $\alpha = \dfrac{Pl^2}{EI}$, $m_i = \dfrac{M_i}{EI}$. Функция начального прогиба задается функцией $f(x) = \varphi_1(x)\varepsilon_1$. Реакция упругого основания определяется как $c(x) = c_0 + +\varphi_2(x)\varepsilon_2$, где $c_0 = \dfrac{\widetilde{c}_0 l^4}{EI}$, $\widetilde{c}_0$ – коэффициент податливости основания (коэффициент постели), имеющий размерность Н/см^3 или Па/м; $\varphi_i(x)$ – заданные функции, $|\varepsilon_i| < 1$ – малые параметры (можно рассматривать и как случайные величины).

Поскольку функция начального прогиба и коэффициент постели заданы с точностью до малых параметров, то для нахождения функции прогиба воспользуемся методом возмущений [3]. Прежде, чем находить приближения, проведем исследование сходимости метода малого параметра.

Пусть при $\varphi_i(x) = 0$ задача (1) допускает решение $u = u_0(x)$. Тогда решение задачи (1) будет аналитической функцией, если оно будет непрерывно зависеть от $\varphi_i(x)$ при $\varphi_i(x) = 0$.

Для проверки этой непрерывности, как следует из [4], необходимо составить следующую задачу относительно вспомогательной функции $\zeta(x)$:

$$\begin{gathered} u^{(4)} + \zeta^{(4)} + \alpha u'' + \alpha\zeta'' + c_0 u + c_0\zeta = 0 \\ u(0) + \zeta(0) = u(1) + \zeta(1) = 0, \\ u''(0) + \zeta''(0) = m_1, \quad u''(1) + \zeta''(1) = m_2, \end{gathered} \tag{2}$$

Поскольку $u_0(x)$ – решение задачи (1), то из (2) получаем следующую задачу [5]:

$$\begin{gathered} \zeta^{(4)} + \alpha\zeta'' + c_0\zeta = 0 \\ \zeta(0) = \zeta(1) = 0, \\ \zeta''(0) = 0, \quad \zeta''(1) = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

Согласно [5], решение задачи (1) непрерывно зависит от $\varphi_i(x)$ при $\varphi_i(x) = 0$, если задача (3) имеет только тривиальное решение.

Условие существования нетривиального решения задачи (3) получено в следующем виде:

$$c_0 = n^2\pi^2\alpha - n^4\pi^4 \tag{4}$$

Это же условие будет давать границу области сходимости метода малого параметра.

При условии, что все исходные данные удовлетворяют требованиям сходимости, будем искать решение в виде ряда по малым параметрам

$$u = \sum_{i,j=0}^{\infty} u_{ij}(x)\varepsilon_1^i\varepsilon_2^j \tag{5}$$

(5) В результате подстановки в (5) были получены задачи для нахождения приближений (до четвертого порядка включительно). Для u_0 :

$$u_0^{(4)}(x) + \alpha u_0''(x) + c_0(x)u_0(x) = 0 \tag{6}$$

$$u_0(0) = u_0(1) = 0, \quad u_0''(0) = m_1, \quad u_0''(1) = m_2, \tag{7}$$

Дифференциальные уравнения для приближений u_{20}, u_{30}, u_{40} аналогичны (6), а для остальных компонент приближений отличаются только слагаемыми, характеризующимися неоднородность уравнения

$$u_{ij}^{(4)}(x) + \alpha u_{ij}''(x) + c_0(x)u_{ij}(x) = f_{ij}(x)$$

Вид функций $f_{ij}(x)$ зависит от $\varphi_i(x)$ и вида предшествующих приближений:

$$\begin{array}{lll}
f_{10}(x) = -\varphi_1^{(4)}(x) + c_0\varphi_1(x) & f_{01}(x) = -\varphi_2(x)u_0(x) & \\
f_{11}(x) = -\varphi_2(x)(\varphi_1(x) - u_{10}(x) & f_{02}(x) = -\varphi_2(x)u_{01}(x) & f_{21}(x) = -\varphi_2(x)u_{20}(x) \\
f_{12}(x) = -\varphi_2(x)u_{11}(x) & f_{22}(x) = -\varphi_2(x)u_{21}(x) & f_{03}(x) = -\varphi_2(x)u_{02}(x) \\
f_{31}(x) = -\varphi_2(x)u_{30}(x) & f_{13}(x) = -\varphi_2(x)u_{12}(x) & f_{04}(x) = -\varphi_2(x)u_{03}(x)
\end{array}$$

Граничные условия почти для всех компонент приближений аналогичны условиям из (3), и только для u_{10} имеют отличный вид:

$$u_{10}(0) = u_{10}(1) = 0, \quad u''_{10}(0) = \varphi''_1(0), \quad u''_{10}(1) = \varphi''_1(1)$$

Для оптимизации процесса нахождения приближений в аналитическом виде использовался пакет Maple. Рассматривался частный случай, когда функции, характеризующие начальный прогиб и неоднородность основания следующие $\varphi_i(x) = \sin(k_i\pi x)$. Входными данными при этом являются: α – параметр продольной силы; c_0 – коэффициент жесткости основания; m_1 и m_2 – моменты, приложенные на концах балки; k_1 и k_2 – коэффициенты, содержащиеся в функциях $\varphi_i(x)$.

Поскольку $u_{20} = u_{21} = u_{22} = u_{30} = u_{31} = u_{40} = 0$, то решение задачи (1) с точностью до величин четвертого порядка малости примет вид:

$$\begin{gathered}
u(x) = u_0(x) + u_{10}(x)\varepsilon_1 + u_{01}(x)\varepsilon_2 + u_{11}(x)\varepsilon_1\varepsilon_2 + u_{02}(x)\varepsilon_2^2 + \\
+ u_{12}(x)\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + u_{03}(x)\varepsilon_2^3 + u_{13}(x)\varepsilon_1\varepsilon_2^3 + u_{04}(x)\varepsilon_2^4
\end{gathered}$$

Если считать ε_1, ε_2 независимыми случайными величинами, то с точностью до величин четвертого порядка малости:

$$\langle u\rangle = u_0(x) + u_{02}(x)\langle\varepsilon_2^2\rangle + u_{03}(x)\langle\varepsilon_2^3\rangle + u_{04}(x)\langle\varepsilon_2^4\rangle$$

Дисперсия имеет вид:

$$D(u(x)) = D(\varepsilon_1)\left(u_{10}^2 + (u_{11}^2 + 2u_{10}u_{12})D(\varepsilon_2) + o_1(\langle\varepsilon_2^3\rangle)\right) + u_{01}^2 D(\varepsilon_2) + o_2(\langle\varepsilon_2^3\rangle)$$

где $o_i(\langle\varepsilon_2^3\rangle)$ представляют собой функции, зависящие от $\langle\varepsilon_2^3\rangle$ и математических ожиданий более высоких степеней ε_2.

Таким образом, получаем, что если проводится экспериментальное исследование поведения балки, то наличие малого начального прогиба не оказывает значительного влияния на среднестатистический результат (математическое ожидание).

Дисперсия $u(x)$, будет пропорциональна дисперсии случайной величины, характеризующей начальный прогиб. Влияние неоднородности упругого основания более значительно и носит нелинейный характер, поскольку необходимо учитывать еще дисперсии более высоких степеней ε_2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. с. 137.
[2] Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
[3] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластических деформаций. М.: Наука.
[4] Минаева Н. В. Метод возмущений в механике деформируемых тел. М.: Научная книга, 2002. 156 с.
[5] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Об устойчивости полосы при сжатии // ДАН СССР. 1961. Т. 138, № 5. С. 1047–1049.

N. V. Minaeva, D. V. Sabynin, A. I. Shashkin

INVESTIGATION OF BENDING OF AN ELASTICALLY SUPPORTED BEAM TAKING INTO ACCOUNT THE INHOMOGENEITY OF THE BASE

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The bending of a pivotally fixed beam on an elastic base is considered. The initial deflection and inhomogeneity of the base stiffness are set up to small parameters. A condition is obtained that defines the boundary of the convergence region of the small parameter method. A function describing the deflection is found up to the fourth order of smallness. The case when small parameters are random variables is analyzed.

Keywords: elastic reinforced beam, bending, convergence of the small parameter method, stochastic inhomogeneity.

REFERENCES

[1] Lomakin V. Statistical problems of solid mechanics. M.: Nauka, 1970. p. 137.
[2] Volmir A. Stability of elastic systems. M.: Fizmatgiz, 1963. 880 p.
[3] Ivlev D. D., Ershov L. V. On the stability of the band under compression // DAN SSSR. 1961. Vol. 138, no. 5. P. 1047–1049.
[4] Minaeva N. Perturbation method in the mechanics of deformable bodies. M.: Nauchnaya kniga, 2002. 156 p.
[5] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastoplastic deformations. M.: Nauka.

Minaeva Nadezhda Vital'evna, Doc. of Phys. and Math. Sc., Professor, Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia
Sabynin Denis Victorovich, Postgraduate student, Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia
Alexandr Ivanovich Shashkin, Professor, Doctor of physical and mathematical Sciences, Voronezh State University, Voronezh, Russia