Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 202–205

С. В. Фирсов

БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ С УСКОРЕНИЕМ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Рассмотрена задача деформирования цилиндрического тела вращающегося вокруг центральной оси с ускорением. Получены итоговая система уравнений, описывающая данный процесс в рамках математической модели теории больших деформаций при наличии необратимых деформаций. Рассмотрен частный случай упругого деформирования, для которого приведены выражения для расчёта напряжений и деформаций в среде, а также итоговые дифференциальные соотношения, решение которых необходимо искать.

Ключевые слова: цилиндр, вращение, большие деформации, вязкопластичность, ползучесть, упругость.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.90.56.022

УДК: 539.374

Рассмотрим деформацию цилиндра, вращающегося с ускорением. В качестве математической модели возьмём модель больших деформаций [1,2]. Рассматривать задачу будем в цилиндрических координатах r, φ, z. Материал будем считать несжимаемым. Это позволяет записать перемещения точек среды в форме

$$u_r = r\,(1 - \cos\theta)\,, \quad u_\varphi = r\sin\theta, \tag{1}$$

где $\theta = \theta\,(r, t)$ — угол поворота точек среды вокруг оси вращения.

Зная перемещения, из соотношений

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,k} v_k$$

можно найти значения скоростей

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = r\frac{\partial \theta}{\partial t} \tag{2}$$

Фирсов Сергей Викторович
`e-mail:` firsov.s.new@yandex.ru, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00038-а).

Поступила 20.06.2020

и ненулевых компонент тензора Альманси

$$d_{r\varphi} = \frac{1}{2} r\theta_{,r}, \quad d_{rr} = -\frac{1}{2} r^2\theta_{,r}^2 = -2d_{r\varphi}^2. \tag{3}$$

Ненулевые компоненты тензора скоростей деформации и тензора вихря, общий вид которых представлен в [1], в нашем случае примут значения

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2} r\dot{\theta}_{,r}, && \omega_{\varphi r} = -\omega_{r\varphi} = \dot{\theta} + \frac{1}{2} r\dot{\theta}_{,r}, \\ &z_{\varphi r} = -z_{r\varphi} = \frac{1}{2} \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{2 - e_{rr} - e_{\varphi\varphi}} r\dot{\theta}_{,r}, && r_{\varphi r} = -r_{r\varphi} = \dot{\theta} + \frac{1}{4}\left(2 + e_{rr} - e_{\varphi\varphi}\right) r\dot{\theta}_{,r}. \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения равновесия запишутся в виде

$$\sigma_{rr,r} + r^{-1}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}\right) = -\rho r\dot{\theta}^2, \quad \sigma_{r\varphi,r} + 2r^{-1}\sigma_{r\varphi} = -\rho r\ddot{\theta}. \tag{5}$$

Напряжения примут значения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= P + 2b\left(e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{zz}\right) + 2\mu e_{rr} + (5\mu - 4b)\, e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= P + 2b\left(e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{zz}\right) + 2\mu e_{\varphi\varphi} + (5\mu - 4b)\, e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{zz} &= P + 2b\left(e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{zz}\right) + 2\mu e_{zz} + (2\mu - 4b)\, e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\mu e_{r\varphi}. \end{aligned} \tag{6}$$

Подставив их в уравнения равновесия получим

$$\begin{aligned} 2\mu r^{-1}\left(e_{rr} - e_{\varphi\varphi}\right) + 2b\left(e_{rr,r} + e_{\varphi\varphi,r} + e_{zz,r}\right) + 2\mu e_{rr,r} + \\ + 2\left(5\mu - 4b\right) e_{r\varphi} e_{r\varphi,r} + P_{,r} = -\rho r\dot{\theta}^2, \\ 2\mu\left(e_{r\varphi,r} + 2r^{-1}e_{r\varphi}\right) = -\rho r\ddot{\theta}. \end{aligned} \tag{7}$$

Запишем уравнения переноса, воспользовавшись полученными ранее значениями тензоров скоростей деформаций и вихря (4). Для необратимых деформаций они примут вид

$$\begin{aligned} &\dot{p}_{rr} = \left(1 - 2p_{rr}\right)\gamma_{rr} - 2p_{r\varphi}\left(\gamma_{r\varphi} + \dot{\theta} + \frac{1}{4}\left(2 + e_{rr} - e_{\varphi\varphi}\right) r\dot{\theta}_{,r}\right), \\ &\dot{p}_{\varphi\varphi} = \left(1 - 2p_{\varphi\varphi}\right)\gamma_{\varphi\varphi} - 2p_{r\varphi}\left(\gamma_{r\varphi} - \dot{\theta} - \frac{1}{4}\left(2 + e_{rr} - e_{\varphi\varphi}\right) r\dot{\theta}_{,r}\right), \\ &\dot{p}_{zz} = \left(1 - 2p_{zz}\right)\gamma_{zz}, \\ &\dot{p}_{r\varphi} = \left(1 - p_{rr} - p_{\varphi\varphi}\right)\gamma_{r\varphi} - p_{r\varphi}\left(\gamma_{rr} + \gamma_{\varphi\varphi}\right) + \\ &\qquad + \left(p_{rr} - p_{\varphi\varphi}\right)\left(\dot{\theta} + \frac{1}{4}\left(2 + e_{rr} - e_{\varphi\varphi}\right) r\dot{\theta}_{,r}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

А для обратимых

$$\begin{aligned}
&\dot{e}_{rr} = -\left(1 - e_{rr}\right)\gamma_{rr} + e_{r\varphi}\left(\gamma_{r\varphi} - 2\dot{\theta} - \frac{1}{2}\left(3 + e_{rr} - e_{\varphi\varphi}\right) r\dot{\theta}_{,r}\right),\\
&\dot{e}_{\varphi\varphi} = -\left(1 - e_{\varphi\varphi}\right)\gamma_{\varphi} + e_{r\varphi}\left(\gamma_{r\varphi} + 2\dot{\theta} + \frac{1}{2}\left(1 + e_{rr} - e_{\varphi\varphi}\right) r\dot{\theta}_{,r}\right),\\
&\dot{e}_{zz} = -\left(1 - e_{zz}\right)\gamma_{zz},\\
&\dot{e}_{r\varphi} = -\frac{1}{2}\left(2 - e_{rr} - e_{\varphi\varphi}\right)\gamma_{r\varphi} + \frac{1}{2}e_{r\varphi}\left(\gamma_{rr} + \gamma_{\varphi\varphi}\right) + \left(e_{rr} - e_{\varphi\varphi}\right)\dot{\theta} +\\
&\qquad + \frac{1}{8}\left(4 + e_{rr} + 3e_{rr}^2 - 6e_{\varphi\varphi} - 4e_{rr}e_{\varphi\varphi} + e_{\varphi\varphi}^2\right) r\dot{\theta}_{,r}.
\end{aligned} \tag{9}$$

В итоге получаем систему из десяти дифференциальных уравнений с десятью неизвестными, где γ_{ij} — источник необратимых деформаций. Если в качестве механизма накопления необратимых деформаций рассматривать пластичность, то его можно к примеру представить в виде

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{\eta}\frac{\Sigma - \sigma_0}{\Sigma}\tau_{ij}.$$

Для ползучести можно принять

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{3}{2}B\Sigma^{n-1}\tau_{ij}.$$

Также, если мы хотим одновременно учитывать и ползучесть, и пластичность, то это можно сделать к примеру следующим образом:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v + \varepsilon_{ij}^p = \left(\frac{3}{2}B\Sigma^{n-1} + \frac{1}{\eta}\frac{\Sigma - \sigma_0}{\Sigma}\right)\tau_{ij}.$$

Рассмотрим стадию упругого деформирования. В этом случае источник необратимых деформаций γ_{ij} будет равен нулю, как и сами необратимые деформации. Из уравнений переноса (9) получим $\dot{e}_{zz} = 0$. С учётом малости деформаций при упругости положим, что слагаемые, содержащие компоненты тензора обратимых деформаций второго порядка и выше являются малы, поэтому исключим их из рассмотрения. В связи с этим можно записать, что $e_{rr} = d_{rr}$, $e_{\varphi\varphi} = d_{\varphi\varphi}$ и $e_{r\varphi} = d_{r\varphi}$. Используя это и значения компонент тензора Альманси (3) можно записать напряжения в виде

$$\sigma_{rr} = P - \left(\mu + b\right) r^2\theta_{,r}^2, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = P - br^2\theta_{,r}^2, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu r\theta_{,r}. \tag{10}$$

Подставив полученные напряжения в уравнения равновесия (5) получим

$$\begin{gathered}
\left(3\mu + 2b\right) r\theta_{,r}^2 + 2\left(\mu + b\right) r^2\theta_{,r}\theta_{,rr} = P_{,r} + \rho r\dot{\theta}^2,\\
\rho r\ddot{\theta} + 3\mu\theta_{,r} + \mu r\theta_{,rr} = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последействие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.

[2] Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Течение упруговязкопластического материала между вращающимися цилиндрическими поверхностями в условиях нежёсткого сцепления // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 56, № 2. с. 146–158.

S. V. Firsov

FINITE STRAIN OF CYLINDRICAL BODY ROTATING WITH ACCELERATION

Institute of machinery and metallurgy of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-na-Amure, Russia

Abstract. The problem of deformation of cylindrical body rotating with acceleration is considered. The system of equations describing this process in general case with non zero irreversible strains in frame of finite strain theory was obtained. A particular case of elastic deformation was considered and the resulting equations for this case was obtained.

Keywords: cylinder, rotating, finite strain, viscoplasticity, creep, elastic.

REFERENCES

[1] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Large irreversible deformations and elastic aftereffect. Vladivostok: Dalnauka, 2013. 312 p.

[2] Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. The flow of an elastic-viscoplastic material between rotating cylindrical surfaces under non-rigid adhesion // Applied Mechanics and Technical Physics. 2013. Vol. 56, no. 2. P. 146–158.

Firsov, Sergey Viktorovich, Junior Researcher of Institute of machinery and metallurgy of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-na-Amure, Russia.