

А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УПРУГОДИФФУЗИОННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Москва, Россия*

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

**Аннотация.** Исследуются нестационарные упругодиффузионные колебания ортотропной пластины Кирхгофа с учетом релаксации диффузионных потоков. В общем случае пластина находится под действием растягивающих усилий, изгибающих и крутящих моментов и перерезывающих сил. Здесь же заданы плотности диффузионных потоков. Для постановки задачи используется модель нестационарного плоского изгиба упругодиффузионной пластины Кирхгофа, полученная с помощью вариационного принципа Даламбера.

**Ключевые слова:** упругая диффузия, нестационарные задачи, связанные задачи, многокомпонентные среды, пластина Кирхгофа, функции Грина.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.12.22.025

УДК: 539.3, 539.8

**1. Формулировка проблемы.** Рассматривается задача о нестационарных упругодиффузионных колебаниях прямоугольной пластины Кирхгофа. Схема приложенных усилий, а также ориентация осей прямоугольной декартовой системы координат представлена на рисунке 1.

Для математической постановки задачи используется модель механодиффузионных процессов в однородных сплошных средах, которая в прямоугольной декартовой

---

© Земсков А. В., Тарлаковский Д. В., 2020

*Земсков Андрей Владимирович*

**e-mail:** azemskov1975@mail.ru, профессор кафедры «Прикладные программные средства и математические методы», Московский авиационный институт (национальный исследовательский институт), с.н.с. лаборатории динамических испытаний НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, д.ф.-м.н., доцент, Москва.

*Тарлаковский Дмитрий Валентинович*

**e-mail:** tdvhome@mail.ru, заведующий лабораторией динамических испытаний НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, заведующий кафедрой «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин», Московский авиационный институт (национальный исследовательский институт), д.ф.-м.н., профессор, Москва.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №20-08-00589 А).

Поступила 01.06.2020

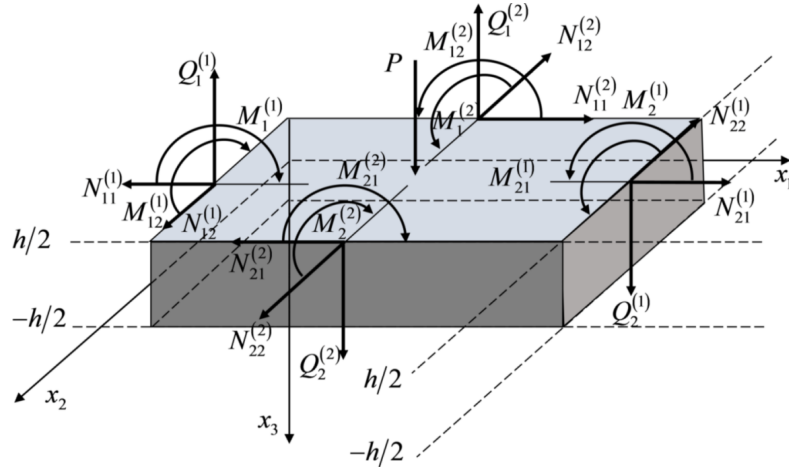


Рис. 1. Иллюстрация к постановке задачи.

системе координат имеет вид [1–9]:

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad \dot{\eta}^{(q)} = -\frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial x_i} + Y^{(q)} \quad (q = \overline{1, N}). \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  и  $J_i^{(q)}$  – компоненты тензора напряжений и вектора диффузионного потока, которые определяются следующим образом:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \sum_{p=1}^N \alpha_{ij}^{(p)} \eta^{(p)}, \quad J_i^{(q)} + \tau_q \dot{J}_i^{(q)} = \Lambda_{ijkl}^{(q)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} - \sum_{p=1}^N D_{ij}^{(q)} g^{(qp)} \frac{\partial \eta^{(p)}}{\partial x_j}. \quad (2)$$

Здесь точки обозначают производную по времени. Все величины в (1) и (2) являются безразмерными. Для них приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{x_i^*}{l}, \quad u_i = \frac{u_i^*}{l}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad C_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}^*}{C_{1111}^*}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}^*}{\rho}, \\ \alpha_{ij}^{(q)} &= \frac{\alpha_{ij}^{*(q)}}{C_{1111}^*}, \quad D_{ij}^{(q)} = \frac{D_{ij}^{*(q)}}{Cl}, \quad \Lambda_{ijkl}^{(q)} = \frac{m^{(q)} D_{ij}^{*(q)} \alpha_{kl}^{*(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0 Cl}, \quad \tau_q = \frac{C \tau^{(q)}}{l}, \\ F_i &= \frac{F_i^*}{C_{1111}^*}, \quad Y^{(q)} = \frac{l Y^{*(q)}}{C}, \quad l_m = \frac{l_m^*}{l}, \quad h = \frac{h^*}{l}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $t$  – время;  $x_i^*$  – прямоугольные декартовы координаты;  $u_i^*$  – компоненты вектора перемещений;  $l$  – диагональ пластины, которая имеет размеры  $l_1^* \times l_2^*$  и толщину  $h^*$ ;  $\eta^{(q)}$  – приращение концентрации  $q$ -ой компоненты вещества в составе  $N$ -компонентной среды;  $n_0^{(q)}$  – начальная концентрация  $q$ -го вещества;  $C_{ijkl}^*$  – компоненты тензора упругих постоянных;  $\rho$  – плотность;  $\alpha_{ij}^{*(q)}$  – коэффициенты, характеризующие объёмное изменение среды за счёт диффузии;  $D_{ij}^{*(q)}$  – коэффициенты самодиффузии;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T_0$  – температура среды;  $m^{(q)}$  – молярная масса  $q$ -го вещества;  $g^{(qp)}$  – термодинамические множители Даркена;  $\tau^{(q)}$  – время релаксации.

Начальные условия полагаем нулевыми. Для формулировки граничных условий полагаем, что область  $G$  ограничена,  $\partial G = \Pi = \Pi_u \cup \Pi_\sigma = \Pi_\eta \cup \Pi_J$  и при этом  $\Pi_u \cap \Pi_\sigma = \emptyset$  и  $\Pi_\eta \cap \Pi_J = \emptyset$ . Тогда кинематика и динамика поверхностных возмущений записывается так:

$$u_i|_{\Pi_u} = U_i, \quad \sigma_{ij}\nu_j|_{\Pi_\sigma} = P_i \quad (\tau > 0), \quad (4)$$

$$\eta^{(q)}|_{\Pi_\eta} = N^{(q)}, \quad \left( J_i^{(q)} + \tau_q j_i^{(q)} \right)|_{\Pi_J} = I_i^{(q)} \quad (\tau > 0, \quad q = \overline{1, N}). \quad (5)$$

Величины, стоящие в правых частях граничных условий – поверхностные кинематические  $U_i$ ,  $N^{(q)}$  и динамические  $P_i$ ,  $I_i^{(q)}$  возмущения,  $\nu_i$  – компоненты единичного вектора внешней нормали к  $\partial G$ .

**2. Вариационная постановка задачи** Для построения уравнений изгиба пластины используем вариационный принцип Даламбера согласно которому соотношения (1) – (5) можно записать так [10]

$$\begin{aligned} \int_G \left( \ddot{u}_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - F_i \right) \delta u_i dG + \sum_{q=1}^N \int_G \left( 1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \dot{\eta}^{(q)} + \frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial x_i} - Y^{(q)} \right) \delta \eta^{(q)} dG + \\ + \iint_{\Pi_\sigma} (\sigma_{ij}\nu_j - P_i) \delta u_i dS + \sum_{q=1}^N \iint_{\Pi_J} \left( J_i^{(q)} + \tau_q j_i^{(q)} - I_i^{(q)} \right) \nu_i \delta \eta^{(q)} dS = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\delta u_i$  и  $\delta \eta^{(q)}$  – виртуальные перемещения и приращения концентраций.

Далее полагаем, что:

1. Область решения задачи – прямоугольный параллелепипед  $G = D \times [-h/2, h/2]$ , где  $D = [0, l_1] \times [0, l_2]$  – прямоугольная область занятая срединной поверхностью пластины  $x_3 = 0$ ,  $\Gamma = \partial D$  – граница срединной поверхности (рис. 1)
2. Поверхность пластины  $\Pi = \Pi_- \cup \Pi_+ \cup \Pi_b$ , где  $\Pi_-$  – нижняя поверхность, соответствующая  $x_3 = -h/2$ ,  $\Pi_+$  – верхняя поверхность, соответствующая  $x_3 = h/2$ ,  $\Pi_b = \Pi_{11} \cup \Pi_{21} \cup \Pi_{12} \cup \Pi_{22}$  – боковая поверхность. Поверхности  $\Pi_{1k}$  соответствуют  $x_k = 0$ , поверхности  $\Pi_{2k}$  соответствуют  $x_k = l_k$ ,  $k = 1, 2$ . Предполагается, что верхняя и нижняя поверхности свободны от механических нагрузок и массоперенос через них отсутствует, т.е.

$$\sigma_{ij}\nu_j|_{\Pi_-} = \sigma_{ij}\nu_j|_{\Pi_+} = 0, \quad \left( J_i^{(q)} + \tau_q j_i^{(q)} \right)|_{\Pi_-} = \left( J_i^{(q)} + \tau_q j_i^{(q)} \right)|_{\Pi_+} = 0. \quad (7)$$

3. материал пластины ортотропный. Для записи физических постоянных срезы будем использовать нотацию Фойгта. Так же, полагаем, что точки зрения явления массопереноса материал пластины идеальный твердый раствор [1, 2, 8, 9]

$$g^{(qr)} = \delta_{qr} \Rightarrow D_{ij}^{(q)} g^{(qr)} = D_{ij}^{(q)} = D_q. \quad (8)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

4. Поперечные прогибы пластины считаются малыми. Тогда линейаризация искомых величин по переменной  $x_3$  будет иметь вид (приближенное равенство заменяется точным)

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2, x_3, \tau) &= u(x_1, x_2, \tau) - x_3 \chi_1(x_1, x_2, \tau), \\
u_2(x_1, x_2, \tau) &= v(x_1, x_2, \tau) - x_3 \chi_2(x_1, x_2, \tau), \\
u_3(x_1, x_2, \tau) &= w(x_1, x_2, \tau) + x_3 \psi(x_1, x_2, \tau), \\
\eta^{(q)} &= N_q(x_1, x_2, \tau) + x_3 H_q(x_1, x_2, \tau).
\end{aligned} \tag{9}$$

5. Считаем также, что прямолинейное, нормальное к срединной поверхности волокно после деформации также остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности (пластина Кирхгофа). С учетом (7) будем предполагать, что деформации вдоль оси  $Ox_3$  отсутствуют. Тогда

$$\varepsilon_{i3} = 0 \quad (i = \overline{1, 3}) \Rightarrow \psi = 0, \quad \chi_k = \frac{\partial w}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2. \tag{10}$$

Следовательно

$$u_1 = u - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = v - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w. \tag{11}$$

На основании сформулированных гипотез, компоненты тензора напряжений и вектора диффузионного потока в (2) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + C_{12} \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - \sum_{q=1}^N \alpha_1^q (N_q + x_3 H_q), \\
\sigma_{22} &= C_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + C_{22} \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - \sum_{q=1}^N \alpha_2^q (N_q + x_3 H_q), \\
\sigma_{33} &= C_{13} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + C_{23} \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - \sum_{q=1}^N \alpha_3^q H_q,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= C_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} - 2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right), \\
\sigma_{13} &= C_{55} \left( -\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) = 0, \quad \sigma_{23} = C_{44} \left( -\frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_1^{(q)} + \tau_q \dot{J}_1^{(q)} &= -D_1^q \left( \frac{\partial N_q}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial H_q}{\partial x_1} \right) + \\
&+ \Lambda_{11}^q \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - x_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} \right) + \Lambda_{12}^q \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - x_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right), \\
J_2^{(q)} + \tau_q \dot{J}_2^{(q)} &= -D_2^q \left( \frac{\partial N_q}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial H_q}{\partial x_2} \right) + \\
&+ \Lambda_{21}^q \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - x_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) + \Lambda_{22}^q \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - x_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \right), \\
J_3^{(q)} + \tau_q \dot{J}_3^{(q)} &= -D_3^q H_q - \Lambda_{31}^q \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \Lambda_{32}^q \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \quad (q = \overline{1, N}).
\end{aligned}$$

где

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\alpha\beta\beta}, \quad C_{66} = C_{1212}, \quad D_\alpha^q = D_{\alpha\alpha}^q, \quad \alpha_\alpha^q = \alpha_{\alpha\alpha}^q, \quad \Lambda_{\alpha\beta}^q = \Lambda_{\alpha\alpha\beta\beta}^q.$$

**3. Модель упругодиффузионной пластины Кирхгофа** Далее подставляем (11) и найденные значения компонент тензора напряжений и вектора диффузионного потока (12) в функционал (6). Используя необходимое условие экстремума функционала, получаем следующие краевые задачи:

- задача относительно продольных деформаций пластинки

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \sum_{r=1}^N \alpha_1^r \frac{\partial N_r}{\partial x_1} + \frac{n_1}{h}, \\ \ddot{v} &= (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \sum_{r=1}^N \alpha_2^r \frac{\partial N_r}{\partial x_2} + \frac{n_2}{h}, \\ \dot{N}_q + \tau_q \ddot{N}_q &= D_1^q \frac{\partial^2 N_q}{\partial x_1^2} + D_2^q \frac{\partial^2 N_q}{\partial x_2^2} - \\ &- \Lambda_{11}^q \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - \Lambda_{12}^q \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \Lambda_{21}^q \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \Lambda_{22}^q \frac{\partial^3 v}{\partial x_2^3} + \frac{y^{(q)}}{h}, \end{aligned} \quad (13)$$

- задача относительно прогибов пластинки

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x_1^2} + \frac{\ddot{w}}{\partial x_2^2} - \frac{12}{h^2} \ddot{w} &= \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2(C_{12} + 2C_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + C_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + \\ &+ \sum_{q=1}^N \left( \alpha_1^q \frac{\partial^2 N_q}{\partial x_1^2} + \alpha_2^q \frac{\partial^2 N_q}{\partial x_2^2} \right) - \frac{12}{h^3} \left( \frac{\partial^2 m_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 m_2}{\partial x_2^2} + q \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\dot{H}_q + \tau_q \ddot{H}_q = D_1^q \frac{\partial^2 H_q}{\partial x_1^2} + D_2^q \frac{\partial^2 H_q}{\partial x_2^2} + \Lambda_{11}^q \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + (\Lambda_{12}^q + \Lambda_{21}^q) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \Lambda_{22}^q \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + \frac{12}{h^3} z_q.$$

Здесь:

1.  $\int_{-h/2}^{h/2} F_1 dx_3 = n_1$  и  $\int_{-h/2}^{h/2} F_2 dx_3 = n_2$  – распределённые по поверхности продольные нагрузки,
2.  $\int_{-h/2}^{h/2} x_3 F_1 dx_3 = m_1$  и  $\int_{-h/2}^{h/2} x_3 F_2 dx_3 = m_2$  – распределённые по поверхности моменты,
3.  $\int_{-h/2}^{h/2} F_3 dx_3 = q$  – распределённая по поверхности поперечная нагрузка,
4.  $\int_{-h/2}^{h/2} Y^{(q)} dx_3 = y_q$  – распределённая по поверхности плотность объемных источников массопереноса,
5.  $\int_{-h/2}^{h/2} Y^{(q)} x_3 dx_3 = z_q$ .

Полученные уравнения дополняем граничными условиями, которые также получаются из вариационного уравнения (6). Например, для задачи об изгибе свободно опертой пластины под действием пар изгибающих моментов  $M_k^{(1)}$  и  $M_k^{(2)}$ ,  $k = 1, 2$  (рис. 1) они имеют вид

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_1^q H_q \right) \Big|_{x_1=0} &= -\frac{12}{h^3} M_1^{(1)}(x_2, \tau), \\ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_1^q H_q \right) \Big|_{x_1=l_1} &= -\frac{12}{h^3} M_2^{(1)}(x_2, \tau); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\left( C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_2^q H_q \right) \Big|_{x_2=0} = -\frac{12}{h^3} M_1^{(2)}(x_1, \tau),$$

$$\left( C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_2^q H_q \right) \Big|_{x_2=l_2} = -\frac{12}{h^3} M_2^{(2)}(x_1, \tau);$$

$$H_q|_{x_1=0} = H_{q1}^{(1)}(x_2, \tau), \quad H_q|_{x_1=l_1} = H_{q2}^{(1)}(x_2, \tau),$$

$$H_q|_{x_2=0} = H_{q1}^{(2)}(x_1, \tau), \quad H_q|_{x_2=l_2} = H_{q2}^{(2)}(x_1, \tau);$$

$$w|_{x_1=0} = W_1^{(1)}(x_2, \tau), \quad w|_{x_1=l_1} = W_2^{(1)}(x_2, \tau),$$

$$w|_{x_2=0} = W_1^{(2)}(x_1, \tau), \quad w|_{x_2=l_2} = W_2^{(2)}(x_1, \tau).$$

Решения полученных задач ищутся с помощью метода функций Грина, для нахождения которых используется преобразование Лапласа и разложение в тригонометрические ряды Фурье.

**4. Заключение.** Таким образом, на основании известных линейных моделей механо-dиффузии сплошных сред, в совокупности с гипотезами теории пластин и оболочек, с помощью вариационного принципа Даламбера получена модель нестационарных упругодиффузионных колебаний пластины Кирхгофа. Показано, что так же как и в классической теории упругости, механо-dиффузионная модель пластины Кирхгофа состоит из двух независимых начально-краевых задач относительно продольных и относительно поперечных колебаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Еремеев В.С. Диффузия и напряжения. М.: Энергоатомиздат, 1984. 182 с.
- [2] Князева А.Г. Введение в термодинамику необратимых процессов. Томск: Изд-во «Иван Федоров», 2014. 172 с.
- [3] Aouadi M., Copetti M. I. M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two steps in thermoelastic diffusion theory // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2015. P. 1-24.
- [4] Deswal S., Kalkal K. A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion // International Journal of Thermal Sciences. 2011. Vol. 50, No. 5. P. 749-759.
- [5] Elhagary M.A. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating // Acta Mech. 2013. Vol. 224. P. 3057-3069
- [6] Kumar R., Kothari S., Mukhopadhyay S. Some theorems on generalized thermoelastic diffusion // Acta Mech. 2011. Vol. 217. P. 287-296
- [7] Sherief H.H., El-Maghraby N.M. A Thick Plate Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // Int J Thermophys. 2009. Vol. 30. P. 2044-2057
- [8] Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для изотропной однокомпонентной полуплоскости // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2015. Т. 157, Кн. 4. С. 103-111.
- [9] Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Two-dimensional nonstationary problem elastic for diffusion an isotropic one-component layer // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. Vol. 56, No. 6. P. 1023-1030.
- [10] Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V. An Elastodiffusive Orthotropic Euler-Bernoulli Beam with Considering Diffusion Flux Relaxation // Math. Comput. Appl. 2019. 24, 23;

A. V. Zemskov, D. V. Tarlakovskii

**PROBLEM FORMULATION OF A RECTANGULAR ORTHOTROPIC  
ELASTODIFFUSIVE KIRCHHOFF PLATE VIBRATIONS**

*Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

**Abstract.** We study unsteady elastic diffusion vibrations of a rectangular orthotropic Kirchhoff plate in the presence of diffusion fluxes relaxation. In general formulation the plate is subjected to tensile and shear forces as well as bending moments and torque. The unsteady model of an elastodiffusive Kirchhoff plate is obtained using the d'Alembert variational principle.

**Keywords:** elastic diffusion, coupled problem, unsteady problem, multicomponent continuum, Kirchhoff plate, Green's function.

**REFERENCES**

- [1] Eremeev V.S. Diffusion and Stress), Moscow: Energoatomizdat, 1984.
- [2] Knyazeva A.G. Introduction to the thermodynamics of irreversible processes. Tomsk: Publishing house "Ivan Fedorov 2014. 172 p.
- [3] Aouadi M. Copetti M. I. M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2015. P. 1-24.
- [4] Deswal S., Kalkal K. A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion // International Journal of Thermal Sciences. 2011. Vol. 50, No. 5.P. 749-759.
- [5] Elhagary M.A. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating // Acta Mech. 2013. Vol. 224. P. 3057-3069
- [6] Kumar R., Kothari S., Mukhopadhyay S. Some theorems on generalized thermoelastic diffusion // Acta Mech. 2011. Vol. 217. P. 287-296
- [7] Sherief H.H., El-Maghraby N.M. A Thick Plate Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // Int J Thermophys. 2009. Vol. 30. P. 2044–2057
- [8] Zemskov A.V., Tarlakovsky D.V. Two-dimensional non-stationary problem of elastic diffusion for an isotropic one-component half-plane // Uchenye zapiski Kazan University. Series Physics and Mathematics. 2015.Vol. 157, Book. 4.S. 103-111.
- [9] Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Two-dimensional nonstationary problem elastic for diffusion an isotropic one-component layer // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. Vol. 56, No. 6.P. 1023-1030.
- [10] Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V. An Elastodiffusive Orthotropic Euler-Bernoulli Beam with Considering Diffusion Flux Relaxation // Math. Comput. Appl. 2019.24, 23;

---

*Zemskov, Andrei V.* Professor, Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), Senior Researcher of Dynamic Testing Laboratory, Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Doctor of Physics and Mathematics Science, assistant professor, Moscow.

*Tarlakovskii, Dmitry V.* Head of Dynamic Testing Laboratory, Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Head of the Department of materials resistance, dynamics and machine strength, Moscow Aviation Institute (National Research University), Doctor of Physics and Mathematics Science, professor, Moscow.