Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 229–237

В. И. Штука

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНТЕНСИВНОГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ, ЗАПОЛНЕННОГО НЕСЖИМАЕМЫМ ИЗОТРОПНЫМ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИМ МАТЕРИАЛОМ

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток, Россия

Аннотация. На примере нескольких задач о нагружении упруговязкопластического и термоупругого цилиндрических слоёв с предварительными деформациями показаны основные моменты, на которые следует обратить внимание при комплексном моделировании отклика на существенно нестационарное воздействие термоупругой несжимаемой среды с вязкопластическими свойствами. Отмечены нюансы, касающиеся употребления соотношений теории больших упругопластических деформаций, применения метода лучевых рядов и использования специальных схем численных расчётов. Представлены зависимости скачков температуры и добавочного давления на плоскополяризованных поверхностях сильного разрыва, определены скорости волн нагрузки и круговой поляризации.

Ключевые слова: термоупругость, вязкопластичность, ударные волны, конечные деформации, лучевой метод.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.16.30.026

УДК: 539.374

Введение и постановка задачи *Пластичность – свойство твёрдых тел приобретать остаточные деформации* – так начинается первая глава книги, выпущенной в соавторстве Геннадием Ивановичем Быковцевым и Дюисом Даниловичем Ивлевым [10], где были представлены и изложены основы одного из наиболее развитых разделов механики деформируемого твёрдого тела – теории пластичности. Их труд поражает своей монументальностью и заделом на будущее, который до сих пор ещё до конца не исчерпан в части решения существенно нестационарных задач. Даже несмотря на то, что отдельный раздел в этой книге посвящён кинематическим и геометрическим условиям совместности на поверхностях разрывов, определению δ-производной

Штука Виктор Игоревич
`e-mail:` onslice@mail.ru, доцент кафедры математики и моделирования, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток, Россия.

Поступила 01.06.2020

и их расширениям, количество решённых задач ударного деформирования ограничивается сравнительно небольшим числом.

Применение одной из разработанных их учениками и последователями теорий необратимого деформирования [4], характеризующейся отказом от предположения малости как обратимых, так и необратимых деформаций, нашлось в расчётах конкретных краевых задач [13], [16]. В этих работах решались одномерные задачи, когда слой несжимаемой упруговязкопластической среды, ограниченный снаружи и изнутри соосными бесконечными цилиндрическими обоймой и валом радиуса R и r_0 соответственно (на границах которых выполнялись условия жёсткого закрепления), подвергался ударному нагружению (рис. 1).

Подобного рода постановки свойственны аппарату вискозиметрии, когда в пространство между двумя жёсткими цилиндрическими поверхностями (приборы Куэтта-Хатчека и Сирля) помещают исследуемый образец и подвергают его физическим воздействиям [15], [17]. Точки среды при этом способны двигаться по винтовым траекториям, подчиняясь следующему закону

$$u_r = r(1 - \cos\psi(r,t)), \quad u_\varphi = r\sin\psi(r,t), \quad u_z = u(r,t),$$

где функция крутки ψ определяет центральный угол поворота точки относительно её первоначального состояния, а функция аксиального смещения u – изменение её положения относительно образующей, параллельной оси $z = x_3$. Распределение предварительных деформаций в [13], [16] определяется решением соответствующей статической задачи с тем лишь условием, что до момента начала нагружения ($t \leq 0$) слой пребывает в состоянии нейтрального нагружения. При этом граница ядра вязкопластического течения будет находиться на внутреннем цилиндре, поскольку внешний будет зафиксирован, а процесс ударного нагружения определён граничными условиями, задающими (для примера) предварительную крутку (тоже, соответствующую ей деформацию $e_{r\varphi}$) и смещающее ударное воздействие со стороны вала на внутреннюю границу слоя

$$\begin{gathered}\psi(r_0,t) = \psi_0, \quad \psi(R,t) = 0,\\ u(r_0,t) = u_1 t + u_2 t^2, \quad u(R,t) = 0.\end{gathered}$$

Между тем, в других работах [18], [20] вязкопластические свойства не принимались в расчёт для того, чтобы выявить взаимосвязь лишь температурных и механических эффектов, поэтому следующим логическим и естественным шагом является комплексное моделирование задач с учётом как реологических, так и тепловых свойств.

Расширением привычного набора уравнений модели несжимаемого твёрдого тела в переменных Эйлера x_i $(i = 1, 2, 3)$

$$\begin{gathered}\sigma_{ij,j} = \rho\left(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j\right), \quad \rho T\frac{ds}{dt} + q_{k,k} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^p,\\ \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}\left(\delta_{kj} - e_{kj}\right) - p\delta_{ij} \quad \text{при} \quad p_{ij} \neq 0,\\ \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}\left(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}\right) - p\delta_{ij} \quad \text{при} \quad p_{ij} = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

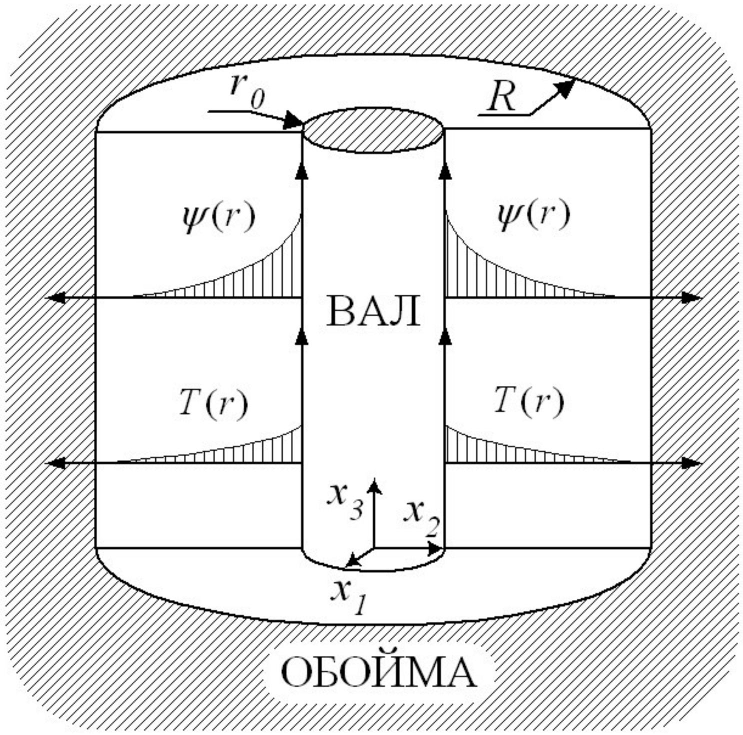

Рис. 1. Схематическое изображение постановки задачи

является её дополнение соотношениями теории больших необратимых деформаций [4] вида

$$\begin{gathered}
\alpha_{ij} = \left(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}\right)/2 = e_{ij} + p_{ij} - e_{ik}e_{kj}/2 - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{kl}e_{lj},\\
v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad Dp_{ij}/Dt = \varepsilon^p_{ij} + r_{ik}\varepsilon^p_{kj} + \varepsilon^p_{ik}r_{kj}, \quad r_{ij} = \left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)/2 + A^{-1}\times\\
\times\left(B^2(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj}) + B(\varepsilon_{ik}e_{kl}e_{lj} - e_{ik}e_{kl}\varepsilon_{lj}) + e_{ik}\varepsilon_{kl}e_{ln}e_{nj} - e_{ik}e_{kl}\varepsilon_{ln}e_{nj}\right), \qquad (2)\\
A = 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \left(E_1^3 - E_3\right)/3, \quad B = 2 - E_1,\\
E_1 = e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki},
\end{gathered}$$

где σ_{ij}, α_{ij} – компоненты тензоров напряжений Коши-Эйлера, полных деформаций Альманси; e_{ij}, p_{ij} – обратимых и необратимых деформаций; ε^p_{ij} – скорости необратимых деформаций; u_i, v_i, q_i – векторов перемещения, скорости и теплового потока; p, T – добавочное давление и температура, входящая в уравнение баланса энтропии s; $\rho = const$ – плотность среды. Символом D/Dt обозначена объективная производная (согласно [4]), индекс после запятой в системах (1) и (2) обозначает частную производную по соответствующей координате, точка над символом – по времени.

Определяющим звеном математической модели является упругий потенциал изотропной среды W, записанный в виде ряда Маклорена относительно свободного состояния

$$\begin{gathered}
W(A_1, A_2, T) = -2\mu A_1 + bA_1^2 - \mu A_2 - aA_1^3 - (\mu - b)A_1A_2 +\\
+\nu T(1 - \ln(T/T_0)) - \chi T A_1 + ..., \quad A_1 = \alpha_{kk}, \quad A_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji},
\end{gathered}$$

где μ, a, b, ν и χ– термоупругие модули. Кроме того, важно ещё знание вектора теплового потока, который может подчиняться как классическому закону теплопроводности Фурье, так и быть обусловленным специфическими требованиями, приводящими систему дифференциальных уравнений (1) и (2) к гиперболическому виду и тем самым обуславливая конечность скорости распространения тепла [5].

Условия совместности и ударные волны Основной сложностью при моделировании существенно нестационарных процессов, когда нет возможности обратиться к свойству автомодельности системы дифференциальных уравнений или квазистатической формулировке самой задачи, является возникновение и распространение поверхностей разрывов деформаций (ударных волн), скорости которых отличаются от скорости распространения возмущений.

В рассматриваемой постановке динамические условия совместности на поверхностях разрывов представлены следующими выражениями

$$[\sigma_{ij}]n_j = \rho(v_k^+ n_k - G)[v_i], \quad (v_k^+ n_k - G)\left([W] + \rho[v_k][v_k]/2\right) + [q_k]n_k = \sigma_{ij}^+[v_i]n_j, \tag{3}$$

которые с учётом условий Адамара [10] сводятся к системе четырёх уравнений, два из которых необходимы для выражения разрывов температуры и добавочного давления

$$\begin{gathered}[T] = \frac{d}{\nu}\frac{3\gamma[m^2]/2 + [m^3]/8}{1 - 2g_3\gamma}, \quad \gamma = \frac{[m]}{4}\frac{e_{r\varphi}^+ - [e_{r\varphi}]}{[e_{r\varphi}]}, \quad m = (2e_{r\varphi}^+)^2 + (2e_{rz}^+)^2, \\ [p] = -\frac{\mu + b + 2\chi T}{2}[m] - \frac{3}{4}d\left([m^2] + [m^3]\right) - \chi\left(1 + m^+ - [m]\right)[T],\end{gathered} \tag{4}$$

а оставшиеся два для определения типов плоскополяризованных ударных волн и их скоростей. В (3), и (4) квадратными скобками обозначена величина разрыва функции $[f]$, определяющаяся разностью значений функции f на ударной волне спереди – f^+ (далее " + " опускается) и сзади – f^-.

Тождество, из которого получается сделать заключение о типах ударных волн, с учётом того, что пластические деформации являются непрерывными ($[p_{ij}] = 0$) [1], имеет вид

$$\begin{gathered}[h]\left(e_{r\varphi}[v_z] - e_{r_z}[v_\varphi]\right) = 0, \quad h = C^2\left(1 + g_1 m^2 + g_2 T + ...\right), \\ C = \sqrt{\mu/\rho}, \quad g_1 = 3(\mu + a - b)/4\mu, \quad g_2 = \chi/\mu.\end{gathered} \tag{5}$$

Из (5) на первой поверхности сильных разрывов Σ_1, как было определено ранее [13], [16] происходит увеличение предварительного сдвига ($e_{r\varphi}[v_z] = e_{rz}[v_\varphi]$), а на второй поверхности сильных разрывов Σ_2 изменяется лишь его направленность ($[m] = 0$). Называются эти поверхности соответственно волной нагрузки и волной круговой поляризации и имеют достаточно существенные различия при наличии предварительных деформаций, поскольку при их отсутствии теоретически в несжимаемой среде возможно распространение лишь одной ударной волны (наличие предварительного градиента температуры роли здесь не играет). Из выражений (4) следует, что Σ_2 является ещё и изотермической ($[T] = 0$) ударной волной. Этой особенности лишена волна нагрузки, на которой согласно (4) происходит скачок температуры, а также добавочного давления. Эти же зависимости показывают, что основными на ударных волнах являются интенсивности разрывов обратимых деформаций, а скачки температуры и добавочного давления являются производными величинами.

Термодинамическое условие совместности в несжимаемых средах заранее определяет порядок следования плоско-поляризованных ударных волн, чего нельзя сказать о квазипоперечных ударных волнах, распространяющихся в сжимаемых средах. Нормированные скорости распространения волн нагрузки и круговой поляризации определены из (3) с учётом (5) выражениями ($g_3 = \chi/\nu$)

$$
\begin{gathered}
G_1/C = 1 + \frac{1}{2}g_2T + g_1m^2 - \frac{1}{8}g_3m + \frac{1}{4}\frac{m^2}{e_{r\varphi}^2}[e_{r\varphi}]\times \\
\times\left(g_3\left(1 + g_2T + g_1m^2\right) - e_{r\varphi}\left(\frac{3}{4}g_2T + 5g_1m - \frac{7}{4}g_1g_3m^2\right) + \ldots\right), \\
G_2/C = 1 + \frac{1}{2}g_2T + \frac{1}{2}g_1m^2 + \frac{1}{4}\frac{m^2}{e_{r\varphi}^2}[e_{r\varphi}]\times \\
\times\left(g_3\left(1 + g_2T + g_1m^2\right) - e_{r\varphi}\left(\frac{1}{2}g_2T + 2g_1m - \frac{1}{2}g_1g_3m^2\right) + \ldots\right).
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Вид выражений (6) свидетельствует о том, что большим предварительным деформациям, а также температурам и интенсивностям волны нагрузки ($[e_{r\varphi}]$ и $[m]$) соответствуют большие скорости распространения Σ_1 и Σ_2.

Несмотря на различия, определённые при моделировании несжимаемых сред с различными свойствами [19] следует заметить, что скорости ударных волн, распространяющихся как в чисто упругих, так и в термоупругих средах с вязкопластическими свойствами, определяются именно обратимыми и предварительными деформациями [3], а также температурой, если изотермичностью процесса нельзя пренебречь.

Лучевой метод и численное моделирование Выражения (6) ввиду зависимостей от интенсивностей ударных волн вынуждают использовать аппарат нелинейного лучевого метода из-за незамкнутости системы дифференциальных уравнений относительно интенсивностей разрывов старших порядков. Предложенный ранее независимо друг от друга Дж. Ахенбахом с Д. Рэдди [21] и Г. И. Быковцевым с учениками [1] классический вариант лучевого метода для задач с ударными волнами не подходит, поэтому необходимо пользоваться его расширенной версией, впервые предложенной А. А. Бурениным и Ю. А. Россихиным в работе [7], а затем описанную в [9], с целью преодоления этой особенности. Суть предложения состоит в использовании дополнительных разложений разрывов неизвестных функций, определённых на ударных волнах, с тем, чтобы перевести незамкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений в замкнутую систему нелинейных алгебраических соотношений. Для этого необходимо записать уравнения движения и теплопроводности (1) в разрывах и применить к ним аппарат нелинейного лучевого метода [9]. Этот приём позволяет уже три десятка лет справляться с "неразрешимыми"для 80-х годов прошлого века задачами.

Решение системы уравнений движения и теплопроводности (1) в разрывах и её дискретизированного аналога позволяет вычислять значения искомых функций в окрестности поверхностей разрывов для существенно больших времён, чем предполагает использование одного лишь аналитического решения, полученного с помощью лучевого метода. Неявная монотонная схема с центральными разностями, подробно описанная в [8], устойчива и имеет хорошую сходимость. Сохранение самого понятия разрыва при этом позволяет определять поля напряжений, обратимых и необратимых деформаций, а также распределение температуры за приемлемое время, которое может быть уменьшено в разы при использовании современного аппарата распараллеливания вычислений.

Заключение Учёт вязкопластических и термоупругих свойств материалов важен не только для теоретических, но и для инженерных расчётов. Обратимые деформации существенно влияют на картину распределения остаточных напряжений по завершению технологических процессов [6], а при моделировании динамического нагружения важен как учёт вязкости [11], так и температуры, которые естественным образом сказываются на решении, формируя диссипативные явления за ударными волнами и приводя, в конечном итоге, к размытию разрыва, выступая опосредованным источником необратимых деформаций.

Обратившись к работам Чжу Бо-Те [22], Ю. А. Россихина и М. В. Шитиковой [23], В. А. Баскакова и М. С. Чирко [2], следует заметить, что в основном решение динамических краевых задач производилось в рамках физически линейной среды, поэтому для моделирования сред нелинейных при отказе от предположений малости как обратимых, так и необратимых деформаций, необходимо использовать некоторый критерий разделения полных деформаций. Вид этого критерия обусловлен произволом конструктора математической модели упруговязкопластической среды [4], [14].

Применение модели больших необратимых деформаций, свободной от ограничений величин деформаций (как, например, теория Прандтля-Рейса) и имеющей ряд отличий от деформационной теории пластичности [12], позволило произвести всю совокупность расчётов, чтобы определить напряжённо-деформированное состояние за распространяющимися криволинейными поверхностями сильных разрывов в цилиндрическом слое с предварительными деформациями. Учёт температурных эффектов, как было показано выше, не представляет при этом особенной сложности, но позволит получить решение задачи определение отклика на существенно нестационарные граничные неизотермические воздействия цилиндрического слоя, заполненного несжимаемым упруговязкопластическим материалом даже в случае гиперболической теории теплопроводности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д. Лучевой метод решения задач в упруго-вязкопластических средах // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. № 1. С. 145-155.

[2] Баскаков В. А., Чирко М. С. К изучению свойств сильных разрывов в нелинейной термоупругой среде // Механика деформируемых сред. Куйбышев: Изд-во Куйбышевского университета. 1979. Вып. 4. С. 26-40.

[3] Безгласный П. А., Вервейко Н. Д. Лучевой метод решения задач в упруго-вязко-пластических средах // Механика твёрдого тела. 1971. № 5. С. 71-76.

[4] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последействие. Владивосток : Дальнаука, 2013. 312 с. ISBN 978-5-8044-1423-9.

[5] Буренин А. А. К построению теории термоупругости при конечной скорости распространения тепла // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре технического университета. 2018. № IV-1(36). С. 47-53.

[6] Буренин А. А., Устинова А. С. Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчётом упругого отклика после остановки течения и разгрузки // Успехи механики сплошных сред. К 70-летию В. А. Левина. Владивосток: Дальнаука. 2009. С. 91-102.

[7] Буренин А. А., Россихин Ю. А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями разрывов // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток: ДВО АН СССР. 1991. С. 129-137.

[8] Буренин А. А., Севастьянов Г. М., Штука В. И. О выделении разрывов в расчётах динамики несжимаемой упругой среды // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 4. С. 400-411.

[9] Буренин А. А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях // Дальневосточный математический сборник. 1999. Вып. 8. С. 49-72.

[10] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток : Дальнаука, 1998. 528 с. ISBN 5-7442-0586-1.

[11] Зволинский Н. В., Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Динамика деформируемых твёрдых тел // В кн. : Механика в СССР за 50лет. Т. 3. Механика деформируемого твёрдого тела. М. : Наука, 1972. С. 291-323.

[12] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М. : Физматлит, 2001. 704 с.

[13] Ковтанюк Л. В., Штука В. И. Исследование цилиндрических ударных волн в упруговязкопластических несжимаемых телах с помощью метода лучевых рядов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 2(32). С. 118-134.

[14] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М. : Физматлит, 2013. 319 с. ISBN 978-5-9221-1409-7.

[15] Рейнер М. Реология. М. : Наука, 1965. 224 с.

[16] Севастьянов Г. М., Ковтанюк Л. В., Штука В. И. Одномерные цилиндрические ударные волны в условиях нагрузки, вызывающей вязкопластическое течение // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2018. Т. 1. № 4(36). С. 40-46.

[17] Шрамм Г. Основы практической реологии и реометрии / Пер. с англ. И. А. Лавыгина. М. : КолосС, 2003. 321 с.

[18] Штука В. И. Особенности применения лучевого метода при решении нестационарных задач связанной термоупругости с ударными волнами // Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технологических устройств и конструкций. Материалы II Дальневосточной школы-семинара. 2017. С. 70-73.

[19] Штука В. И. Сравнение результатов моделирования отклика несжимаемых упругой и упруговязкопластической сред с предварительными деформациями на существенно нестационарные граничные воздействия // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твёрдого тела и прогрессивные технологии в машиностроении. Материалы V Дальневосточной конференции с международным участием. 2018. С. 21-23.

[20] Штука В. И. Ударные волны в несжимаемом термоупругом цилиндрическом слое // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тел. 2017. С. 291-296.

[21] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media // Zeigtschr. fur angew. Match. und Phus. 1967. Vol. 18. № 1. P. 141-144.

[22] Boa-The Chu Transverse shock waves in incompressible elastic solids // J. Mech. Phys. Solids. 1967. Vol. 15. P. 1-14.

[23] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. On construction of uniformly fit ray decopositions for solving dynamic problems of linear viscoelasticity // Soviet Appl. Mech. (Engl. transl.). 1991. Vol. 27. No 1. P. 77-82.

V. I. Shtuka

NONCOMPRESSED CYLINDRICAL LAYER SHOCK LOADING IN ANISOTHERMIC CONDITIONS

Vladivostok State University of Economics and service, Vladivostok, Russia

Abstract. The main points witch should be paid attention of modeling the response of thermoelastic incompressible medium with viscoplastic properties to the essentially unsteady effect are shown by the example of several problems on loading elastoviscoplastic and thermoelastic cylindrical layers with preliminary deformations. Some remarks were noted regarding to the use of the relations of the theory of finite elastoplastic deformations, the ray series method application and special numerical calculation schemes. The dependencies of temperature and additional pressure breaks on plane-polarized strong discontinuities surfaces, loading and circular polarized waves velocities are determined.

Keywords: thermoelasticity, viscoplasticity, shock waves, finite deformations, ray method.

REFERENCES

[1] Babicheva L. A., Bykovtsev G. I., Verveiko N. D. Ray method for solving problems in elastic-visco-plastic media // Applied Mathematics and Mechanics. 1973. T. 37. No. 1. S. 145-155.
[2] Baskakov V. A., Chirko M. S. On the Study of the Properties of Strong Discontinuities in a Nonlinear Thermoelastic Medium // Mechanics of Deformable Media. Kuibyshev: Publishing house of the Kuibyshev University. 1979. Issue 4. S. 26-40.
[3] Voiceless P. A., Verveiko N. D. Beam method for solving problems in elastic-visco-plastic media // Rigid Body Mechanics. 1971. No. 5. S. 71-76.
[4] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Large irreversible deformations and elastic aftereffect. Vladivostok : Dalnauka, 2013.312 p. ISBN 978-5-8044-1423-9.
[5] Burenin A. A. Towards the construction of the theory of thermoelasticity at a finite rate of heat propagation // Scientific notes of the Komsomolsk-on-Amur Technical University. 2018. No. IV-1 (36). S. 47-53.
[6] Burenin A. A., Ustinova A. S. Development and deceleration of a helical viscoplastic flow with the calculation of the elastic response after stopping the flow and unloading. To the 70th anniversary of V. A. Levin. Vladivostok: Dalnauka. 2009.S. 91-102.
[7] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A. Ray method for solving one-dimensional problems of nonlinear dynamic theory of elasticity with flat surfaces of discontinuities // Applied problems of mechanics of deformable media. Vladivostok: DVO AN USSR. 1991.S. 129-137.
[8] Burenin A. A., Sevast'yanov G. M., Stuck V. I. On the separation of discontinuities in the calculations of the dynamics of an incompressible elastic medium // Computational mechanics of continuous media. 2016.Vol. 9. No. 4. S. 400-411.
[9] Burenin A. A. On one possibility of constructing approximate solutions of non-stationary problems of the dynamics of elastic media under shock influences // Dalnevostochnyi matematicheskiy sbornik. 1999. Issue 8. S. 49-72.
[10] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Plasticity theory. Vladivostok : Dalnauka, 1998.528 p. ISBN 5-7442-0586-1.
[11] Zvolinsky N. V., Reitman M. I., Shapiro G. S. Dynamics of deformable solids // In the book. : Mechanics in the USSR for 50 years. T. 3. Mechanics of a deformable solid. M. : Nauka, 1972.S. 291-323.
[12] Ishlinsky A. Yu., Ivlev D. D. Mathematical theory of plasticity. M. : Fizmatlit, 2001.704 p.

Shtuka, Viktor Igorevich Docent, Department of Math and Modeling, Vladivostok State University of Economics and service, Vladivostok, Russia.

[13] Kovtanyuk L. V., Stuck V. I. Investigation of cylindrical shock waves in elastic-viscoplastic incompressible bodies using the ray series method // Bulletin of the I. Ya. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Limit State Mechanics. 2017. No. 2 (32). S. 118-134.

[14] Markin A. A., Sokolova M. Yu. Thermomechanics of Elastoplastic Deformation. M. : Fizmatlit, 2013.319 p. ISBN 978-5-9221-1409-7.

[15] Reiner M. Rheology. M. : Nauka, 1965.224 p.

[16] Sevast'yanov G. M., Kovtanyuk L. V., Stuck V. I. One-dimensional cylindrical shock waves under load conditions causing viscoplastic flow // Uchenye zapiski Komsomolsk-on-Amur State Technical University. 2018.Vol. 1. No. 4 (36). S. 40-46.

[17] G. Schramm Fundamentals of practical rheology and rheometry / Per. with eng. I. A. Lavygina. M. : KolosS, 2003.321 p.

[18] Stuck V. I. Features of the application of the ray method in solving non-stationary problems of coupled thermoelasticity with shock waves // Fundamental mechanics as a basis for improving industrial technologies, technological devices and structures. Materials of the II Far Eastern School-Seminar. 2017.S. 70-73.

[19] Stuck V. I. Comparison of the results of modeling the response of incompressible elastic and elasto-viscoplastic media with preliminary deformations to substantially unsteady boundary actions // Fundamental and applied problems of mechanics of deformable solids and progressive technologies in mechanical engineering. Materials of the V Far Eastern conference with international participation. 2018.S. 21-23.

[20] Stuff V. I. Shock waves in an incompressible thermoelastic cylindrical layer // Proceedings of the X All-Russian Conference on Mechanics of Deformable Solids. 2017.S. 291-296.

[21] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media // Zeigtschr. fur angew. Match. und Phus. 1967. Vol. 18. No. 1. P. 141-144.

[22] Boa-The Chu Transverse shock waves in incompressible elastic solids // J. Mech. Phys. Solids. 1967. Vol. 15. P. 1-14.

[23] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. On construction of uniformly fit ray decopositions for solving dynamic problems of linear viscoelasticity // Soviet Appl. Mech. (Engl. Transl.). 1991. Vol. 27. No 1. P. 77-82.