Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 238–246

Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин, А. М. Буруруев, Т. К. Нестеров, Н. Э. Стадник

ОБ УПРУГОЙ РАЗГРУЗКЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАГРЕТОГО ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА ОБЛАДАЮЩЕГО ТОРОИДАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Институт прикладной математики ДВО РАН г. Владивосток, Россия

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматривается ряд краевых задач теории термоупругопластического деформирования материала в условиях тороидальной симметрии. Рассмотрен процесс упругой разгрузки предварительно нагретого объекта. Рассчитаны поля остаточных напряжений и перемещений. Получены точные формулы для аналитического решения поставленной краевой задачи.

Ключевые слова: температурное напряжение, идеальная пластичность, теплопроводность, термоупругость

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.88.027

УДК: 539.374

1. Введение. Во многих отраслях современного машиностроения и самолетостроения значительно возросли потребности в использовании облегченных деталей и конструкций. Эту задачу частично решает использование функционально градиентных материалов (например, сплавов титана) [1-5]. Функционально градиентный материал это класс современных материалов с различными свойствами в зависимости от характерного микроструктурного размера. В природе функционально градиентными материалами являются кости, зубы и т. д. Одной из уникальных характеристик функционально градиентных материалов является их способность адаптироваться к конкретному эксплуатационным нагрузкам.

Дац Евгений Павлович
`e-mail:` dats@dvo.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия
Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №18-01-00844, № 19-51-60001, № 20-01-00666).

Поступила 24.06.2020

Другая актуальная проблема — это быстрая замена вышедших из строя деталей. В случае их замены, несомненными преимуществами обладают процессы аддитивного производства. К таким способам производства относятся: физическое или химическое осаждение из жидкой/газообразной фазы, плазменное напыление, самораспространяющийся высокотемпературный синтез, метод порошковой металлургии, метод центробежного литья и процесс лазерного осаждения металла. Процесс лазерного осаждения металла — это класс процессов аддитивного производства, который позволяет производить функциональную деталь непосредственно из трехмерной компьютерной модели детали и, возможно, из различных материалов.

Производимые такими способами изделия экономически более выгодны, а их производство менее токсично по сравнению с другими технологическими процессами. Тем не менее, полученные аддитивным способом изделия и материалы, зачастую проявляют микроструктурные особенности и являются функционально градиентными материалами.

Математические модели деформирования изделий, изготовленных описанными выше способами, несомненно должны учитывать температурные эффекты. Модель термоупругопластчиности, полученная обобщением классического модели Прандтля–Рейса полностью отвечает требованиям, предъявляемым современной инженерией к исследователям. Ранее авторами, настоящего сообщения, был решен ряд краевых задач по расчету температурных напряжений в телах с осевой и центральной симметрией [6–18]. В предлагаемой работе рассмотрим проблему расчета остаточных напряжений в условиях тороидальной симметрии. Основу расчетов пластического течения, предваряющего стадию разгрузки материала, возьмем результаты изложенные в публикациях [19-21].

2. Определяющие модельные соотношения и основные уравнения. Воспользуемся [8] моделью малых упруго-пластических деформаций, в которой тензор малых деформаций $\mathbf{d}$ состоит из термоупругой (обратимой) $\mathbf{e}$ и пластической (необратимой) $\mathbf{p}$ составляющей:

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \boldsymbol{\nabla}\right) \qquad (1)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещений в трехмерной декартовой системе координат.

Предполагается, что материал находится в состоянии термоупругопластического равновесия, для которого справедливо уравнение:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

Буруруев Алексей Михайлович
`e-mail:` alexey@bururuev.ru, ведущий инженер, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
Нестеров Тимофей Константинович
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, программист, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
Стадник Никита Эдуардович
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши. Зависимость между тензором напряжений и упругими компонентами тензора деформаций выражается при помощи закона Дюамеля-Неймана

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{e} + [\lambda\mathbf{tr}(\mathbf{e}) - \alpha(3\lambda + 2\mu)(T - T_0)]\mathbf{I} \tag{3}$$

здесь $\mathbf{I}$ — единичный тензор, $\mathbf{tr}(\mathbf{e})$ — след тензора упругих деформаций, $T - T_0$ — разница между текущей и начальной температурой в точке среды, λ, μ — параметры Ламе, α — коэффициент линейного теплового расширения.

Температурное поле описывается уравнением теплопроводности:

$$\rho c_p \partial_t T = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\eta \boldsymbol{\nabla} T) \tag{4}$$

где ρ — плотность, c_p — теплоемкость, η — теплопроводность материала, ∂_t — производная по временной координате. При $\mathbf{p} \equiv \mathbf{0}$ система соотношений (1)–(4) вместе с заданными граничными условиями определяет термоупругое равновесие материала.

Начало процесса необратимое деформирование материала определяется выполнением условия пластичности Мизеса:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} - \frac{8}{3}k^2(T) = 0, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\mathbf{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – девиатор тензора напряжений, $k(T)$ – предел текучести при чистом сдвиге, значение которого в каждой точке среды зависит от текущей температуры и не зависит от напряженного состояния материала (идеальная пластичность).

Основные соотношения. Преобразование от декартовых прямоугольных координат (X, Y, Z) к псевдотороидальным координатам (r, θ, φ) определяется соотношениями:

$$X = \Omega\cos(\varphi), \quad Y = \Omega\sin(\varphi), \quad Z = R_0\cos(\theta), \quad \Omega = (R_0 + r\sin(\theta)), \tag{6}$$

где R_0 главный радиус тора, $r \in [r_1, r_2]$, r_1 и r_2 внутренний и внешний радиусы тора. При этом учитывается , что центр тора совпадает с началом декартовой системы координат, а центр тороидальной системы расположен на образующей оси тора.

Компоненты тензора малых деформаций $d_{ij} = e_{ij} + p_{ij}$, определяются через термоупругую e_{ij} и пластическую p_{ij} составляющие, а с компонентами вектора перемещений u_i в псевдотороидальной системе координат связаны уравнениями

$$\begin{gathered}
d_{\theta\theta} = \frac{u_{\theta,\theta}}{r} + \frac{u_r}{r}, \qquad d_{\varphi\varphi} = \frac{u_r\sin(\theta) + u_\theta\cos(\theta)}{\Omega} + \frac{u_{\varphi,\varphi}}{\Omega}, \quad d_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{r,\theta}}{r} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r}\right),\\
d_{rr} = u_{r,r}, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{r,\varphi}}{\Omega} + u_{\varphi,r} - \frac{u_\varphi\sin(\theta)}{\Omega}\right), \quad d_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{\theta,\varphi}}{\Omega} + u_{\varphi,\theta} - \frac{u_\varphi\cos(\theta)}{\Omega}\right).
\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь и далее индексом после запятой обозначается частное дифференцирование по соответствующей пространственной координате.

Уравнения равновесия в псевдотороидальной системе координат преобразуются к виду

$$\begin{gathered}
\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{r\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\sin(\theta)}{\Omega}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} + \operatorname{ctg}\theta(\sigma_{r\theta})) = 0,\\
\sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\sin(\theta)}{\Omega}(\sigma_{r\theta} + \operatorname{ctg}(\theta)(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})) = 0,\\
\sigma_{r\varphi,r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{2\sin(\theta)}{\Omega}(\sigma_{r\varphi} + \operatorname{ctg}(\theta)\sigma_{\theta\varphi}) = 0.
\end{gathered} \tag{8}$$

Определяющие соотношения термоупругого континуума можно принять в форме закона Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\mathrm{tr}e_{ij} - \alpha\delta_{ij}(3\lambda + 2\mu)(T - T_0) + 2\mu e_{ij}, \tag{9}$$

где δ_{ij} — дельта Кронекера, λ, μ — постоянные Ламе, α — коэффициент линейного теплового расширения, $(T - T_0)$ — температур начально T_0 и текущей T.

Отметим, что в дальнейшем изложении материала статьи мы будем пренебрегать влиянием деформационных процессов на изменение температурного поля в исследуемом теле. Уравнение теплопроводности в псевдотороидальных координатах имеет форму

$$T_{,rr} + \frac{(R_0 + 2r\sin(\theta))T_{,r}}{r(R_0 + r\sin(\theta))} + \frac{T_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{\cos(\theta)T_{,\theta}}{r(R_0 + r\sin(\theta))} + \frac{T_{,\varphi\varphi}}{(R_0 + r\sin(\theta))^2} = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{10}$$

При заданных граничных условиях и известных распределениях необратимых деформаций p_{ij} система уравнений (7)–(10) задает эволюцию напряженно-деформированного состояния, подвергающегося тепловой обработке тела тороидальной формы, в условиях тороидальной симметрии.

Постановка задачи Рассмотрим полый тор радиусов R_0 и $r_1 < r < r_2$. Температурное воздействие на термоупругий материал задается осесимметричным[3] температурным распределением. В таком случае, напряженно-деформированное состояние не будет зависеть от угловой координаты φ. Тогда, следующие компоненты вектора перемещений, тензора деформаций и тензора напряжений, будут равны нулю

$$u_\varphi = 0, \quad d_{r\varphi} = d_{\theta\varphi} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0. \tag{11}$$

На внешней поверхности тора определим состояние свободного теплового расширения согласно краевым условиям

$$\sigma_{rr}(r_1, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_1, \theta) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_2, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_2, \theta) = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим решение стационарного уравнения теплопроводности (10) с краевыми условиями:

$$T(r_1, \theta) = T_k, \quad T(r_2, \theta) = T_0. \tag{13}$$

Численный анализ решений уравнения теплопроводности показал, что вычисляемое распределение температуры существенно зависит от геометрии тора и при малых значениях параметра $\epsilon = r_2/R_0$ может быть описано функцией, зависящей только от радиальной координаты. При стремлении $\epsilon = r_2/R_0$ к нулю, тороидальная симметрия переходит в цилиндрическую, что позволяет принять с достаточной степенью точности одномерные аналитические решения в приближении гипотезы обобщенной плоской деформации. При таком подходе важным является определение допустимых конечных значений параметра ϵ, при которых цилиндрические решения будут удовлетворительно описывать двумерные численные в псевдотороидальных координатах.

Стационарное уравнение теплопроводности при $\epsilon = 0$, т. е. в условиях осевой симметрии приобретает форму:

$$T_{,r} + rT_{,rr} = 0. \tag{14}$$

Численные эксперименты показали, что максимальное отклонение аналитического решения уравнения (14) от численного решения уравнения (10) составляет менее 2%

[3] Имеется ввиду симметрия относительно оси oZ.

при $\epsilon = 0.1$ и $r_1/r_2 = 0.4$. Следовательно с достаточно высокой степенью точности температурное распределение при $\epsilon < 0.1$ можно считать одномерным.

При $\epsilon = 0$. Уравнения равновесия и соотношения для деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0. \\ &d_{rr} = F_{,r} \quad d_{\varphi\varphi} = C, \quad d_{\theta\theta} = \frac{F}{r}, \quad d_{r\theta} = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где $F(r)$ – неизвестная функция радиуса, C – неизвестная константа. Компоненты вектора перемещений при этом можно представить в следующей форме:

$$u_r(r,\theta) = F(r) + R_0 C \sin(\theta), \quad u_\theta(r,\theta) = R_0 C \cos(\theta). \tag{16}$$

Вид функции $F(r)$ зависит от напряженно-деформированного состояния и определяется с учетом наличия или отсутствия пластического течения в заданной области материала.

Напряженно-деформированное состояние материала при наличии остаточных деформаций. Как было показано в работах [19-21] при свободном тепловом расширении температурный градиент, заданный условиями (13) приводит к возникновению в материале нескольких областей деформирования: двух областей пластического течения, соответствующих ребру и грани призмы Треска, и области термоупругого деформирования. Решения в каждой области конкретной области приведены в [19-21] и отличаются друг от друга видом функции $F(r)$.

Рассмотрим процесс остывания материала тора, когда температурное поле возвращается к начальному распределению ($T = T_0$). В этом случае, после пластического течения начнется процесс разгрузки, характеризуемый термоупругим деформированием с учетом накопленных необратимых деформаций. Выразив одну из компонент пластических деформаций через две другие ($p_{\varphi\varphi} = -p_{rr} - p_{\theta\theta}$), запишем в общем виде результирующие соотношения для напряжений, возникающих в материале при разгрузке:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr} = \frac{2\mu}{\eta^2}\int_{r_1}^{r} \frac{p_{rr}(\rho) - p_{\theta\theta}(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{2\mu^2}{(\lambda+2\mu)r^2}\int_{r_1}^{r} \rho(p_{rr}(\rho) + p_{\theta\theta}(\rho))d\rho + \frac{Q}{r^2} + P, \\ &\sigma_{\theta\theta} = (r\sigma_{rr}(r)_{,r}), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \mu\gamma(p_{rr}(r) + p_{\theta\theta}(r)) + \frac{\lambda\sigma_{rr}(r) + \lambda\sigma_{\theta\theta}(r)}{2(\lambda+\mu)}, \\ &\eta^2 = \frac{(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}, \quad \gamma = \frac{(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь, P, Q — константы интегрирования. Пластические деформации, согласно условиям пластичности [19-21], представим в виде:

$$p_{rr} = \begin{cases} p_{rr}^{*}, & r_1 \le r \le b, \\ p_{rr}^{**}, & b \le r \le a, \\ 0, & r_1 \le a \le r_2, \end{cases} \qquad p_{\theta\theta} = \begin{cases} p_{\theta\theta}^{*}, & r_1 \le r \le b, \\ 0, & b \le r \le a, \\ 0, & r_1 \le a \le r_2, \end{cases} \tag{18}$$

где p_{ij}^{*} – пластические деформации в области пластического течения ($r_1 \le r \le b$), соответствующей ребру призмы Треска ($\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k$), p_{ij}^{**} – пластические деформации в области пластического течения ($b \le r \le a$), соответствующей грани призмы Треска ($\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k$). В области ($a \le r \le R_1$) пластические деформации отсутствуют. Для пластических деформаций (18) справедливы соотношения

$$
\begin{aligned}
p^*_{rr} &= -\frac{C}{2} + \frac{D}{r^2} - \omega \int_{r_1}^{r} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{\omega}{r^2} \int_{r_1}^{r} k(\rho)\rho d\rho - \frac{3}{r^2} \int_{r_1}^{r} \Delta(\rho)\rho d\rho - 2\frac{k}{\mu\gamma} + 2\Delta,\\
p^*_{\theta\theta} &= -\frac{C}{2} - \frac{D}{r^2} - \omega \int_{r_1}^{r} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{\omega}{r^2} \int_{r_1}^{r} k(\rho)\rho d\rho + \frac{3}{r^2} \int_{r_1}^{r} \Delta(\rho)\rho d\rho + \frac{k}{\mu\gamma} - \Delta,\\
p^*_{\varphi\varphi} &= C + 2\omega \int_{r_1}^{r} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{k}{\mu\gamma} - \Delta, \quad \omega = \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
F^{**}(r) &= \frac{\psi}{2\eta}\left(\frac{(\eta+1)}{r^\eta} \int_{r_1}^{r} \Delta(\rho)\rho^\eta d\rho + (\eta-1) r^\eta \int_{r_1}^{r} \frac{\Delta(\rho)}{\rho^\eta} d\rho\right) + rC -\\
&- \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{1}{r^\eta}\int_{r_1}^{r} k(\rho)\rho^\eta d\rho + r^\eta \int_{r_1}^{r} \frac{k(\rho)}{\rho^\eta} d\rho\right) + Mr^\eta + \frac{N}{r^\eta},\\
p^{**}_{rr} &= \frac{1}{2}\left(F^{**}_{,r} - C - \frac{k}{\mu}\right), \quad p^{**}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}\left(C + \frac{k}{\mu} - F^{**}_{,r}\right), \quad \psi = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

где C, D, M, N – константы интегрирования.

Соотношения (17)–(20) определяют напряженно-деформированное состояние в условиях упругой разгрузки материала. Отметим, что в этом случае развитые зоны пластического деформирования не достаточны для возникновения повторного пластического течения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood et al. // Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology. 2019. V. 30. P. 51–58.

[2] Experimental Investigation of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. Lasisi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notesin Mechanical Engineering. Springer. 2020. P. 515-–522.

[3] Effect of Process Parameters on the Hardness Property of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatingson Ti–6Al–4V Alloy / A. Lasisi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer. 2020. P. 523-–529.

[4] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in MechanicalEngineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore. Springer. 2020. P. 555–564.

[5] Study of Additive Manufactured Ti–Al–Si–Cu / Ti–6Al–4V Composite Coating by Direct Laser MetalDeposition (DLMD) Technique / L. C. Naidoo et al. // Advancesin Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering / Ed. by S. S. Emamian,M. Awang, F. Yusof. Singapore. Springer. 2020. P. 503—513.

[6] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu / Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo et al. // Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. 2020. V. 51. No 6. P. 766-–773.

[7] Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности / Е.П. Дац и др. // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. №. 1. P. 32–43.

[8] Murashkin E. V., Dats E. P., Klindukhov V. V. Numerical analysis of the elastic-plastic boundaries in the thermal stresses theory frameworks // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. 2017. V. 937. No. 1. P. 012030.

[9] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoplasticity // International Journal of Applied Mathematics. 2017. V. 47. No. 3.

[10] Mack W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft //Archive of Applied Mechanics. 1993. V. 63. No. 1. P. 42–50.

[11] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // Mechanics of Solids. 2014. V. 49. No. 2. P. 218–224.

[12] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On heating of thin circular elastic-plastic plate with the yield stress depending on temperature // Procedia engineering. 2017. V. 173. P. 891–896.

[13] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On a multi-physics modelling framework for thermo-elastic-plastic materials processing // Procedia Manufacturing. 2017. V. 7. P. 427–434.

[14] Murashkin E., Dats E. Thermoelastoplastic deformation of a multilayer ball // Mechanics of Solids. 2017. V. 52. No. 5. P. 495–500.

[15] Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in am fabricated ball during a heating process // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 1959. P. 1–5.

[16] Stadnik N., Dats E. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 991. P. 1—7.

[17] Murashkin E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 991. P. 1–12.

[18] Akinlabi E. T., Dats E., Murashkin E. Thermoelasticplastic deformation of a functionally graded spherical layer // Journal of Physics: Conference Series. 2020. V. 1474(1). P. 012002.

[19] Orçan Y. Residual stresses and secondary plastic flow in a heat generating elastic-plastic cylinder with free ends // International journal of engineering science. 1995. V. 33. No. 12. P. 1689–1698.

[20] Murashkin E., Dats E. Thermal stresses computation in donut // Engineering Letters. 2019. V. 27. No 3. P. 568–571.

[21] Дац Е. П., Мурашкин Е. В. Температурные напряжения в условиях тороидальной симметрии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. №. 2. С. 57–70.

[22] Murashkin E. V., Dats E. P. Thermal stresses computation under toroidal symmetry conditions // AIP Conference Proceedings. AIP Publishing LLC. 2019. V. 2116. No. 1. P. 380012.

E. P. Dats, E. V. Murashkin, A. M. Bururuev, T. K. Nesterov, N. E. Stadnik

THERMOELASTIC PLASTIC DEFORMATION OF A FUNCTIONAL GRADIENT MATERIAL UNDER CONDITIONS OF CENTRAL SYMMETRY

Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. A number of boundary value problems of the theory of thermoelastoplastic deformation of a material under conditions of toroidal symmetry are presented. The process of elastic unloading of a heated object is considered. The fields of residual stresses and displacements are calculated. Exact formulas are obtained for the analytical solution of the stated boundary value problem.

Keywords: thermal stress, ideal plasticity, yield, heat conduction, thermoelasticity

REFERENCES

[1] Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood et al. // Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology. 2019. V. 30.P. 51-58.

[2] Experimental Investigation of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. Lasisi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer. 2020. P. 515-–522.

[3] Effect of Process Parameters on the Hardness Property of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatingson Ti–6Al–4V Alloy / A. Lasisi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer. 2020. P. 523-–529.

[4] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in MechanicalEngineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore. Springer. 2020. P. 555-564.

[5] Study of Additive Manufactured Ti–Al–Si–Cu / Ti–6Al–4V Composite Coating by Direct Laser MetalDeposition (DLMD) Technique / L. C. Naidoo et al. // Advancesin Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore. Springer. 2020. P. 503-513.

[6] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu / Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo et al. // Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. 2020. V. 51. No 6. P. 766-–773.

[7] Temperature stresses in an elastoplastic pipe depending on the choice of the plasticity condition / E.P. Dats et al. // Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela. 2018. no. 1.P. 32–43.

Dats Evgeniy Pavlovich PhD, Researcher, Institute of Applied Mathematics of FEB RAS, Vladivostok, Russia

Murashkin Evgenii Valerievich PhD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Bururuev Aleksei Mikhailovich Leading Engineer of the Laboratory for Modeling in Mechanics of Solids IPMech RAS, Moscow, Russia.

Nesterov Timofey Konstantinovich programmer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Stadnik Nikita Eduardovich Junior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A17-117021310381-8) and by the Russian Foundation for Basic Research project nos. 18-01-00844, 19-51-60001, 20-01-00666).

[8] Murashkin E. V., Dats E. P., Klindukhov V. V. Numerical analysis of the elastic-plastic boundaries in the thermal stresses theory frameworks // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. 2017. V. 937. No. 1.P. 012030.

[9] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoplasticity // International Journal of Applied Mathematics. 2017. V. 47. No. 3.

[10] Mack W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft // Archive of Applied Mechanics. 1993. V. 63. No. 1.P. 42-50.

[11] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // Mechanics of Solids. 2014. V. 49. No. 2.P. 218-224.

[12] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On heating of thin circular elastic-plastic plate with the yield stress depending on temperature // Procedia engineering. 2017. V. 173. P. 891–896.

[13] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On a multi-physics modeling framework for thermo-elastic-plastic materials processing // Procedia Manufacturing. 2017. V. 7. P. 427–434.

[14] Murashkin E., Dats E. Thermoelastoplastic deformation of a multilayer ball // Mechanics of Solids. 2017. V. 52. No. 5.P. 495-500.

[15] Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in am fabricated ball during a heating process // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 1959. P. 1-5.

[16] Stadnik N., Dats E. Continuum mathematical modeling of pathological growth of blood vessels // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 991. P. 1–7.

[17] Murashkin E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 991. P. 1-12.

[18] Akinlabi E. T., Dats E., Murashkin E. Thermoelasticplastic deformation of a functionally graded spherical layer // Journal of Physics: Conference Series. 2020. V. 1474 (1). P. 012002.

[19] Orçan Y. Residual stresses and secondary plastic flow in a heat generating elastic-plastic cylinder with free ends // International journal of engineering science. 1995. V. 33. No. 12.P. 1689-1698.

[20] Murashkin E., Dats E. Thermal stresses computation in donut // Engineering Letters. 2019. V. 27.No 3.P. 568-571.

[21] E. P. Dats, E. V. Murashkin Temperature stresses in conditions of toroidal symmetry. Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2019. no. 2.P. 57–70.

[22] Murashkin E. V., Dats E. P. Thermal stresses computation under toroidal symmetry conditions // AIP Conference Proceedings. AIP Publishing LLC. 2019. V. 2116. No. 1.P. 380012.