

Ю. В. Немировский^{1,2}, С. В. Тихонов³

ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ МНОГОСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА

¹ *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

² *Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

³ *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. В работе рассматриваются многослойные бетонные стержни постоянного поперечного сечения. Закон деформирования каждого слоя стержня принят в виде аппроксимации полиномом третьего порядка. Предполагается, что на защемленный стержень действуют квазистатические продольные и поперечные нагрузки и сила тяжести. Рассматриваемые задачи решаются методом Бубнова-Галеркина.

Ключевые слова: продольно-поперечный изгиб, стержень, предельная деформация, бетон, диаграмма деформирования бетона, растяжение, сжатие, метод Бубнова-Галеркина, системы нелинейных алгебраических уравнений

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.88.028

УДК: 539.374

В данной работе будем учитывать тот факт, что диаграммы растяжения и сжатия бетонов демонстрируют существенную нелинейность даже при низких уровнях нагружения. Аналогично работам [1–3] будем использовать, единообразные достаточно простые аппроксимации диаграмм деформирования с различными (по зонам) коэффициентами.

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В. 2020

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiryuy@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий Чувашского государственного университета им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

Поступила 20.06.2020

В качестве критерия условного предельного состояния в i -ом слое принимаем достижение в нем максимальной деформации предельно допустимого значения при растяжении или сжатии.

Рассмотрим многослойные бетонные стержни постоянного поперечного сечения. Закон деформирования каждого слоя стержня представим в виде аппроксимации полиномом третьего порядка (1), где коэффициенты A_{1i}, A_{2i}, A_{3i} – коэффициенты, которые можно найти из реальных диаграмм растяжения и сжатия бетонов.

$$\sigma_i = A_{1i}\varepsilon + A_{2i}\varepsilon^2 + A_{3i}\varepsilon^3. \quad (1)$$

Примеры расчета коэффициентов A_{1i}, A_{2i}, A_{3i} для бетонов марок В10, В30, В50 из экспериментальных диаграмм [4] методом наименьших квадратов приведены в таблице 1.

| Марка бетона | $\varepsilon_*^-, 10^{-2}$ | $\varepsilon_*^+, 10^{-2}$ | $A_{1i}, \text{МПА}$ | $A_{2i}, \text{МПА}$ | $A_{3i}, \text{МПА}$ |
|--------------|----------------------------|----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| В10 | 0,2 | 0,005 | 17899 | 15 775 616 | 4 680 659 632 |
| В30 | 0,2 | 0,005 | 47471 | 38 565 027 | 10 502 501 729 |
| В50 | 0,2 | 0,005 | 83420 | 69 930 797 | 19 399 634 911 |

Таблица 1. Значения физических параметров бетонов

На рис. 1, 2 линиями изображены диаграммы растяжения-сжатия бетонов, построенных по соотношениям (1), точками изображены результаты экспериментов.

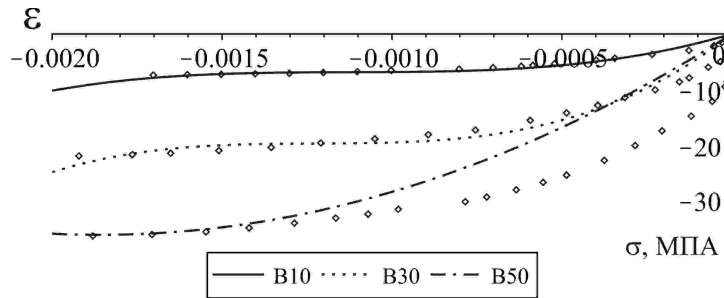


Рис. 1. Диаграммы растяжения бетонов, построенных по соотношениям (1), и экспериментальные

Для изгибающего изгибающего момента и продольного усилия справедливы соотношения

$$N = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \sigma_i dS, \quad M_y = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \sigma_i z dS, \quad (2)$$

и будем считать справедливыми уравнения равновесия

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = q_z - \frac{dm_y}{dx}, \quad \frac{dN}{dx} = -q_x. \quad (3)$$

где q_x, q_z – проекции вектора внешних усилий на соответствующие оси, m_y – проекция вектора распределенного момента на ось y .

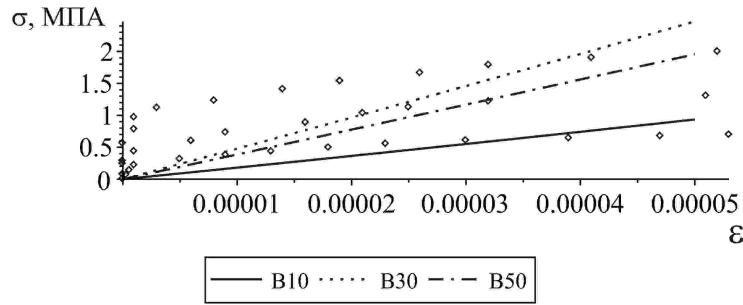


Рис. 2. Диаграммы сжатия бетонов, построенных по соотношениям (1), и экспериментальные

Если принять справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява, тогда будет иметь место

$$\varepsilon(x, z) = \varepsilon_0(x) - z\kappa_y(x), \quad (4)$$

$$\varepsilon_0(x) = \frac{du_0}{dx}, \quad \kappa_y = \frac{d^2w_0}{dx^2}, \quad (5)$$

где u_0 , w_0 – компоненты вектора перемещений точек осевой линии стержня вдоль осей x и z соответственно.

Исходя из предположения, что имеет место случай защемленного с обоих концов стержня, имеем

$$u_0(0) = w_0(0) = u_0(l) = w_0(l) = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{dw_0}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dw_0}{dx} \right|_{x=l} = \left. \frac{du_0}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{du_0}{dx} \right|_{x=l} = 0. \quad (7)$$

Из уравнений (1)-(5) получим систему дифференциальных уравнений относительно перемещений с граничными условиями (6)-(7).

Указанную систему дифференциальных уравнений будем решать методом Бубнова-Галеркина [5].

Положим

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^N B_k y_k(x), \quad w_0(x) = \sum_{k=1}^N C_k r_k(x), \quad (8)$$

где B_k , D_k – постоянные.

Если принять за $\varphi_i(x)$ выражения

$$\varphi_i(x) = \sum_{k=1}^N D_{i,k} x^{k-1}, \quad (9)$$

где $D_{i,k}$ определяются исходя из граничных условий.

Будем считать $y_k(x)$, $r_k(x)$ в выражении (8) равными

$$y_k(x) = r_k(x) = \varphi_k(x). \quad (10)$$

Если подставить перемещения (8) в полученные дифференциальные уравнения и обозначить через $L_1(x)$, $L_2(x)$ левые части соответствующих уравнений, положив в

качестве базисных функций в методе Бубнова-Галеркина те же функции, что и в разложении (8)

$$f_k(x) = \cos \frac{k-1}{l} \pi x - \cos \frac{k+1}{l} \pi x, \quad k = 1 \dots N, \quad (11)$$

получим систему из $2N$ алгебраических уравнений относительно $2N$ неизвестных $B_k, C_k, k = 1 \dots N$,

$$\int_0^l L_i(x) f_k(x) dx = 0, \quad i = 1 \dots 3, \quad k = 1 \dots N. \quad (12)$$

Значения B_k, C_k можно определить из полученной системы уравнений каким-либо численным методом.

Пусть на стержень действуют распределенные нагрузки q_1, q_2, q_3, q_4 и сила тяжести проекция которой на соответствующие оси равна q_{sx}, q_{sz} .

Тогда для усилий и моментов имеет место

$$q_x = 2 \int_0^{b_1(0)} q_3 dy + 2 \int_0^{b_n(h_n)} q_4 dy + 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i(z)} q_{sx} dy, \quad (13)$$

$$q_z = 2 \int_0^{b_1(0)} q_2 dy + 2 \int_0^{b_n(h_n)} q_1 dy + 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i(z)} q_{sz} dy, \quad (14)$$

$$m_y = -2 \int_0^{b_n(h_n)} x q_1 dy - 2 \int_0^{b_1(0)} x q_2 dy + 2 h_n \int_0^{b_n(h_n)} q_3 dy - \\ - 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i(z)} (x q_{sz} - z q_{sx}) dy. \quad (15)$$

Действующие нагрузки $q_1, q_2, q_3, q_4, q_{sx}, q_{sz}$ примем равными

$$q_1 = t_{11} + t_{12}x, \quad q_2 = t_{21} + t_{22}x, \quad q_3 = t_{31} + t_{32}x, \quad q_4 = t_{41} + t_{42}x, \quad (16)$$

$$q_{sx} = g_x \rho \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_{i+1}} b_i(z) dz, \quad q_{sz} = g_z \rho \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_{i+1}} b_i(z) dz, \quad (17)$$

где $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}, t_{31}, t_{32}, t_{41}, t_{42}$ – постоянные, g_x, g_z – проекции вектора ускорения свободного падения.

Для иллюстрации данной методики рассмотрим стержень форма поперечного сечения которого имеет вид изображенный на рис. 3. На указанном рисунке марка бетона из которого сделан материал слоя указан напротив соответствующего номера слоя.

Примем в качестве постоянных характеризующих нагрузки (16) следующие значения

$$t_{11} = -300 \frac{\text{КН}}{\text{М}}, \quad t_{12} = 10 \frac{\text{КН}}{\text{М}^2}, \quad t_{21} = t_{22} = 0, \quad t_{31} = 8000 \frac{\text{Н}}{\text{М}}, \quad t_{32} = 800 \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, \quad t_{41} = t_{42} = 0.$$

Примем, что сила тяжести направлена вертикально вниз, т.е. $g_x = 0, g_z = 0$.

Решение поставленной задачи имеет вид, изображенный на рис. 4-7.

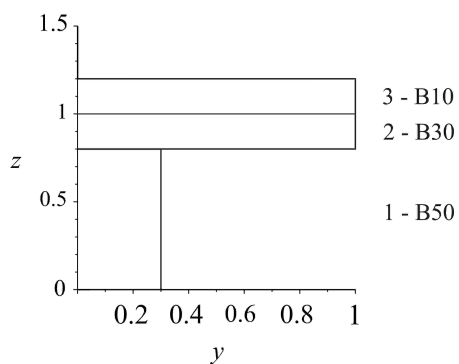


Рис. 3. Форма поперечного сечения стержня

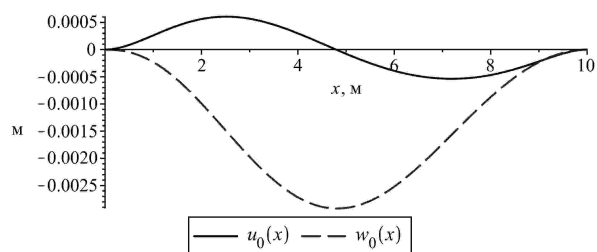


Рис. 4. Распределение компонентов вектора перемещений по длине стержня

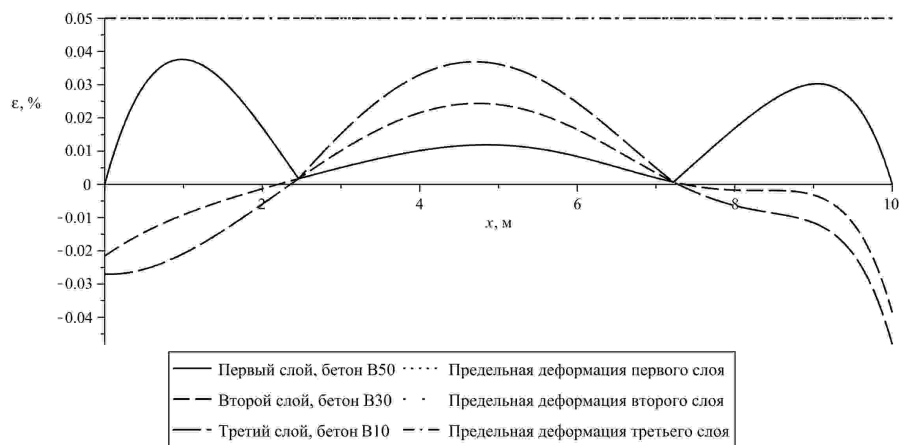


Рис. 5. Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня

Анализируя полученные решения, можно сделать вывод, что деформация не превысила своих предельных значений во всех сечениях стержня. Следовательно стержень может выдержать действующие на него нагрузки.

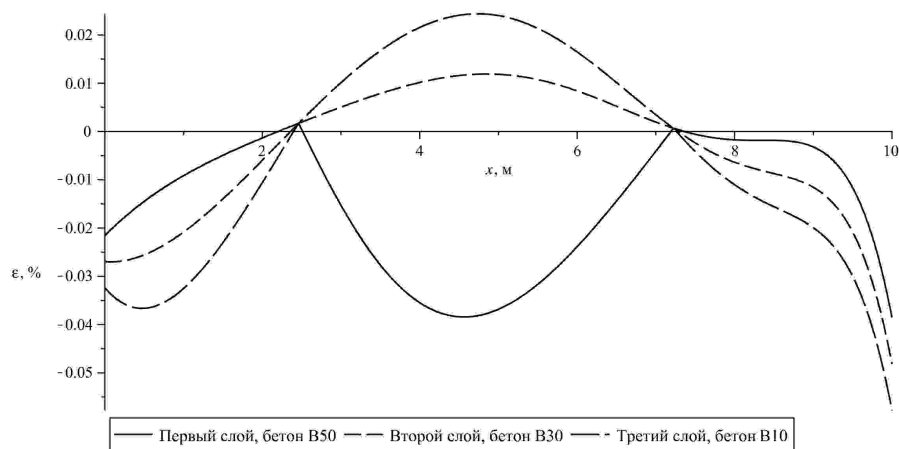


Рис. 6. Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня

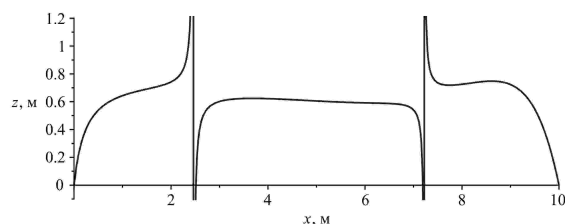


Рис. 7. Распределение координаты нейтральной линии по длине стержня

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. с. 125–129.
- [2] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 26–37.
- [3] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 60–73.
- [4] Иващенко Е. И. Разработка методов расчета железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов с учетом фактического изменения площади их поперечных сечений // дис. ... канд. техн. наук. Воронеж, 2006. 230 с.
- [5] Голоскоков Д. П. Построение базиса для одномерных краевых задач в системах символьных вычислений // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. Т. 1. С. 77–85.

Yu. V. Nemirovskii, S. V. Tikhonov

LONGITUDINAL-TRANSVERSE BENDING OF A MULTILAYER BAR MADE OF A PHYSICALLY NONLINEAR MATERIAL

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. The paper considers multilayer concrete rods of constant cross-section. The deformation law for each layer of the bar is adopted as an approximation by a third-order polynomial. It is assumed that quasi-static longitudinal and transverse loads and gravity act on the restrained rod. The problems under consideration are solved by the Bubnov-Galerkin method.

Keywords: longitudinal-transverse bending, bar, ultimate deformation, concrete, concrete deformation diagram, tension, compression, Bubnov-Galerkin method, systems of nonlinear algebraic equations.

REFERENCES

- [1] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Deformation diagrams of concrete and reinforced concrete // Bulletin of the Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov. 2015. no. 6. p. 125–129.
- [2] Nemirovsky Y. V. Deformation limit of hybrid reinforced concrete structures // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2018. no. 3 (37). P. 26–37.
- [3] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Limit state of concrete and reinforced concrete rods in complex and longitudinal-transverse bending // Vestnik of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2020. № 1. С. 60–73.
- [4] Ivaschenko E. I. Development of methods for calculating reinforced concrete elements based on actual deformation diagrams of materials, taking into account the actual change in the area of their cross-sections // dis. ... Cand. tech. sciences. Voronezh, 2006. 230 p.
- [5] Goloskokov D. P. Construction of a basis for one-dimensional boundary value problems in symbolic computation systems // Space, time and fundamental interactions. 2017. Vol. 1. P. 77–85.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.

Tikhonov Sergey Vladimirovich, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia