

В. Г. Баженов, Е. В. Нагорных, Д. А. Самсонова

О ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛИ ВИНКЛЕРА ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

*Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского
Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород,
Россия*

Аннотация. Представлено сравнение результатов расчетов контактного взаимодействия и потери устойчивости упругопластических цилиндрических оболочек с упругим толстостенным заполнителем, выполненных на основе двух подходов: с позиций механики сплошных сред и теории оболочек типа Тимошенко с основанием Винклера. Оба подхода позволяют решать задачи деформирования и устойчивости непологих оболочек с учетом геометрических нелинейностей. Постановка с позиций механики сплошных сред позволяет аппроксимировать оболочку по толщине рядом слоев конечных элементов. Определяющие соотношения формулируются в переменных Лагранжа с использованием в качестве отсчетной неподвижной декартовой или цилиндрической системы координат. Кинематические соотношения записываются в метрике текущего состояния. Упругопластические свойства оболочек описываются теорией пластического течения с изотропным упрочнением. Уравнения движения следуют из баланса виртуальных мощностей работ. В первом подходе контактное взаимодействие оболочки и упругого тела моделируется условиями непроникания по нормали и свободного проскальзывания вдоль касательной. Во втором подходе контактное взаимодействие упругого заполнителя с оболочкой моделируется основанием Винклера. Оба подхода позволяют описать нелинейное докритическое деформирование оболочек вращения с упругим заполнителем, определить предельные (критические) нагрузки в широком диапазоне скоростей нагружения с учетом геометрических несовершенств формы. Оценивается область применимости гипотезы Винклера при контактном взаимодействии оболочки с упругой средой в зависимости от жесткости и толщины основания.

Ключевые слова: цилиндрические оболочки, упругопластическая потеря устойчивости, упругий заполнитель, основание Винклера.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.88.029

УДК: 539.3

Математическая модель

Задача деформирования и упругопластического выпучивания оболочек вращения с толстостенным упругим наполнителем при комбинированных статических и динамических нагрузениях формулируется в плоской двумерной постановке в рамках механики сплошных сред [1]. Определяющая система уравнений записывается в декартовой системе эйлеровых координат. Кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния. Упругопластические свойства материала оболочки описываются в рамках теории течения с нелинейным изотропным упрочнением. Материал наполнителя полагается линейно упругим. Вариационные уравнения движения оболочки и наполнителя следуют из уравнения баланса виртуальных мощностей. Контактное взаимодействие оболочки и деформируемого наполнителя моделируется исходя из условий непроникания по нормали и свободного проскальзывания вдоль касательной. Условия непроникания выполняются только в активной фазе контактного взаимодействия, при нарушении контакта они заменяются условиями на свободной поверхности. В квазистатических задачах скорость нагружения принимается такой, чтобы роль сил инерции была пренебрежимо мала. Численное решение определяющей системы уравнений осуществляется по явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест» второго порядка точности. Данный метод исследования позволяет описать нелинейное докритическое деформирование оболочек вращения с упругим наполнителем, определить предельные (критические) нагрузки в широком диапазоне скоростей нагружения с учетом геометрических несовершенств формы.

Результаты полномасштабного моделирования (в рамках механики сплошных сред) сравнивались с полученными ранее в упрощенной постановке, основанной на гипотезах теории оболочек типа Тимошенко и основания Винклера [2].

Пример численного моделирования

Решалась задача о потере устойчивости цилиндрических оболочек (сталь X18H10T [3]) с толстостенным упругим наполнителем при квазистатическом нагружении внешним давлением. Начальная толщина оболочки $h_0 = 1$ мм, отношение начального среднего радиуса к толщине оболочки $R_0/h_0 = 14.5$. Соотношение начальных толщин наполнителя и оболочки H_0/h_0 варьировалось от 4 до 13 с шагом 1. На внешней

© Баженов В. Г., Нагорных Е. В., Самсонова Д. А., 2020

Баженов Валентин Георгиевич

e-mail: bazhenov@mech.unn.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия,

Нагорных Елена Владимировна

e-mail: pavlyonkova@mech.unn.ru, к.ф.-м.н., доцент, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия,

Самсонова Дарья Анатольевна

e-mail: ozornikova.dasha@yandex.ru аспирант, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-08-00814-а)

Поступила 23.06.2020

поверхности оболочки задавалось равномерно распределенное давление, линейно возрастающее во времени: $p = p_0 t$, $p_0 = 50$ МПа/с. На внутренней поверхности заполнителя задавались нулевые нормальные перемещения. При численном моделировании полагалось, что напряженно-деформированное состояние вдоль образующей оболочки и заполнителя является однородным, то есть оболочка и заполнитель находятся в условиях плоского деформированного состояния. Краевые эффекты, вызванные граничными условиями на торцах оболочки, не рассматривались.

С учетом симметрии, расчетная область представляла собой половину поперечного сечения оболочки с толстостенным заполнителем. Начальная погибь оболочки задавалась в виде $\Delta R_0 = Ah_0 \cos n\beta$, где $0 \leq \beta \leq \pi$, A — относительная амплитуда начальной погиби.

Сначала моделировалось обжатие пустотелой оболочки. Начальная погибь оболочки задавалась с $A = 1 \cdot 10^{-5}$ и $n = 2$, т.к. ожидаемая форма поперечного сечения цилиндрической оболочки после потери устойчивости — эллипс [2]. Поперечное сечение оболочки покрывалось конечно-элементной сеткой с $N = 5$ элементами по толщине и $L = 60, 120, 160$ или 240 элементами вдоль половины окружности. На рис. 1 приведены расчетные зависимости относительного среднего прогиба $\hat{w} = \frac{w}{h_0}$ от внешнего давления p .

Средний прогиб оболочки определялся по формуле $w = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^L w_i$, где w_i — среднее арифметическое прогибов (нормальных перемещений) на внешней и внутренней поверхностях оболочки в узле с номером i . Цифрами 1–4 отмечены расчеты с $L = 60, 120, 160$ и 240 элементами вдоль половины окружности соответственно, цифрой 5 — расчеты по теории оболочек [2].

В расчетах момент потери устойчивости оболочки определяется резким ростом среднего прогиба \hat{w} , поперечное сечение оболочки на начальной стадии потери устойчивости приобретает эллиптическую форму. Зависимости среднего прогиба \hat{w} оболочки от внешнего давления p до момента потери устойчивости оболочек близки к линейным. Для вариантов расчета с $L = 120, 160$ и 240 разброс критических давлений p_* , при которых происходит потеря устойчивости, не превышает 1 %. Сетка с $L = 120$ элементами вдоль половины окружности цилиндра является достаточной для сходимости численного решения. Отличие критического давления p_* на этой сетке от расчета по оболочечной модели составляет 4 %.

Коэффициент постели k , упругие характеристики и толщина основания связаны соотношением

$$k = \frac{E}{H_0(1 - 2\nu^2)}, \quad (1)$$

где E и $\nu = 0.3$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона заполнителя.

Рассмотрим пример, в котором в оболочечной модели коэффициент постели $k = 5000$ МПа. В расчетах по модели сплошной среды для каждого варианта толщины заполнителя H_0 модуль Юнга E определялся из формулы (1). Начальная погибь задавалась с $A = 1 \cdot 10^{-5}$ и $n = 2$ и 3 , из двух расчетов выбирался вариант, в котором величина критической нагрузки p_* была минимальной. В расчетах с отношением толщин $H_0/h_0 = 4, 8$ потеря устойчивости оболочки происходит по третьей форме, с $H_0/h_0 = 9, 13$ — сначала по второй, затем рост одной выпучины прекращался, а вторая трансформировалась в складку. В местах выпучивания имеет место отрыв оболочки от заполнителя. В расчетах по оболочечной модели с основанием Винклера

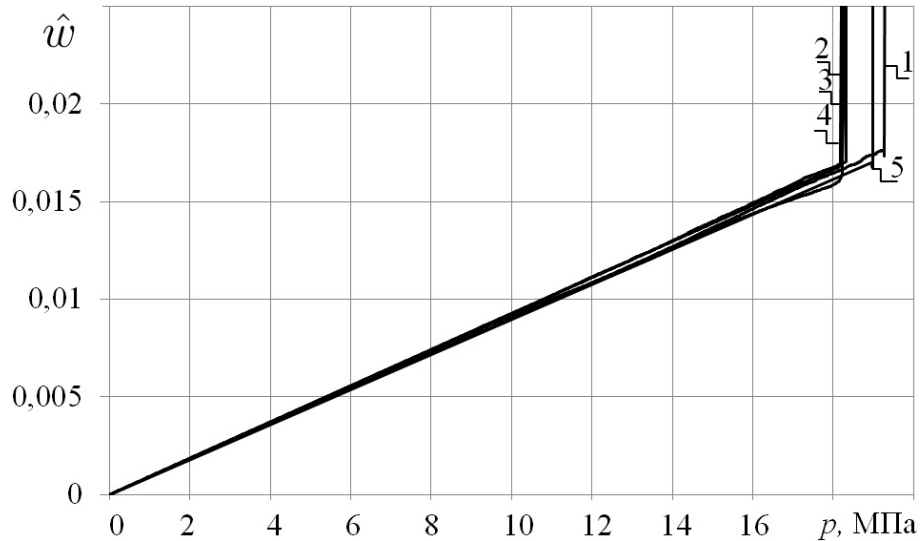


Рис. 1. Зависимости среднего прогиба от внешнего давления пустотелой оболочки

для данного коэффициента постели и относительной амплитуды начальной погиби потеря устойчивости происходила по третьей форме.

На рис. 2 приведено изменение относительного среднего прогиба \hat{w} в диапазоне внешнего давления p , близкого к критическому p_* . Толстой линией приведена кривая из расчета в упрощенной постановке [2], тонкими — расчеты по модели сплошной среды с различными толщинами заполнителя. Цифрами 1 и 2 отмечены кривые с $H_0/h_0 = 4$ и 13, соответственно. Величина критического давления p_* монотонно возрастает с увеличением толщины заполнителя H_0 . До момента потери устойчивости оболочек кривые практически совпадают. Разброс критических давлений для отношения толщин $H_0/h_0 = \overline{4,13}$ в расчетах не превышает 1%. Следует отметить, что время расчета одного варианта при использовании компьютера с процессором 4.39 ГГц в упрощенной постановке составляет около 10 минут, а в полной постановке — около 18 часов.

Заключение

Выполнено численное исследование контактного взаимодействия упругопластической цилиндрической оболочки с толстостенным упругим заполнителем при равномерном внешнем давлении в зависимости от толщины и жесткости заполнителя в двумерной постановке в рамках модели сплошной среды. Показано, что в исследованном диапазоне толщины заполнителя $H_0/h_0 = \overline{4,13}$ величина критического давления p_* изменяется незначительно (разброс не превышает 1%) и хорошо согласуется с результатом упрощенной оболочечной постановки с основанием Винклера. При этом формы потери устойчивости изменяются в зависимости от толщины и жесткости заполнителя. Наличие заполнителя приводит к более высоким формам потери устойчивости, и даже к локальным. Результаты исследования показывают, что модель Винклера в сочетании с моделью теории оболочек имеет широкую применимость в задачах контактного взаимодействия осесимметричных упругопластических оболочек с упругим заполнителем как при низких, так и при локальных формах потери устойчивости.

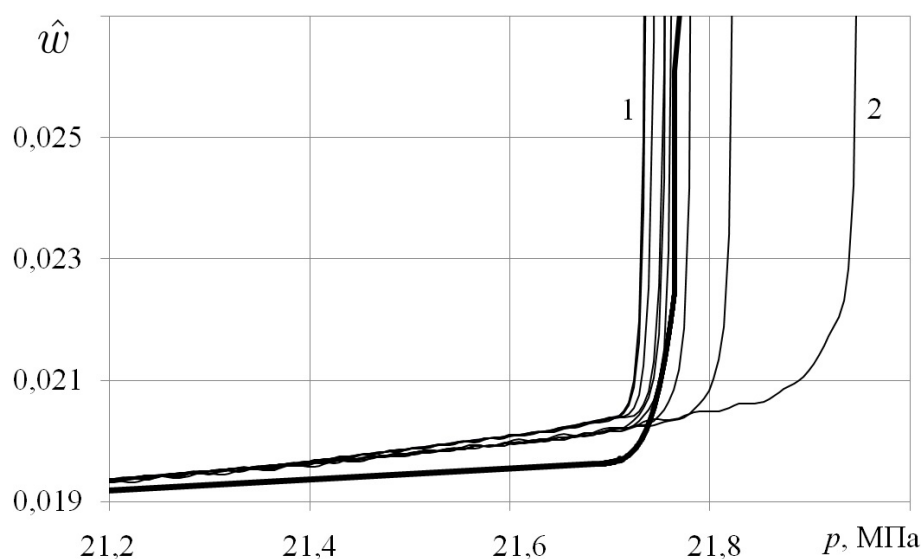


Рис. 2. Зависимости среднего прогиба от внешнего давления оболочки с толстостенным заполнителем

Величина погрешности зависит от градиента изменения контактного давления вдоль контактной поверхности, а при локальном воздействии она увеличивается. Преимуществом упрощенной постановки является существенное сокращение времени расчета по сравнению с полномасштабным моделированием.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пакет программ «Динамика-2» для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами / В. Г. Баженов, С. В. Зефирова, А. В. Кочетков [и др.] // Матем. моделирование. 2000. Т. 12(6). С. 67–72.
- [2] Samsonova D. A., Bazhenov V. G., Nagornykh V. E. Elastoplastic buckling of a cylindrical shell with initial geometric imperfections and an elastic filler at external pressure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 747. p. 012030.
- [3] Выпучивание упругопластических цилиндрических и конических оболочек при осевом ударном нагружении / В.Г. Баженов, М.С. Баранова, А.И. Кибец [и др.] // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.–матем. науки. 2010. Т. 152, № 4. С. 86–105.

V. G. Bazhenov, E. V. Nagornykh, D. A. Samsonova

ABOUT APPLICABILITY OF THE WINKLER MODEL FOR CONTACT INTERACTION OF CYLINDRICAL ELASTOPLASTIC SHELLS WITH AN ELASTIC FILLER AT EXTERNAL PRESSURE

National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia

Abstract. Comparison of the results of calculations of contact interaction and loss of stability of elastoplastic cylindrical shells with an elastic thick-walled filler, performed on the basis of two approaches: from the standpoint of continuum mechanics and the theory of Timoshenko–type shells with a Winkler base is presented. Both approaches allow solving the problems of deformation and stability of non–sloping shells, taking into account geometric nonlinearities. The statement from the perspective of continuum mechanics makes it possible to approximate the shell in thickness by a number of layers of finite elements. The constitutive relations are formulated in Lagrange variables using a fixed Cartesian or cylindrical coordinate system as a reference. Kinematic relations are recorded in the metric of the current state. The elastic-plastic properties of shells are described by the theory of plastic flow with isotropic hardening. The equations of motion follow from the balance of the virtual powers of the jobs. In the first approach, the contact interaction of a shell and an elastic body is modeled by the conditions of nonpenetration along the normal and free slip along the tangent. In the second approach, the contact interaction of the elastic filler with the shell is modeled by the Winkler base. Both approaches allow one to describe the nonlinear subcritical deformation of shells of revolution with an elastic filler, to determine the limiting (critical) loads in a wide range of loading rates, taking into account the geometric imperfections of the shape. The area of applicability of the Winkler hypothesis is estimated for the contact interaction of a shell with an elastic medium, depending on the stiffness and thickness of the base.

Keywords: cylindrical shells, elastoplastic loss of stability, elastic filler, Winkler foundation.

REFERENCES

- [1] Software package «Dynamics - 2» for solving plane and axisymmetric nonlinear problems of nonstationary interaction of structures with compressible media / V. G. Bazhenov, S. V. Zefirov, A. V. Kochetkov et al. // Mat. modeling. 2000. Vol. 12 (6). P. 67–72.
- [2] Samsonova D. A., Bazhenov V. G., Nagornykh V. E. Elastoplastic buckling of a cylindrical shell with initial geometric imperfections and an elastic filler at external pressure // IOP Conf. Ser. : Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 747. p. 012030.
- [3] Buckling of elastoplastic cylindrical and conical shells under axial shock loading / V. Bazhenov, M. Baranova, A. Kibets et al. // Scholar. app. Kazan. un-that. Ser. Phys. - mat. science. 2010. Vol. 152, no. 4. P. 86–105.

Bazhenov, Valentin Georgievich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Chief Researcher, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Research Institute of Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia,

Nagornykh, Elena Vladimirovna, Nagornykh, Elena Vladimirovna, PhD of Physical and Mathematical Sciences, Assoc. Prof., National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia,

Samsonova, Daria Anatolievna Postgraduate student, Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia.