Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4 (46). С. 9–15

В. А. Ковалев, Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

О ТРЕХКОНСТАНТНЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ В ПОЛЯРНЫХ КОНТИНУУМАХ

Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматривается важная с точки зрения прикладных задач проблема моделирования процессов деформирования материалов со сложным откликом на механические воздействия. Приводятся основные уравнения трехконстантной микроструктурной модели для случая одного полярного директора. Выписана точная форма упругого потенциала, из которой, следуя стандартной схеме, выводятся все необходимые уравнения и граничные условия.

Ключевые слова: микроструктура, микрополярность, директор, трехконстантный потенциал, уравнения равновесия, нематический жидкий кристалл

DOI: 10.37972/chgpu.2020.77.42.030

УДК: 539.374

1. Предварительные замечания. Современная механика континуума включает целый ряд нелинейных гиперболических теорий, в том числе учитывающих микроструктурные свойства. Микроструктурные особенности проявляют многие материалы и изделия современной промышленной практики. В последние годы производство и обработка метаматериалов привлекли значительное внимание инженерного

Ковалев Владимир Александрович
e-mail: vlad_koval@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.
Мурашкин Евгений Валерьевич
e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Радаев Юрий Николаевич
e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 18-01-00844, № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.06.2020

сообщества и исследователей. Эти искусственные метаматериалы демонстрируют аномальные физические свойства, которые обычно не встречаются в природе. Примеры включают отрицательный коэффициент Пуассона (ауксетические материалы) [1], отрицательное тепловое расширение, отрицательную электрическую проницаемость и магнитную проницаемость. Технологии аддитивного производства, в частности, селективное лазерное плавление [2] позволяет создавать в изделии из сплавов титана (функционально-градиентных материалов) локальные участки с заданными микроструктурой и свойствами [3]. Моделирование таких свойств материалов может проводится разными способами. Особого упоминания здесь заслуживают газовая динамика, теория пластического течения Треска—Сен-Венана [4], теория разрушения [5, 6], связанные термоупругие среды (второго типа согласно общепринятой классификации) [7, 8]. Сочетание гиперболических теорий с принципом термомеханической ортогональности [9–12] приводит к принципиально новым моделям теории и механики сплошных сред, развитым в наших прежних публикациях [7, 8, 10–16].

Стандартные теории механики континуума часто оказываются непригодными для математического моделирования поведения новых современных материалов, обладающих микроструктурой (например, упругих метаматериалов или микрополярных материалов с управляемыми свойствами). Особенно это проявляется в тех случаях, когда характерный размер микроструктуры сравним с характерными изменениями линейных размеров микроэлементов, составляющих континуум. То же самое имеет место и в волновых процессах, когда длина волны оказывается существенно меньшей характерного размера микроструктуры континуума. Микроструктуры многих современных материалов имеют ярко выраженные анизотропные свойства, которые, в свою очередь, могут быть легко *модулируемыми*, что естественно сказывается на их физико-механических свойствах. Модулируемость (а иногда и управляемость) механических свойств подобных материалов достигается воздействием внешних полей и сил, не только механических и тепловых, но также и гравитационных (например, в случае модулирования свойств наращиваемых тел) и электромагнитных (например, магнитного поля, постоянного тока или прямоугольного электромагнитного импульса). Примерами таких материалов являются жидкие кристаллы [17] и молекулярно-биологические ткани. Необходимо отметить, что в некоторых случаях управление физико-механическими свойствами может быть реализовано с помощью термических полей. Настоящее исследование направлено на разработку систематической процедуры построения связанных микроструктурных континуальных теорий методами современной физической теории поля.

2. Уравнения трехконстантной теории континуума с одним полярным директором. Основы континуального подхода при моделировании микрополярных сред с одним директором можно найти в классической работе [18]. В статьях [19] и [20, 21] континуальный подход был применен к моделированию механического поведения нематических жидких кристаллов. В этом случае для описания подвижной микроструктурной ориентации молекул достаточно ввести единственный директор $\boldsymbol{\phi}$

и трактовать его как внутреннюю переменную состояния [7, 8, 16]. Уравнения движения для такой среды можно записать, например, в терминах относительных тензоров [7, 8]

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{X} + \rho \partial.\mathbf{v}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \overset{[-1]}{\boldsymbol{\mu}} = -\overset{[-1]}{\mathbf{Y}} + \overset{[-2]}{\Im} \partial.. \overset{[+1]}{\boldsymbol{\phi}} . \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\nabla}$ — трехмерный оператор Гамильтона (абсолютный вектор); ρ — массовая плотность (абсолютный скаляр); $\Im$ — микроинерция (microinertia, псевдоскаляр веса -2); $\boldsymbol{\phi}$ — полярный директор (псевдовектор веса $+1$); $\mathbf{v}$ — вектор линейной скорости (абсолютный вектор); $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор силовых напряжений (force stress tensor, абсолютный тензор); $\boldsymbol{\mu}$ — асимметричный тензор моментных напряжений (couple stress tensor, псевдотензор веса -1); $\mathbf{X}$ — вектор объемных сил (абсолютный вектор); $\mathbf{Y}$ — объемные моменты (псевдовектор веса -1); $\partial.$ — производная по времени, при неизменных пространственных координатах. Отметим, что в квадратных скобках над символом указан вес относительной тензорной величины. В основу определения относительного тензора может быть положена полилинейная скалярная функция векторных аргументов [22–25], представляющая собой не абсолютный, а относительный инвариант при преобразованиях координат. Такое определение позволяет легко переписать уравнения движения в терминах абсолютных тензоров. В дальнейшем будем рассматривать уравнения теории в терминах абсолютных тензоров, тем более, что переход к абсолютным тензорам осуществляется формальным умножением на степени ориентирующего псевдоскаляра.

Компоненты тензор силовых напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ можно принять в виде:

$$\sigma^{ji} = -pg^{ji} - g^{is} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\nabla_j \phi^k)} \nabla_s \phi^k, \tag{3}$$

где p — гидростатического давление (неопределенное скалярное поле), g^{ji} — компоненты метрического тензора, $\mathcal{F}$ — объемная плотность упругого потенциала.

Функцию свободной энергии $\mathcal{F}$ можно принять в форме трехконстантного потенциала в координатной форме

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}(k_{11} - k_{22}) \nabla_m \phi^m \nabla_n \phi^n + \frac{1}{2} k_{22} \nabla_m \phi^n \nabla_n \phi^m + \frac{1}{2}(k_{33} - k_{22}) g_{sl} \nabla_m \phi^s \nabla_n \phi^l \phi^m \phi^n \tag{4}$$

в векторной форме

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} k_{11} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\phi})^2 + \frac{1}{2} k_{22} (\boldsymbol{\phi} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\phi}))^2 + \frac{1}{2} k_{33} (\boldsymbol{\phi} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\phi}))^2 \tag{5}$$

где k_{11}, k_{22}, k_{33} — упругие определяющие константы.

Объемные моменты $\mathbf{Y}$ можно выписать в виде

$$\mathbf{Y} = \gamma \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\phi}) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\phi}}. \tag{6}$$

Здесь γ и $\boldsymbol{\beta}$ — параметры внешних воздействующих полей.

Моментные напряжения, сопряженные директору $\boldsymbol{\phi}$, можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\phi} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\phi})}. \tag{7}$$

Подставим выражения (4) и (7) в уравнения движения (1) и (2). В результате получим

$$\nabla\cdot\Big(p\mathbf{I}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial(\nabla\otimes\boldsymbol{\phi})}\cdot\boldsymbol{\phi}\otimes\nabla\Big)=\mathbf{X}-\rho\partial.\mathbf{v},\tag{8}$$

$$\nabla\cdot\Big(\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\phi}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial(\nabla\otimes\boldsymbol{\phi})}\Big)=-\Big(\gamma\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\beta}\cdot(\nabla\otimes\boldsymbol{\phi})-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\phi}}\Big)+\Im\partial..\boldsymbol{\phi}.\tag{9}$$

Вычислим производные $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial(\nabla\otimes\boldsymbol{\phi})}$ и $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\phi}}$ в (8) и (9) в координатной форме

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial(\nabla_i\phi^j)}=(k_{11}-k_{22})\nabla_s\phi^s\delta^i_j+k_{22}\nabla_j\phi^i+(k_{33}-k_{22})g_{lj}\nabla_s\phi^i\phi^s\phi^l,\\&\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi^i}=(k_{33}-k_{22})g_{sl}\nabla_i\phi^s\nabla_m\phi^l\phi^m.\end{aligned}\tag{10}$$

Подставив полученные выражения (10) в систему (1), (2) получим

$$\begin{aligned}&g^{ji}\nabla_jp+g^{is}\nabla_j(((k_{11}-k_{22})\nabla_m\phi^m\delta^j_k+k_{22}\nabla_k\phi^j+(k_{33}-k_{22})g_{lj}\nabla_m\phi^i\phi^m\phi^l)\nabla_s\phi^k)=\\&=X^i-\rho\partial.v^i,\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}&g_{ik}\beta^j\nabla_j\phi^k+\nabla_j((k_{11}-k_{22})\nabla_s\phi^s\delta^j_i+k_{22}\nabla_i\phi^j+(k_{33}-k_{22})g_{li}\nabla_s\phi^j\phi^s\phi^l)=\\&=-\gamma g_{ik}\phi^k+\beta_jg_{ik}\nabla_j\phi^k+(k_{33}-k_{22})\phi^j\nabla_i\phi^kg_{kl}\nabla_j\phi^l+\Im g_{ik}\partial..\phi^k.\end{aligned}\tag{12}$$

Раскрыв скобки окончательно получим

$$\begin{aligned}&g^{ji}\nabla_jp+(k_{11}-k_{22})g^{is}\nabla_j(\nabla_m\phi^m\nabla_s\phi^j)+k_{22}g^{is}\nabla_j(\nabla_k\phi^j\nabla_s\phi^k)+\\&\quad+(k_{33}-k_{22})g_{lj}g^{is}\nabla_j(\nabla_m\phi^i\nabla_m\phi^k\phi^s\phi^l)=X^i-\rho\partial.v^i,\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}&g_{ik}\beta^j\nabla_j\phi^k+(k_{11}-k_{22})\nabla_i\nabla_l\phi^l+k_{22}\nabla_j\nabla_i\phi^j+(k_{33}-k_{22})g_{li}\nabla_j\nabla_s\phi^j\phi^s\phi^l=\\&=-\gamma g_{ik}\phi^k+\beta^jg_{ik}\nabla_j\phi^k+(k_{33}-k_{22})g_{kl}\nabla_i\phi^k\nabla_j\phi^l\phi^j+\Im g_{ik}\partial..\phi^k.\end{aligned}\tag{14}$$

Полученные уравнения (13) и (14) описывают поведение микрополярной среды с одним свободным директором.

Заключение.

(1) В настоящей работе предложена процедура моделирования микрополярного континуума с одним свободным директором, представляющим собой псевдовектор веса +1. Подобные модели могут быть использованы в прикладных задачах, связанных с изучением процессов деформирования метаматериалов.
(2) Получены уравнения движения в терминах относительных тензоров и осуществлен переход к формулировках в абсолютных тензорах. Последнее выполняется с помощью степеней ориентирующего псевдоскаляра.
(3) Указаны определяющие соотношения для тензора силовых и моментных напряжений.
(4) В линейном приближении приведена точная форма упругой энергии в форме трехконстантного потенциала.
(5) В итоговых формах уравнений не используются абсолютные дискриминантные тензоры (или псевдотензоры перестановок), характерные для микрополярных теорий.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Classification of cubic auxetics // physica status solidi (b). 2013. T. 250, № 10. C. 2038–2043. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/pssb.201384233.

[2] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi, G. A. Soliu, R. M. Mahamood [и др.] // Advances in Manufacturing Engineering / под ред. S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. C. 555–564.

[3] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu/Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi [и др.] // Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. 2020. T. 51, № 6. C. 766–773. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mawe.202000019.

[4] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности // Самара: Изд-во Самар. гос. ун-та. 2006. с. 340.

[5] Radayev Yu. N., Murakami S., Hayakawa K. Mathematical Description of Anisotropic Damage State in Continuum Damage Mechanics // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series A. 1994. T. 60, № 580. C. 2750–2758.

[6] Radayev Y. N. Thermodynamical Model of Anisotropie Damage Growth. Part I. Canonical Dynamic State Variables of Continuum Damage Mechanics and Thermodynamical Functions of Three-Dimensional Anisotropie Damage State // Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics. Berlin, Boston, 1996. T. 21, № 2. C. 129 – 152.

[7] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. Физматлит, 2009. с. 156.

[8] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Изд-во Саратовского ун-та, 2010. с. 328.

[9] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Термомеханическая ортогональность в нелинейной термоупругости третьего типа (GNIII) // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, № 3. С. 72–82.

[10] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Связанная термомеханическая ортогональность в нелинейных моделях термоупругости третьего типа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2013. № 1 (30). С. 207–214.

[11] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On thermodynamics of wave processes of heat transport // Mechanics for Materials and Technologies. Springer, 2017. C. 363–376.

[12] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В. О принципе термомеханической ортогональности в проблемах моделирования сложных сред и метаматериалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 1. С. 20–31.

[13] Новацкий В. Теория упругости. М: Мир, 1975. с. 872.

[14] Nowacki W. The Linear Theory of Micropolar Elasticity // Micropolar Elasticity: Symposium Organized by the Department of Mechanics of Solids, June 1972 / под ред. W. Nowacki, W. Olszak. Vienna: Springer Vienna, 1974. C. 1–43.

[15] Maugin G. A. Continuum mechanics through the twentieth century. Springer, 2013. c. 978.

[16] Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Springer, 2017. c. 314.

[17] Чандрасекар С. Жидкие кристаллы. М: Мир, 1980. с. 344.

[18] E. Cosserat, F. Cosserat. Th´eorie des corps d´eformables. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. c. 124.

[19] Ericksen J. L. Conservation laws for liquid crystals // Trans-Soc. Rheol. 1961. T. 5. C. 23–24.

[20] Leslie F. M. Some constitutive equations for anisotropic fluids // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1966. T. 19, № 3. C. 357–370.

[21] Leslie F. M. Some constitutive equations for liquid crystals // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1968. T. 28, № 4. C. 265–283.

[22] Широков П. А. Тензорное исчисление. Ч. 1. Алгебра тензоров. М: ОНТИ, 1934. с. 464.

[23] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948.

[24] Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков, 1965. М.: Наука, ГРФМЛ. с. 456.

[25] Сокольников И. Тензорный анализ. М: Наука, 1971. с. 376.

V. A. Kovalev, E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

ON THREE-CONSTANT POTENTIALS IN POLAR CONTINUA

Moscow City University of Management, Moscow, Russia
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper deals with the problem of modeling the processes of deformation of materials with a complex response to mechanical stress. The governing equations of the three-constant microstructural model for the case of one polar director are presented. The exact form of the Helmholtz free energy is written out. The governing equations and boundary conditions are derived by the standard scheme.

Keywords: microstructure, micropolarity, director, three-constant potential, equilibrium equations, nematic liquid crystal

REFERENCES

[1] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Classification of cubic auxetics // physica status solidi (b). 2013. T. 250, № 10. C. 2038–2043.

[2] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi, G. A. Soliu, R. M. Mahamood [и др.] // Advances in Manufacturing Engineering / под ред. S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. C. 555–564.

[3] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu/Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi [и др.] // Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. 2020. T. 51, № 6. C. 766–773.

[4] Radayev Y. N. Three-Demensional Problem of the Theory of the Perfect Plasticity // Samara: Sam. St. Univ. 2006. c. 340.

[5] Radayev Yu. N., Murakami S., Hayakawa K. Mathematical Description of Anisotropic Damage State in Continuum Damage Mechanics // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series A. 1994. T. 60, № 580. C. 2750–2758.

[6] Radayev Y. N. Thermodynamical Model of Anisotropie Damage Growth. Part I. Canonical Dynamic State Variables of Continuum Damage Mechanics and Thermodynamical Functions of Three-Dimensional Anisotropie Damage State // Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics. Berlin, Boston, 1996. T. 21, № 2. C. 129 – 152.

[7] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Elements of the Classical Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants. Fizmatlit, 2009.

[8] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Wave Problems of the Field Theory and Thermomechanics. Saratov Univ. Press, 2010.

[9] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Thermomechanical orthogonality in nonlinear type-III thermoelasticity (GNIII) // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2012. T. 12, № 3. C. 72–82.

[10] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Coupled thermodynamic orhogonality in non-linear models of type-III thermoelasticity // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2013. № 1 (30). C. 207–214.

Kovalev Vladimir Alexandrovich
`e-mail:` vlad_koval@mail.ru, Dr. Sci., Professor, Moscow City University of Management, Moscow, Russia.
Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

[11] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On thermodynamics of wave processes of heat transport // Mechanics for Materials and Technologies. Springer, 2017. C. 363–376.
[12] Kovalev V. A., Murashkin E. V. On the principle of thermomechanical orthogonality in the problems of modeling complex media and metamaterials // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. Yakivkeva Ser: Mekh. Pred. Sost. 2019. № 1. C. 20–31.
[13] Nowacki W. Elasticity Theory. M: Mir, 1975.
[14] Nowacki W. The Linear Theory of Micropolar Elasticity // Micropolar Elasticity: Symposium Organized by the Department of Mechanics of Solids, June 1972 / под ред. W. Nowacki, W. Olszak. Vienna: Springer Vienna, 1974. C. 1–43.
[15] Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Springer, 2017. c. 314.
[16] Maugin G. A. Continuum mechanics through the twentieth century. Springer, 2013. c. 978.
[17] Chandrasekhar S. Liguid Crystalls. M: Mir, 1980.
[18] E. Cosserat, F. Cosserat. Th´eorie des corps d´eformables. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. c. 124.
[19] Ericksen J. L. Conservation laws for liquid crystals // Trans-Soc. Rheol. 1961. T. 5. C. 23–24.
[20] Leslie F. M. Some constitutive equations for anisotropic fluids // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1966. T. 19, № 3. C. 357–370.
[21] Leslie F. M. Some constitutive equations for liquid crystals // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1968. T. 28, № 4. C. 265–283.
[22] Shirokov P. A. Tensor calculus. P. 1. Tensor Algebra. M: ONTI, 1934. c. 464.
[23] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants // M., L.: GITTL. 1948. c. 408.
[24] Schouten J. A. Tensor analysis for physicists. Oxford, Clarendon Press, 1965. c. 456.
[25] Sokolnikoff I. S. Tensor analysis. M: Nauka, 1971. c. 376.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 18-01-00844, 19-51-60001, 20-01-00666.